C. BRÉARD

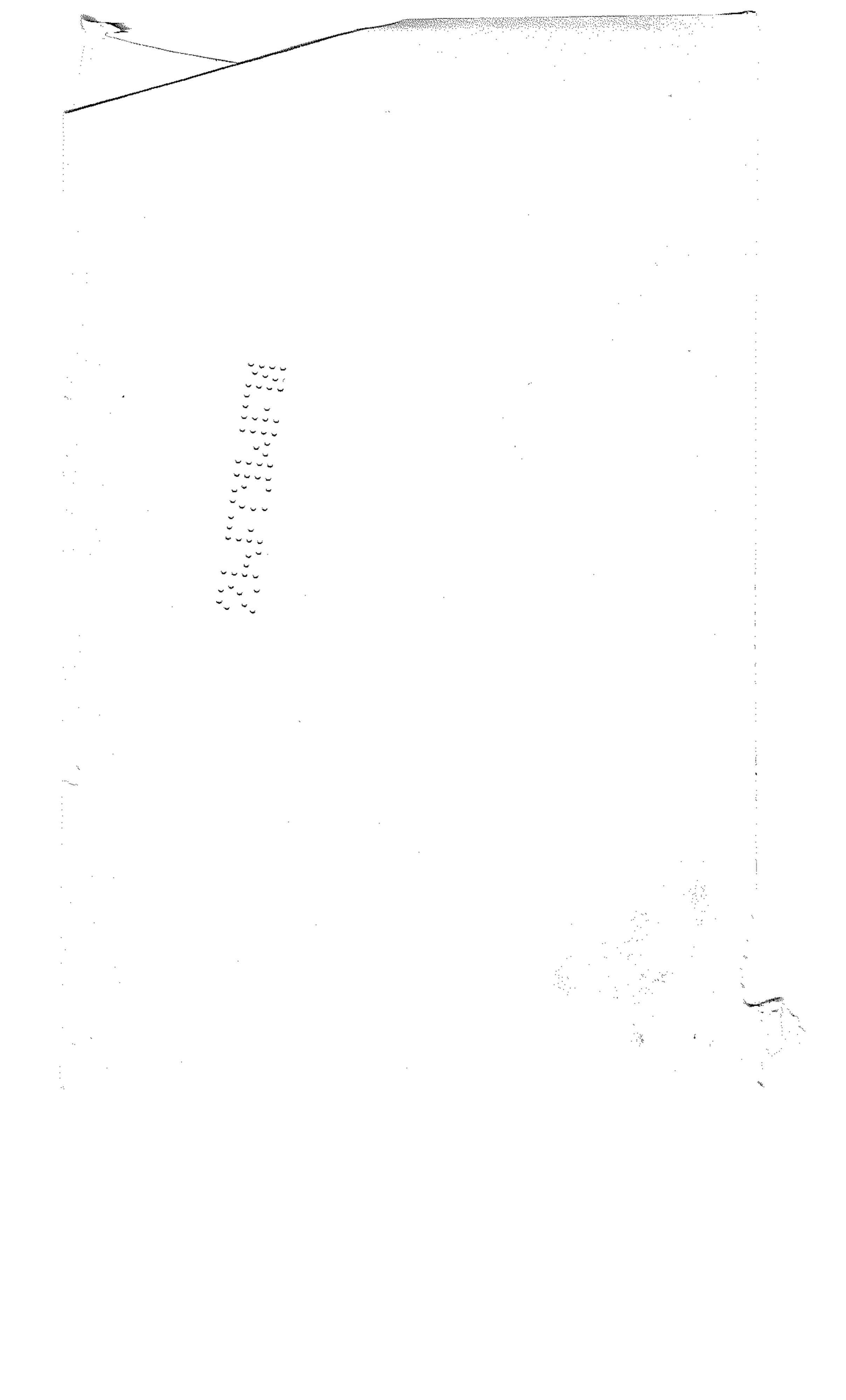
MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES

L'ÉCOLE



Cours Maintenon

Courbes p. 461
barycentre p. 6.0



C. BRÉARD

MATHÉMATIQUES

CLASSE DE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES

TOME II

N° 470/2

ÉDITIONS DE L'ÉCOLE

11, rue de Sèvres, PARIS-VIe

DU MÊME AUTEUR

MATHÉMATIQUES, Classe de 6e
MATHÉMATIQUES, Classe de 5e
MATHÉMATIQUES, Classe de 4e
MATHÉMATIQUES, Classe de 3e
MATHÉMATIQUES, Classes de 2e AB
MATHÉMATIQUES, Classes de 1re A' C, M, M'
MATHÉMATIQUES, Classes de 1re AB
MATHÉMATIQUES, Classes de mathématiques élémentaires, tome 1

◆

POUR LA MÊME CLASSE

LA PENSÉE ET L'ACTION — *par* **Foulquié.**
PHYSIQUE — *Collection* **Eve-Peschard.**
CHIMIE — *Collection* **Eve-Langlois.**
PROBLÈMES DE PHYSIQUE ET CHIMIE — *par* **Eve.**
CAHIER DE MANIPULATIONS DE PHYSIQUE ET CHIMIE *par* **Brault-Rey.**
PRÉCIS D'INITIATION AU CINÉMA — *par* **Agel.**

SYMBOLES ET NOTATIONS

Livre I

$\neg$	négation d'une assertion	$\neg$A, non A
$\wedge$	conjonction de deux assertions	$C = A \wedge B$, A *et* B
$\vee$	disjonction de deux assertions	$D = A \vee B$, A *ou* B (*ou* non exclusif)
$\Rightarrow$	implication	$A \Rightarrow B$, A implique B
$\Leftrightarrow$	réciprocité	$A \Leftrightarrow B$, A équivalent à B
E, ...	ensembles : $E = \{1;2;3;4;5\}$	ou $E = \{x/x \in A \text{ et } x \in B\}$
$\in$	appartenance	$x \in E$, x est élément de E
$\notin$	non appartenance	$x \notin E$, x n'est pas élément de E
$\subset$	inclusion	$A \subset E$, A inclus dans E $E \supset A$, E contient A
$\not\subset$	non inclusion	$A \not\subset B$, A n'est contenu dans B $B \not\supset A$, B ne contient pas A
$\varnothing$	ensemble vide; partie vide	
$\mathcal{P}(E)$	ensemble des parties de E	
$\complement_E(A)$	complémentaire de A par rapport à E	
$\cap$	intersection	$J = A \cap B$, J égal à A inter B
$\cup$	réunion	$R = A \cup B$, R égal à A union B
$\forall$	quantificateur universel	$(\forall x)(p)$, tout x possède la propriété p
$\exists$	quantificateur existentiel	$(\exists x)(p)$, il existe au moins un x qui possède la propriété p
$E \times F$	produit cartésien de deux ensembles	E croix F
$pr_1 G$	première projection graphe G	$pr_1 G = A^*$
$pr_2 G$	seconde projection graphe G	$pr_2 G = B^*$
A^*	ensemble de définition d'une correspondance	
B^*	ensemble des valeurs d'une correspondance	
$\bigcap_{i=1}^{i=n} A_i$	intersection d'une famille d'ensembles	
$\bigcup_{i=1}^{i=n} A_i$	réunion d'une famille d'ensembles	
$\overset{-1}{\Gamma}$	correspondance réciproque de la correspondance Γ	
$g_0 f = h$	produit de deux correspondances :	g rond f
$x \mathcal{R} y$	le couple $(x;y)$ possède la propriété $\mathcal{R}$	
$\mid$	$a \mid b$, a divise B; a est diviseur de b	

$x \sim y$, $x = y$, mod $\mathcal{R}$; x équivalent à y, modulo $\mathcal{R}$

$x \prec y$: x antérieur à y

$y \succ y$: y postérieur à x

$\inf_E X$ ou $\inf X$, borne inférieure de X dans E

$\sup_E X$ ou $\sup X$, borne supérieure de X dans E

Livre II

$*$	astérisque ; étoile ; star	symboles de lois de composition
$\top$	truc	
$\perp$	antitruc	

$x \top x = \top x$

$f(\alpha; x) = \alpha x$ ($\alpha \in \Omega$; $x \in E$), loi de composition externe (α : opérateur)

$\aleph_0$ aleph zéro ; cardinal du dénombrable [$\aleph_0 = \text{card}(N)$]

$\mathfrak{C}$ cardinal du continu [($\mathfrak{C} = \text{card}(R)$]

A eq B ou Éq (A ; B) : A équipotent à B

$n!$ factorielle n

A_n^p nombre des arrangements de n éléments pris p à p

P_n nombre des permutations de n éléments $\quad P_n = A_n^n = n!$

C_n^p nombre des combinaisons de n éléments pris p à p $\quad C_n^p = \binom{n}{p}$

$\sum$ symbole de sommation $\quad S = \sum_{i=1}^{n} a_i$

div A ensemble des diviseurs de A

$A \wedge B = \Delta$, p.g.c.d. de A et B $\quad \Delta = A \wedge B$, A pgcd B

$A \vee B = \mu$, p.p.c.m. de A et B $\quad \mu = A \vee B$, A ppcm B

$a = b$ mod n ; a congru à b. modulo n

$\dot{a} = \text{Cl}(a)$, classe de l'élément a $\quad \dot{a}$; a point

N ensemble des cardinaux finis, ou entiers naturels

Z anneau des entiers rationnels (entiers relatifs)

Z/n ou Z/nZ, anneau des entiers modulo n

Q corps des rationnels

R corps des réels

C corps des complexes

$N^* = N - \{0\}$ $\quad Z^* = Z - \{0\}$ $\quad Q^* = Q - \{0\}$

$R^* = R - \{0\}$ $\quad C^* = C - \{0\}$

$Z_+ = \{x / x \in Z ; x \geqslant 0\}$ $\quad Q_+ \quad R_+$

$Z_- = \{x / x \in Z ; x < 0\}$ $\quad Q_- \quad R_-$

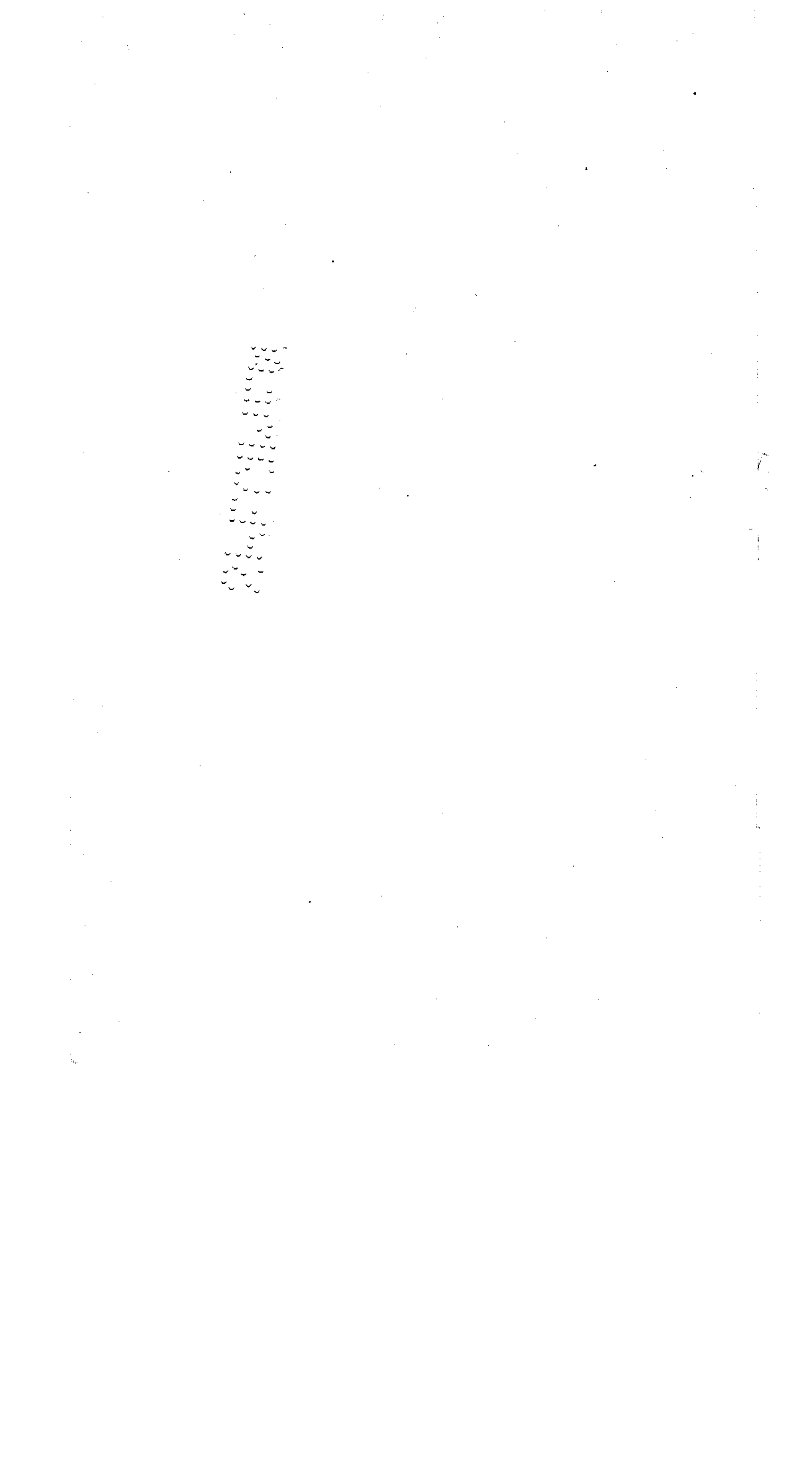
Livre III

$\mathcal{M}_1^3$	ensemble des matrices à 1 colonne et 3 lignes
$\mathcal{B}_0$	$= \{ j ; j \}$, base canonique de l'espace K^2
$\mathcal{B}_0$	$= \{ i ; j ; k \}$, base canonique de l'espace K^3
$F\perp$	ensemble des vecteurs orthogonaux à F
$\mathcal{P}(K)$	anneau des polynômes construits sur K (anneau ou corps K)
$\mathcal{F}$	corps des fractions de polynômes

Relations	[R]	Réflexivité
	[S]	Symétrie
	[AS]	Antisymétrie
	[T]	Transitivité
Lois de composition	[C]	Commutativité
	[D_G]	Distributivité à gauche } [D] = [D_G] et [D_D]
	[D_D]	Distributivité à droite
	[D′]	Loi externe distributive pour l'addition dans E
	[D″]	Loi externe distributive pour l'addition dans Ω
	[A]	Associativité d'une loi interne
	[A′]	Associativité mixte entre la loi externe et la multiplication dans Ω
	[A″]	Associativité mixte entre la loi externe et la multiplication dans E
	[N]	Existence d'un neutre
	[S]	L'ensemble E est symétrisé
sections minorées	[S_1]	$\alpha \neq 0$ et $\alpha \neq Q$
	[S_2]	$(\forall a)\ (\forall b)\ (a \in \alpha$ et $a \leqslant b \Rightarrow b \in \alpha)$
	[S_3]	α n'a pas de plus petit élément
distance	[M_1]	$d(A ; B) = 0 \Leftrightarrow A = B$, axiome de séparation
	[M_2]	$(\forall A)\ (\forall B)\quad d(A ; B) = d(B ; A)$, axiome de symétrie
	[M_3]	$(\forall A)\ (\forall B)\ (\forall C),\quad d(A ; B) \leqslant d(A ; C) + d(C ; B)$, axiome de l'inégalité triangulaire.

SECONDE PARTIE
(Suite)

ALGÈBRE



LIVRE IV

ESPACES PONCTUELS

CHAPITRE XXXVIII

ESPACES PONCTUELS AFFINES

520. Espace ponctuel K^n.

Soit un corps K. Généralement K est l'un des corps Q, R, C ou Z/p avec p premier.

On considère les suites de n nombres du corps K, et on les appelle des points. L'ensemble de toutes les suites considérées constitue l'espace ponctuel K^n.

Ainsi on parlera du point A (2; 3; 5) de l'espace R^3, du point M (i; $1 - i$; $1 + i$) de l'espace C^3; on peut aussi considérer le point P($\dot{2}$; $\dot{3}$) de l'espace K^2 avec $K = Z/5$, ou le point Q ($\pi + \sqrt{3}$) de l'espace R.

Le point O (0; 0;... 0) est l'origine de l'espace K^n.

Les nombres x_1; x_2...; x_n sont les coordonnées canoniques du point M (x_1; x_2; ...; x_n).

Lorsque l'on envisage l'espace K^3, les points sont les suites (x; y; z); x est l'abscisse, y l'ordonnée, z la cote du point.

Lorsque l'on envisage l'espace K^2, les points sont les suites (x; y); x est l'abscisse, y l'ordonnée du point.

Lorsque l'on envisage l'espace K, les points sont les éléments x de K; x est l'abscisse du point.

521. Vecteur lié.

Soient deux points A et B de l'espace K^3. (On prend $n = 3$ pour fixer les idées) :

$$A (x_A; y_A; z_A) \quad \text{et} \quad B (x_B; y_B; z_B).$$

Le couple (A; B) des deux points A et B est appelé un vecteur lié.

Le point A est l'origine, B est l'extrémité de ce vecteur.

Le vecteur (A; B) est dit lié à son origine A.

Au lieu de noter (A; B) on note généralement $\overrightarrow{AB}$ et on lit «vecteur AB».

522. Coordonnées d'un vecteur lié.

Les nombres

$$X = x_B - x_A$$
$$Y = y_B - y_A$$
$$Z = z_B - z_A$$

sont les coordonnées canoniques du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Au lieu de déterminer un vecteur $\overrightarrow{AB}$ par son origine et son extrémité on peut le déterminer par son origine A et ses coordonnées (X; Y; Z).

◇ *Exemple 1. Soit le vecteur* $\overrightarrow{AB}$ *de* R^3 *avec A (— 1; 2; 3) et B (3; — 4; 5). Calculer les coordonnées de ce vecteur.*

On a :

$$X = x_B - x_A = 3 - (-1) = 4$$
$$Y = y_B - y_A = -4 - 2 = -6$$
$$Z = z_B - z_A = 2 - 3 = -1$$

Les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ sont donc (4; — 6; — 1).

◇ *Exemple 2. On donne dans l'espace complexe C les points A (1 — i) et B (2 + 3 i). Calculer la coordonnée de ce vecteur.*

On a :

$$X = x_B - x_A = (2 + 3i) - (1 - i)$$
$$= 1 + 4i$$

La coordonnée de $\overrightarrow{AB}$ est donc $1 + 4i$.

(Au lieu de coordonnée de $\overrightarrow{AB}$ on dit souvent *affixe du vecteur* $\overrightarrow{AB}$).

◇ *Exemple 3. On considère l'espace ponctuel* K^2 *avec* $K = Z/5$. *Soient dans* K^2 *les points A* $(\dot{2}; \dot{4})$ *et B* $(\dot{4}; \dot{3})$. *Calculer les coordonnées du vecteur* $\overrightarrow{AB}$.

On a :

$$X = x_B - x_A = \dot{4} - \dot{2} = \dot{2}$$
$$Y = y_B - y_A = \dot{3} - \dot{4} = -\dot{1} = \dot{4}.$$

Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont donc $(\dot{2}; \dot{4})$.

◇ *Exemple 4. Dans l'espace ponctuel R, on considère les points A $(2\sqrt{3}-1)$ et B $(\sqrt{3}+3)$. Calculer la coordonnée du vecteur $\overrightarrow{AB}$.*

On a :

$$X = x_B - x_A = (\sqrt{3}+3) - (2\sqrt{3}-1) = 4 - \sqrt{3}$$

$4 - \sqrt{3}$ est la coordonnée du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

(Au lieu de coordonnée de $\overrightarrow{AB}$ on dit souvent, par abus de langage, *mesure algébrique* du vecteur $\overrightarrow{AB}$; on écrit :

$$\overline{AB} = 4 - \sqrt{3}$$

et on lit « algébrique AB » au lieu de « mesure algébrique du vecteur $\overrightarrow{AB}$ »).

523. Équipollence des vecteurs liés.

Deux vecteurs liés $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{A'B'}$ sont équipollents s'ils ont les mêmes coordonnées canoniques.

On note :

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'} \qquad (523;1)$$

et on lit « vecteur AB équipollent à vecteur A'B' ».

Si dans K^3 :

$$\overrightarrow{AB}\begin{cases} X = x_B - x_A \\ Y = y_B - y_A \\ Z = z_B - z_A \end{cases} \qquad \overrightarrow{A'B'}\begin{cases} X' = x_{B'} - x_{A'} \\ Y' = y_{B'} - y_{A'} \\ Z' = z_{B'} - z_{A'} \end{cases}$$

on a l'équivalence :

$$\left(\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} X = X' \\ Y = Y' \\ Z = Z' \end{cases} \qquad (523;2)$$

◇ *Exemple. On donne les points du plan R^2 :*

A (2; — 1) B (— 2; 3) C (4; 1) D (0; 5)

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont-ils équipollents?

On a :

$$\overrightarrow{AB}\begin{cases} X = -2-2 = -4 \\ Y = 3+1 = 4 \end{cases} \qquad \overrightarrow{CD}\begin{cases} X' = 0-4 = -4 \\ Y' = 5-1 = 4 \end{cases}$$

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$, ayant les mêmes coordonnées, sont équipollents.

524. Relation d'équivalence.

La relation d'équipollence entre les vecteurs liés est une relation d'équivalence.

En effet, c'est une relation binaire qui est :

réflexive : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}$

symétrique : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Rightarrow \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$

car

$$\begin{cases} X = X' \\ Y = Y' \\ Z = Z' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X' = X \\ Y' = Y \\ Z' = Z \end{cases}$$

transitive :

$$\left.\begin{matrix} \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \\ \text{et} \\ \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{EF} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EF}$$

car

$$\left.\begin{matrix} X = X' \\ Y = Y' \\ Z = Z' \end{matrix}\right\} \text{ et } \left.\begin{matrix} X' = X'' \\ Y' = Y'' \\ Z' = Z'' \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{cases} X = X'' \\ Y = Y'' \\ Z = Z'' \end{cases}$$

525. Vecteurs libres.

Les classes d'équivalence, selon la relation d'équivalence précédente, s'appellent des vecteurs libres.

Si $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur lié donné de coordonnées (X; Y; Z), tous les vecteurs liés équipollents à $\overrightarrow{AB}$, c'est-à-dire tous les vecteurs liés de coordonnées (X; Y; Z), constituent la classe d'équivalence de $\overrightarrow{AB}$.

Un vecteur libre peut être représenté par l'un quelconque des vecteurs liés de sa classe d'équivalence.

Si $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur lié donné, on peut parler du vecteur libre $\overrightarrow{AB}$.
On peut aussi donner un vecteur libre par ses coordonnées (X; Y; Z) et désigner ce vecteur libre par une seule lettre $\vec{V}$.

Au vecteur libre $\vec{V}$ de coordonnées (X; Y; Z) on peut associer une matrice à une colonne $\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$ et réciproquement.

526. Espace vectoriel des vecteurs libres.

On a ainsi une application

$$\varphi : \qquad \vec{V} \longrightarrow \varphi(\vec{V}) = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$$

de l'ensemble des vecteurs libres de K^3 sur l'ensemble $\mathcal{M}_1^3$ des matrices à une colonne et trois lignes.

Cette application φ est bijective.

Dans l'ensemble des vecteurs libres on introduit une addition et une multiplication d'un vecteur libre par un scalaire :

$\vec{S} = \vec{A} + \vec{B}$ est le vecteur libre de matrice associée $\begin{pmatrix} X + X' \\ Y + Y' \\ Z + Z' \end{pmatrix}$.

$\vec{P} = \alpha \cdot \vec{A}$ est le vecteur libre de matrice associée $\begin{pmatrix} \alpha X \\ \alpha Y \\ \alpha Z \end{pmatrix}$.

L'application φ est alors manifestement un isomorphisme.
Par suite :

L'ensemble des vecteurs libres de K^3 est un espace vectoriel sur K.

La dimension de cet espace vectoriel est trois.

527. Repérage vectoriel.

On appelle repère vectoriel du point M, relativement à l'origine O, le vecteur $\overrightarrow{OM}$.

A et B étant des points quelconques de l'espace ponctuel K^3, on considère le vecteur lié $\overrightarrow{AB}$; ses coordonnées sont :

$$\begin{cases} X = x_B - x_A \\ Y = y_B - y_A \\ Z = z_B - z_A \end{cases}$$

De même les coordonnées de $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$ sont aussi :

$$\begin{cases} X = x_B - x_A \\ Y = y_B - y_A \\ Z = z_B - z_A \end{cases}$$

Donc :

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} \qquad (527;1)$$

Et :

Un vecteur lié est égal au repère de son extrémité diminué du repère de son origine.

528. Relation vectorielle de Chasles.

A, B, C, D étant des points quelconques, on a :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA}$$
$$= (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) + (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}) + (\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC}) + (\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OD})$$
$$= 0$$

Donc :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = 0 \qquad (528; 1)$$

et aussi :

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} \qquad (528; 2)$$

529. Propriété fondamentale de l'équipollence.

Soient deux vecteurs équipollents :

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$$

La relation vectorielle de Chasles permet d'écrire cette équipollence sous la forme :

$$\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'B} = \overrightarrow{A'B} + \overrightarrow{BB'}$$

L'addition étant régulière, on déduit :

$$\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'}$$

D'où l'implication :

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'} \Rightarrow \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} \qquad (529; 1)$$

530. Diagramme d'un espace ponctuel.

1° *Un espace ponctuel K est appelé une droite :* la droite numérique K. Certaines droites peuvent être représentées par un diagramme de Venn.

Par exemple, la droite K = Z/5 comprend 5 points :

$$A(\dot{0}) \quad B(\dot{1}) \quad C(\dot{2}) \quad D(\dot{3}) \quad E(\dot{4}).$$

La figure (530 *a*) donne un diagramme de cette droite.

Les diagrammes de la droite réelle R et de la droite complexe C seront donnés ultérieurement.

2° *Un espace ponctuel K^2 est appelé un plan :* le plan numérique K^2. Si la droite K est représentée par un diagramme de Venn, le plan K^2 est représenté par le diagramme du produit cartésien $K \times K$.

Si $K = Z/5$, le diagramme du plan K^2 est représenté par la figure (530 *b*); le plan K^2 comprend 25 points.

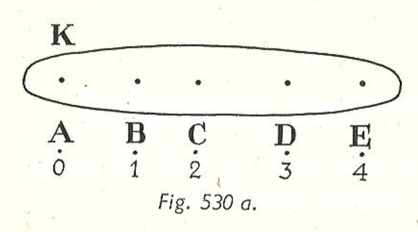


Fig. 530 a.

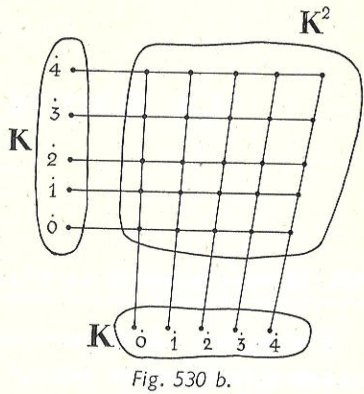


Fig. 530 b.

3° Certains espaces ponctuels K^3 peuvent être représentés par un diagramme de Venn. Dans la pratique, cela ne se fait que pour l'espace R^3.

CHAPITRE XXXIX

LA DROITE NUMÉRIQUE R

531. Norme euclidienne d'un vecteur de la droite réelle R.

Si le vecteur $\vec{V}$ de coordonnées X est un vecteur libre de R, ***on appelle norme euclidienne du vecteur*** $\vec{V}$ ***le nombre positif.***

$$N(\vec{V}) = \|\vec{V}\| = |X|$$

En effet les trois axiomes d'une norme sont vérifiés (cf. n° 508).

$\boxed{N_1}$ $(\forall \vec{V})$ $\quad N(\vec{V}) = 0 \Leftrightarrow \vec{V} = 0.$

En effet :

$$N(\vec{V}) = 0 \Leftrightarrow |X| = 0 \Leftrightarrow X = 0 \Leftrightarrow \vec{V} = 0.$$

$\boxed{N_2}$ $(\forall \lambda)(\forall \vec{V})$ $\quad N(\lambda\vec{V}) = |\lambda| \cdot N(\vec{V}).$

En effet :

$$N(\lambda\vec{V}) = |\lambda \cdot X| = |\lambda| \cdot |X| = |\lambda| \cdot N(V).$$

$\boxed{N_3}$ $(\forall \vec{U})(\forall \vec{V})$ $\quad N(\vec{U} + \vec{V}) \leqslant N(\vec{U}) + N(\vec{V}).$

En effet :

$$N(\vec{U} + \vec{V}) = |X + Y| \leqslant |X| + |Y| \leqslant N(\vec{U}) + N(\vec{V}).$$

Remarque. Le raisonnement du n° 412 est valable ici, et peut remplacer les explications précédentes.

532. Distance euclidienne.

Soient deux points A et B de la droite R, dont les abscisses sont respectivement a et b.

On appelle distance euclidienne du point A au point B le nombre positif **| b — a |.**

On note :

$$d(A\,;\,B) = |b - a| \qquad (532\,;\,1)$$

ou

$$d(A\,;\,B) = |x_B - x_A| = |X|.$$

On définit bien ainsi une distance car les trois axiomes d'une distance sont vérifiés (cf. n° 510).

M_1 $(\forall A)\ (\forall B)$ $\quad$ $\mathbf{d}(A\,;\,B) = 0 \Leftrightarrow A = B.$

En effet :

$d(A\,;\,B) = 0 \Leftrightarrow |b - a| = 0 \Leftrightarrow b - a = 0 \Leftrightarrow a = b \Leftrightarrow A = B.$

M_2 $(\forall A)\ (\forall B)$ $\quad$ $d(A\,;\,B) = d(B\,;\,A).$

En effet :

$$d(A\,;\,B) = |b - a|$$

et

$$d(B\,;\,A) = |a - b| = |b - a|.$$

M_3 $(\forall A)\ (\forall B)\ (\forall C)$ $\quad$ $\mathbf{d}(A\,;\,B) \leqslant \mathbf{d}(A\,;\,C) + \mathbf{d}(C\,;\,B).$

En effet, d'après le théorème de Chasles :

$$\overline{AB} = \overline{AC} + \overline{CB}$$

et

$$|\overline{AB}| = |\overline{AC} + \overline{CB}| \leqslant |\overline{AC}| + |\overline{CB}|$$

c'est-à-dire :

$$d(A\,;\,B) \leqslant d(A\,;\,C) + d(C\,;\,B).$$

De plus (cf. n° 510, 2°) on a aussi :

$$|\mathbf{d}(A\,;\,C) - \mathbf{d}(B\,;\,C)| \leqslant \mathbf{d}(A\,;\,B) \leqslant \mathbf{d}(A\,;\,C) + \mathbf{d}(B\,;\,C).$$

533. Segments.

1° Soient deux points A et B de la droite R, dont les abscisses sont a et b.

Un point M d'abscisse x *est dit entre A et B si* $a < x < b$ *ou* $b < x < a$.

L'ensemble des points A et B, et des points situés entre A et B, constitue le segment AB.

Les points A et B sont les *extrémités* du segment AB.

Si $a < b$, on a l'équivalence :

$$M \in AB \Leftrightarrow \mathbf{a} \leqslant \mathbf{x} \leqslant \mathbf{b}. \qquad (533\,;\,1)$$

On a donc :

$$0 \leqslant x - a \leqslant b - a$$

c'est-à-dire :

$$x - a = t(b - a) \qquad t \in [0\,;1].$$

D'où :

$$M \in AB \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = t \cdot \overrightarrow{AB}, \qquad t \in [0\,; 1]. \qquad (533\,;2)$$

2° ***La distance* d *(A; B) s'appelle la mesure ou la longueur du segment AB.***

On note parfois :

$$d\,(A;\,B) = \text{mes}\,(AB) = \text{long}\,(AB)$$

ou plus simplement :

$$d\,(A;\,B) = AB.$$

3° ***Deux segments AB et CD sont isométriques (ou congrus ou égaux) lorsqu'ils ont la même longueur.***

C'est là une relation d'équivalence, car cette relation binaire est manifestement réflexive, symétrique et transitive.

534. Diagramme de la droite R.

Pour faciliter les raisonnements sur la droite R, on la représente par la *droite graphique* tracée avec une règle.

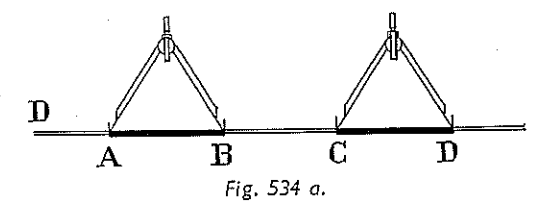


Fig. 534 a.

Sur la droite graphique, on convient de représenter les segments égaux AB et CD par des images correspondant à un même écartement des pointes d'un compas à pointes sèches (fig. 534 *a*).

---

(1) On rappelle ici les définitions suivantes des intervalles dans le corps ordonné R.

Intervalle fermé : $[a\,; b] = \{x/x \in R,\ a \leqslant x \leqslant b\}$.
Intervale ouvert : $]a\,; b[= \{x/x \in R,\ a < x < b\}$.
Intervalles mixtes : $[a\,; b[= \{x/x \in R,\ a \leqslant x < b\}$.
: $]a\,; b] = \{x/x \in R,\ a < x \leqslant b\}$.

Intervalles non bornés : $]\leftarrow\,; a] =]-\infty\,; a] = \{x/x \in R,\ x \leqslant a\}$.
$]\leftarrow\,; a[=]-\infty\,; a[= \{x/x \in R\,; x < a\}$.
$[a\,; \rightarrow[= [a\,; +\infty[= \{x/x \in R\,; a \leqslant x\}$.
$]a\,; \rightarrow[=]a\,; +\infty[= \{x/x \in R\,; a < x\}$.

On retrouve donc la droite graphique étudiée dans les classes précédentes. Mais il ne faut voir là qu'une image concrète, qu'une représentation matérielle de R. C'est toutefois un modèle particulièrement commode et utile.

Sur la droite graphique, à chaque nombre de R correspond une image graphique appelée point. Ainsi aux nombres 0, 1, 2, 3,... correspondent les points O, I, A, B, ... (fig. 534 *b*).

x' 0 I(1) A(2) B(3) C (4,5) x

Fig. 534 b.

La représentation graphique respecte la structure d'ordre total de R; si on a $a < b < c$, le point B se trouve « entre » A et C.

Dans ces conditions la figure 534 *c* donne l'image d'un segment AB.

0 A B

Fig. 534 c.

Un vecteur lié de la droite R est représenté par les points A et B (origine et extrémité du vecteur).

Souvent on y ajoute le segment AB et une flèche en B (fig. 534 *d*).

x' 0 A(a) B(b) x

Fig. 534 d.

535. Axe.

1° Sur la droite $x'Ox$, on marque le point I (1). Le vecteur $\overrightarrow{OI} = \vec{i}$, lié au point O, a pour norme $\|\overrightarrow{OI}\| = 1$; c'est un vecteur unitaire (fig. 535 *a*).

x' O $\vec{i}$ I M x

$\overrightarrow{OM} = 3\vec{i}$

Fig. 535 a.

L'ensemble $\{x'Ox;\ O;\ \vec{i}\}$, de la droite R, du point-origine O et du vecteur unitaire $\vec{i}$ est un axe.

On parlera couramment de l'axe $x'x$ d'origine O et de vecteur unitaire $\vec{i}$.

L'ensemble des points M (x) avec $x \geqslant 0$ est le demi-axe positif Ox; l'ensemble des points M (x) avec $x \leqslant 0$ est le demi-axe négatif Ox'.

2° Soit un point M (*x*) de l'axe *x'Ox* de vecteur unitaire $\vec{i}$ (fig. 535 *a*).

De

$$x = x \cdot 1 \quad \text{ou} \quad \overline{OM} = x \cdot \overline{OI}$$

on tire :

$$\overrightarrow{OM} = x \cdot \vec{i}. \qquad (535\,;1)$$

3° De même (fig. 535 *b*), de :

$$\overline{AB} = \overline{AB} \cdot 1$$
$$= \overline{AB} \cdot \overline{OI}$$

on tire :

$$\overrightarrow{AB} = \overline{AB} \cdot \vec{i}. \qquad (535\,;2)$$

Fig. 535 b.

536. Milieu d'un segment.

Le milieu d'un segment AB est un point M tel que $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 0$.

On a (fig. 536; *a*) :

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OM} = 0.$$

Fig. 536 a.

D'où :

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right). \qquad (536\,;1)$$

On en déduit :

$$x_M = \frac{1}{2}(x_A + x_B). \qquad (536\,;2)$$

537. Changement d'origine.

L'axe *x'Ox* ayant pour vecteur unitaire $\overrightarrow{OI} = \vec{i}$, on considère une autre origine Ω et un autre vecteur unitaire $\overrightarrow{\Omega U} = \vec{u} = \vec{i}$, le point Ω ayant $\overline{O\Omega} = x_0$ pour abscisse (fig. 537 *a*).

Un point M repéré par rapport à O a pour abscisse x :

$$\overrightarrow{OM} = x \cdot \vec{i} \qquad (537;1)$$

Fig. 537 a.

et repéré par rapport à Ω il a pour abscisse X :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\Omega M} &= X\vec{u}\\ &= X\vec{i}.\end{aligned}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM} &= \overrightarrow{O\Omega} + \overrightarrow{\Omega M}\\ &= x_0\vec{i} + X\vec{i}\\ &= (x_0 + X)\vec{i}. \qquad (537;2)\end{aligned}$$

En comparant les formules (537; 1) et (537; 2) on obtient la formule :

$$x = x_0 + X \qquad (537;3)$$

dite *formule de translation de l'origine.*

538. La mesure algébrique d'un vecteur est intrinsèque.

Soient deux points M_1 et M_2 d'abscisses x_1 et x_2 par rapport à l'origine O et d'abscisses X_1 et X_2 par rapport à l'origine Ω.

On a :

$$\begin{aligned}\overline{M_1M_2} &= x_2 - x_1\\ &= (x_0 + X_2) - (x_0 + X_1)\\ &= X_2 - X_1.\end{aligned}$$

Donc :

La mesure algébrique d'un vecteur lié, sur un axe est indépendante de l'origine choisie sur l'axe.

On en déduit que :

La distance de deux points sur un axe ne dépend pas de l'origine utilisée pour évaluer cette distance.

On traduit ces résultats en disant que :

La mesure algébrique d'un vecteur, l'équivalence des vecteurs liés, ou la distance de deux points, sur un axe sont des propriétés intrinsèques.

Ce théorème permet de choisir sur l'axe l'origine la plus favorable.

CHAPITRE XL

DROITES ET PLANS

539. La droite dans K^2 ou K^3.

1° Soient un point A et un vecteur libre $\vec{U}$.

L'ensemble des points M satisfaisant à la relation $\overrightarrow{AM} = t \cdot \vec{U}$, t étant un élément quelconque de K, est appelé une droite.

Cette droite (D) est déterminée par le point A et le vecteur libre $\vec{U}$.

On note :

$$D = D(A; \vec{U}) = \{ M \,/\, \overrightarrow{AM} = t \cdot \vec{U},\ t \in K \}.$$

2° Deux points A et B déterminent une droite (D) :

$$D = \{ M \,/\, \overrightarrow{AM} = t \cdot \overrightarrow{AB};\ t \in K \}.$$

540. Equations d'une droite.

1° Soit la droite (D) définie par le point A et le vecteur $\vec{U}$. La relation :

$$\overrightarrow{AM} = t \cdot \vec{U} \quad (t \in K) \qquad (540;1)$$

est une équation vectorielle de la droite.

En ajoutant $\overrightarrow{OA}$ aux deux membres on déduit :

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OA} + t \cdot \vec{U}$$

ou

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + t \cdot \vec{U} \quad (t \in K) \qquad (540;2)$$

Cette seconde relation est aussi une équation vectorielle de la droite.
2° On suppose maintenant que l'espace envisagé est l'espace K^3.

En traduisant analytiquement la relation (540; 2) on obtient :

$$\begin{cases} \mathbf{x} = \mathbf{x}_A + \mathbf{t} \cdot \alpha \\ \mathbf{y} = \mathbf{y}_A + \mathbf{t} \cdot \beta \\ \mathbf{z} = \mathbf{z}_A + \mathbf{t} \cdot \gamma \end{cases} \quad (\mathbf{t} \in K) \qquad (540;3)$$

si $(x_A;\ y_A;\ z_A)$ sont les coordonnées de A, et $(\alpha;\ \beta;\ \gamma)$ celles de $\vec{U}$.

Les formules (540; 3) sont les *équations paramétriques* de la droite.

◇ *Exemple. Soit le plan K^2 avec $K = Z/5$. Soit la droite déterminée par le point $A(\dot{2};\ \dot{1})$ et le vecteur $\vec{U}(\dot{1};\ \dot{4})$. Trouver les équations paramétriques de cette droite.*

L'équation vectorielle de la droite est :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + t \cdot \vec{U} \qquad t \in K.$$

En traduisant analytiquement, on a :

$$\begin{cases} x = \dot{2} + t \cdot \dot{1} \\ y = \dot{1} + t \cdot \dot{4} \end{cases} \quad t \in K.$$

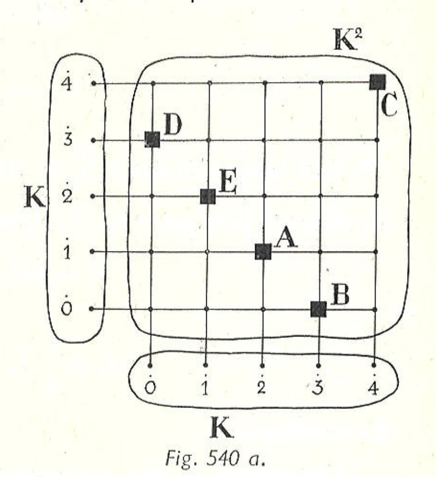


Fig. 540 a.

Ce sont là les équations paramétriques de la droite.
Il est possible ici de préciser les points de la droite.

Si $t = \dot{0}$, on obtient le point $A(\dot{2};\ \dot{1})$
Si $t = \dot{1}$, on obtient le point $B(\dot{3};\ \dot{0})$
Si $t = \dot{2}$, on obtient le point $C(\dot{4};\ \dot{4})$
Si $t = \dot{3}$, on obtient le point $D(\dot{0};\ \dot{3})$
Si $t = \dot{4}$, on obtient le point $E(\dot{1};\ \dot{2})$

Donc :

$$D(A;\ \vec{U}) = \{A;\ B;\ C;\ D;\ E\}.$$

Dès lors, dans le diagramme du plan K^2, on peut marquer les points A, B, C, D, E; c'est la représentation graphique de la droite donnée (fig. 540 *a*).

541. Ensemble des vecteurs directeurs d'une droite.

Un vecteur $\vec{U}$ est un vecteur-directeur de la droite (D) si, quel que soit le point M de (D), il existe un nombre t de K tel que $\overrightarrow{AM} = t \cdot \vec{U}$.

1° *Tout vecteur* $\vec{U_1} = h \cdot \vec{U}$ *est un vecteur-directeur de (D).*

En effet :

$$\overrightarrow{AM} = t \cdot \vec{U}$$

peut s'écrire :

$$\overrightarrow{AM} = \frac{t}{h} \cdot h\vec{U}$$

$$= \frac{t}{h} \cdot \vec{U_1}$$

2° *Tout vecteur-directeur* $\vec{U_1}$ *de (D) peut s'écrire* $\vec{U_1} = h \cdot \vec{U}$.

En effet soit $\vec{U}$ le point de (D) défini par $\overrightarrow{AU} = \vec{U}$. On a donc :

$$\vec{U} = \overrightarrow{AU} = \alpha \cdot \vec{U_1}$$

et

$$\vec{U_1} = \frac{1}{\alpha} \cdot \vec{U} = h \cdot \vec{U}.$$

En conclusion :

L'ensemble Δ des vecteurs-directeurs de la droite $D(A; \vec{U})$ ***est défini par***

$$\Delta = \{ h \cdot \vec{U} / h \in K \}.$$

3° ***Les coordonnées du vecteur-directeur*** $\vec{U}$ ***sont les paramètres directeurs de la droite (D).***

542. Droites parallèles.

La droite (D) est parallèle à la droite (D′) si l'ensemble (Δ) des vecteurs-directeurs de (D) est identique à l'ensemble Δ′ des vecteurs-directeurs de (D′).

Si la droite (D) est parallèle à la droite (D′) on note :

$$D \parallel D'$$

On a alors :

$$D \parallel D' \iff \Delta = \Delta' \qquad (542\,;\,1)$$

Si $\vec{U}$ est un vecteur-directeur de (D) et $\vec{U'}$ un vecteur-directeur de (D′), on a l'équivalence :

$$D \parallel D' \iff (\exists h)\,(h \in K)\ \vec{U'} = h \cdot \vec{U} \qquad (542\,;\,2)$$

543. Théorème d'Euclide.

Soient un point A et une droite (D) de vecteur-directeur $\overrightarrow{U}$.

On considère la droite (D′) d'équation vectorielle $\overrightarrow{AM} = t.\overrightarrow{U}$. (D′) est parallèle à (D) car ces deux droites ont le même ensemble de vecteurs directeurs : $\Delta = \Delta' = \{ h \cdot \overrightarrow{U} \}$.

C'est la seule droite parallèle à (D) et passant par A, car elle est déterminée par A et $\overrightarrow{U}$.

Donc :

Par un point A il passe une et une seule droite (D′) parallèle à une droite donnée (D).

544. Directions de droites.

1° ***La relation de parallélisme est une relation d'équivalence.***

En effet, elle est :

— réflexive : $D \parallel D$
— symétrique : $D \parallel D' \Rightarrow D' \parallel D$
— transitive : $D \parallel D'$ et $D' \parallel D'' \Rightarrow D \parallel D''$

2° Soit une droite (D). Sa classe d'équivalence est constituée par toutes les droites parallèles à (D).

Cette classe d'équivalence s'appelle la direction de la droite (D).

Des droites parallèles appartiennent donc à la même direction; on dit aussi que ces droites ont la même direction.

Par suite :

Un vecteur libre $\overrightarrow{U}$ détermine une direction de droites.

545. Vecteurs liés parallèles.

1° Soit un vecteur lié $\overrightarrow{AB}$. La droite AB est le *support* du vecteur $\overrightarrow{AB}$. La direction de la droite AB est *la direction* de ce vecteur.

2° ***Deux vecteurs dont les supports sont des droites parallèles sont dits vecteurs parallèles, ou colinéaires, ou de même direction.***

Donc :

$$\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{A'B'} \Leftrightarrow (\text{droite } AB) \parallel (\text{droite } A'B') \qquad (545; 1)$$

3° Soient deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ (X; Y; Z) et A′B′ (X′; Y′; Z′) de l'espace K^3

Pour que ces deux vecteurs soient parallèles il faut et il suffit que leurs supports soient parallèles. $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{A'B'}$ étant des vecteurs-directeurs de ces supports la condition de parallélisme est donc (cf. 542; 2) :

$$\overrightarrow{A'B'} = \lambda \cdot \overrightarrow{AB}$$

c'est-à-dire que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{A'B'}$ soient linéairement dépendants; d'où (cf. n° 381) :

$$\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{A'B'} \iff \frac{X'}{X} = \frac{Y'}{Y} = \frac{Z'}{Z} \qquad (545; 2)$$

546. Le plan dans K^3.

1° Soient un point A et deux vecteurs libres $\vec{U}$ et $\vec{V}$ linéairement indépendants (c'est-à-dire non parallèles) d'un espace ponctuel.

L'ensemble des points M satisfaisant à la relation

$$\overrightarrow{AM} = \lambda\vec{U} + \mu \cdot \vec{V},$$

λ et μ étant des éléments quelconques de K, est appelé un plan.

Ce plan (P) est déterminé par le point A et les vecteurs libres $\vec{U}$ et $\vec{V}$.

On note :

$$P = P(A; \vec{U}; \vec{V}) = \{ M/\overrightarrow{AM} = \lambda\vec{U} + \mu\vec{V}; \lambda \in K; \mu \in K \}$$

2° *Trois points A, B et C non alignés déterminent un plan P.*

$$P = \{ M/\overrightarrow{AM} = \lambda \cdot \overrightarrow{AB} + \mu \cdot \overrightarrow{AC} \} \qquad (546; 1)$$

3° *Deux droites (D) et (D') se coupant en A déterminent un plan P.*

4° *Une droite (D) et un point A n'appartenant pas à (D) déterminent un plan.*

5° *Deux droites parallèles distinctes (D) et (D') déterminent un plan.*

547. Equations d'un plan.

1° Soit le plan (P) définie par le point A et les vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$. La relation :

$$\overrightarrow{AM} = \lambda \cdot \vec{U} + \mu \cdot \vec{V} \quad \lambda \in K, \mu \in K \qquad (547; 1)$$

est une *équation vectorielle du plan.*

En ajoutant $\overrightarrow{OA}$ aux deux membres on déduit :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \lambda \cdot \vec{U} + \mu \cdot \vec{V} \quad \lambda \in K, \mu \in K \qquad (547; 2)$$

C'est une *seconde équation vectorielle du plan.*

2° On suppose maintenant que l'espace envisagé est l'espace K^3. En traduisant analytiquement la relation (547; 2) on obtient :

$$\begin{cases} x = x_A + \lambda \cdot \alpha + \mu \cdot \alpha' \\ y = y_A + \lambda \cdot \beta + \mu \cdot \beta' \\ z = z_A + \lambda \cdot \gamma + \mu \cdot \gamma' \end{cases} \qquad (547\,;\,3)$$

si $(x_A; y_A; z_A)$ sont les coordonnées de A, $(\alpha; \beta; \gamma)$ celles de $\vec{U}$, $(\alpha'; \beta'; \gamma')$ celles de $\vec{V}$.

Les formules (547; 3) sont les *équations biparamétriques du plan.*

548. Ensemble des vecteurs-directeurs d'un plan.

Deux vecteurs libres $\vec{U}$ et $\vec{V}$, non parallèles, forment un bivecteur-directeur de (P) si, A étant un point de (P), quel que soit le point M de (P), il existe deux nombres λ et μ tels que $\overrightarrow{AM} = \lambda \cdot \vec{U} + \mu \cdot \vec{V}$.

On pose $\overrightarrow{AU} = \vec{U}$ et $\overrightarrow{AV} = \vec{V}$. L'ensemble des vecteurs $\overrightarrow{AM}$ est donc un espace vectoriel de dimension 2, isomorphe à K^2.

Un bivecteur-directeur est donc une base de cet espace. Par suite :

L'ensemble Π des vecteurs-directeurs du plan $P(A; \vec{U}, \vec{V})$ est défini par $h\vec{U} + k\vec{V}$, h et k étant des éléments quelconques de K.

549. Plans parallèles.

1° *Le plan (P) est parallèle au plan (P′) si l'ensemble Π des vecteurs-directeurs de (P) est identique à l'ensemble Π' des vecteurs-directeurs de (P′).*

Si le plan (P) est parallèle au plan (P′) on note :

$$P \parallel P'$$

Et :

$$P \parallel P' \Leftrightarrow \Pi = \Pi' \qquad (549\,;\,1)$$

2° Soient le point A et un plan P de bivecteur-directeur $\{\vec{U}; \vec{V}\}$.

Le plan $P' = P(A; \vec{U}; \vec{V})$ défini par l'équation :

$$\overrightarrow{AM} = \lambda\vec{U} + \mu\vec{V}$$

est le seul plan passant par A et parallèle à (P).

550. Directions de plans.

1° ***La relation de parallélisme des plans est une relation d'équivalence.***

En effet, elle est :

— *réflexive :* $P \parallel P$
— *symétrique :* $P \parallel P' \Rightarrow P' \parallel P$
— *transitive :* $P \parallel P'$ et $P' \parallel P'' \Rightarrow P \parallel P''$.

2° Soit un plan (P). Sa classe d'équivalence est constituée par tous les plans parallèles à (P).

Cette classe d'équivalence s'appelle la direction du plan (P).

Des plans parallèles appartiennent donc à la même direction; on dit aussi qu'ils ont la même direction.

551. Droite parallèle à un plan.

Une droite (D) est parallèle à un plan (P) si un de ses vecteurs-directeurs est vecteur-directeur de (P).

Autrement dit :

$$(D \parallel P) \Leftrightarrow (\Delta \subset \Pi)$$

ou

$$(D \parallel P) \Leftrightarrow [(\exists D')\,(D' \subset P) : D \parallel D']$$

Cette relation de parallélisme est de nature différente des relations de parallélisme des droites ou des plans; en effet ce n'est pas une relation d'équivalence.

CHAPITRE XLI

ESPACES RÉELS AFFINES

552. Le plan réel R^2.

1° ***Les vecteurs liés $\overrightarrow{OI} = \vec{i}$ et $\overrightarrow{OJ} = \vec{j}$ de coordonnées respectives (1; 0) et (0; 1) constituent le repère canonique du plan R^2 (cf. n° 386).***

Soit le point quelconque A $(x_A; y_A)$; on a (cf. n° 387) :

$$\overrightarrow{OA} = x_A \cdot \vec{i} + y_A \cdot \vec{j} \qquad (552; 1)$$

2° La droite $x'Ox$ d'équation $\overrightarrow{OP} = t \cdot \vec{i}$, $t \in R$, et la droite $y'Oy$ d'équation $\overrightarrow{OP} = t \cdot \vec{j}$, $t \in R$, sont les *axes canoniques du plan.*

Les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont les *vecteurs unitaires* de ces axes.

3° Les droites d'équation

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + t \cdot \vec{i}$$

qui sont parallèles à l'axe $x'Ox$, et les droites d'équation

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + t\vec{j}$$

qui sont parallèles à l'axe $y'Oy$, sont les *droites-coordonnées* du plan.

Fig. 552 a.

4° ***Le diagramme de Venn du plan R^2 est le plan physique sur lequel on a tracé deux axes x'Ox, y'Oy*** (fig. 552 *a*).

Ce diagramme a été choisi pour sa commodité. Les droites se tracent avec une règle; les droites parallèles se tracent avec une règle et une équerre.

553. Changement de repère de même origine.

Les vecteurs liés $\overrightarrow{OU} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{OV} = \vec{v}$, linéairement indépendants, forment un nouveau repère du plan. Les axes X'OX et Y'OY ayant $\overrightarrow{OU}$ et $\overrightarrow{OV}$ pour vecteurs unitaires sont de nouveaux axes du plan (fig. 553 a).

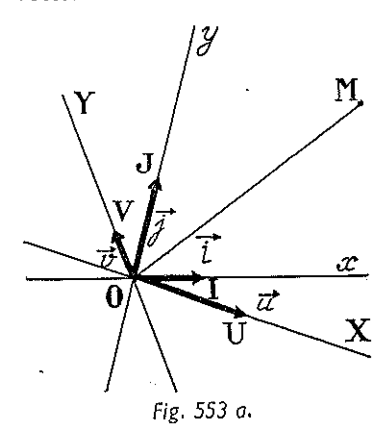


Fig. 553 a.

Un point M a des coordonnées $(x; y)$ par rapport au repère $\{O; \vec{i}; \vec{j}\}$ et a des coordonnées (X; Y) par rapport au repère $\{O; \vec{u}; \vec{v}\}$. Les résultats des n°s 388, 389, 390 sont valables pour l'espace vectoriel des vecteurs liés au point O, c'est-à-dire pour les coordonnées d'un point M; et si on a :

$$\begin{cases} \vec{i} = \xi \cdot \vec{u} + \eta \cdot \vec{v} \\ \vec{j} = \xi' \cdot \vec{u} + \eta' \cdot \vec{v} \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \vec{u} = \alpha \cdot \vec{i} + \beta \cdot \vec{j} \\ \vec{v} = \alpha' \cdot \vec{i} + \beta' \cdot \vec{j} \end{cases}$$

les formules de changement de repère sont (cf. 390; 6 et 390; 5) :

$$\begin{cases} x = \alpha \cdot X + \alpha' \cdot Y \\ y = \beta \cdot X + \beta' \cdot Y \end{cases} \qquad (553;1)$$

et

$$\begin{cases} X = \xi \cdot x + \xi' \cdot y \\ Y = \eta \cdot x + \eta' \cdot y \end{cases} \qquad (553;2)$$

554. Changement de repère équipollent.

Il est aussi possible d'envisager une seconde origine O' du plan, ayant $(x_0; y_0)$ pour coordonnées par rapport au repère $\{O; \vec{i}; \vec{j}\}$ et un repère constitué par les vecteurs liés :

$$\overrightarrow{O'U} = \vec{u} = \vec{i} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{O'V} = \vec{v} = \vec{j}$$

Ce repère $\{O'; \vec{i}; \vec{j}\}$ est dit repère équipollent au repère $\{O; \vec{i}; \vec{j}\}$. Les vecteurs $\overrightarrow{O'U}$ et $\overrightarrow{O'V}$ déterminent des axes X'O'X et Y'O'Y, respectivement équipollents aux axes canoniques (fig. 554 a).

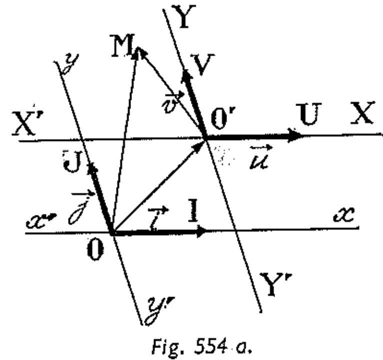


Fig. 554 a.

Un point M a des coordonnées $(x; y)$ par rapport au repère $\{O; \vec{i}; \vec{j}\}$ et a des coordonnées $(X; Y)$ par rapport au repère $\{O'; \vec{i}; \vec{j}\}$. On a :

$$\overrightarrow{OO'} = x_0 \cdot \vec{i} + y_0 \cdot \vec{j}$$
$$\overrightarrow{OM} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j}$$
$$\overrightarrow{O'M} = X \cdot \vec{i} + Y \cdot \vec{j}.$$

Par suite :
$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM} &= \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}\\ &= x_0 \cdot \vec{i} + y_0 \cdot \vec{j} + X \cdot \vec{i} + Y \cdot \vec{j}\\ &= (x_0 + X)\vec{i} + (y_0 + Y)\vec{j}\end{aligned}$$

D'où :
$$\begin{cases}\mathbf{x = x_0 + X}\\ \mathbf{y = y_0 + Y}\end{cases} \qquad (554; 1)$$

Ce sont les formules de changement de repère équipollent.

555. Equations paramétriques de la droite.

Soit la droite (D) déterminée par le point A et le vecteur-directeur U (fig. 555 *a*; *b*; *c*). Son équation vectorielle est (cf. n° 540) :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + t \cdot \vec{U} \qquad (555; 1)$$

Cette équation vectorielle se traduit par les deux équations paramétriques :

$$\begin{cases} x = x_A + \alpha \cdot t\\ y = y_A + \beta \cdot t\end{cases} \qquad (555; 2)$$

Si $\vec{U}$ est parallèle à $\vec{i}$, $\beta = 0$ et les équations sont :

$$\begin{cases} x = x_A + \alpha t\\ y = y_A\end{cases} \qquad (555; 3)$$

ou

$$(\forall x) \quad y = y_A \qquad (555; 4)$$

Fig. 555 a.

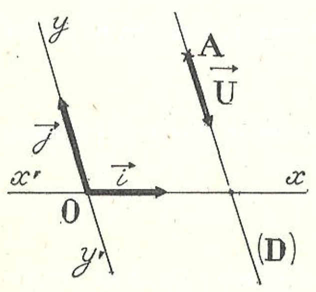


Fig. 555 b.

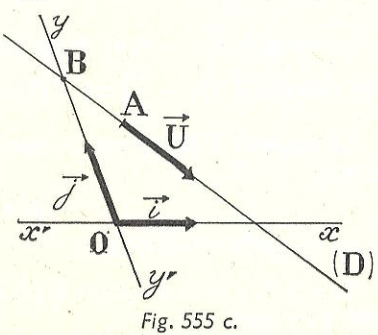


Fig. 555 c.

Si $\vec{U}$ est parallèle à $\vec{j}$, $\alpha = 0$ et les équations sont :

$$\begin{cases} x = x_A \\ y = y_A + \beta \cdot t \end{cases} \qquad (555;5)$$

ou

$$(\forall y) \quad x = x_A \qquad (555;6)$$

556. Equation implicite de la droite.

La combinaison linéaire $\beta x - \alpha y$ des formules (555; 2) donne :

$$\beta x - \alpha y = \beta(x_A + \alpha \cdot t) - \alpha(y_A + \beta t)$$
$$= \beta \cdot x_A - \alpha \cdot y_A.$$

On écrit souvent cette relation liant les coordonnées d'un point quelconque de (D) :

$$\mathbf{ux + vy + r = 0} \qquad (556;1)$$

en posant $u = \beta$, $v = -\alpha$ et $r = \alpha \cdot y_A - \beta x_A$. C'est *l'équation implicite* de (D). Les coordonnées du vecteur-directeur $\vec{U}$ sont $(-v; u)$.

557. Equation explicite de la droite.

Si v n'est pas nul, l'équation implicite (556; 1) s'écrit :

$$y = -\frac{u}{v} \cdot x - \frac{r}{v}$$

ou

$$\mathbf{y = ax + b} \qquad (557;1)$$

avec $a = -\frac{u}{v}$ et $b = -\frac{r}{v}$. C'est l'*équation explicite* de (D).

Le vecteur $\vec{U}\,(-v; u)$ étant un vecteur-directeur, il en est de même du vecteur $\vec{T}\left(1; -\frac{u}{v}\right)$ ou $\vec{T}\,(1; a)$.

Le vecteur $\vec{T}\,(1; a)$ est un vecteur-directeur de la droite (D) d'équation :

$$\mathbf{y = ax + b}$$

a *est le coefficient-directeur.*

Si $x = 0$, $y = b$. Le point B $(0; b)$ appartient à l'axe $y'Oy$. b *est l'ordonnée à l'origine.*

558. Coefficient directeur d'une droite déterminée par deux points.

On donne la droite (D) déterminée par les points A $(x_A; y_A)$ et B $(x_B; y_B)$.

Le vecteur AB $(X = x_B - x_A; Y = y_B - y_A)$ est un vecteur-directeur de cette droite (D). Il en est de même du vecteur $\vec{T}$ $\left(1; \frac{Y}{X} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}\right)$. Donc :

Le coefficient directeur de la droite AB est $\mathbf{a} = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.

559. Recherche de l'équation d'une droite.

1° *On donne le coefficient directeur* a *et l'ordonnée à l'origine* b.

L'équation est :

$$\mathbf{y = ax + b} \qquad (559; 1)$$

2° *On donne le vecteur-directeur* $\vec{U}$ $(\alpha; \beta)$ *et le point A* $(x_A; y_A)$.

On écrit que :

$$\overrightarrow{AM} \parallel \vec{U}$$

c'est-à-dire :

$$\frac{\mathbf{x - x_A}}{\alpha} = \frac{\mathbf{y - y_A}}{\beta} \qquad (559; 2)$$

3° *On donne le coefficient directeur* a *et le point A* $(x_A; y_A)$.

$\vec{T}$ $(1; a)$ est un vecteur-directeur. La formule (559; 2) donne alors :

$$\mathbf{y - y_A = a(x - x_A)} \qquad (559; 3)$$

4° *La droite est déterminée par les points A et B.*

On calcule a (cf. n° 558), et on utilise ensuite la formule (559; 3).

5° *La droite est déterminée par les points A* (a ; *0*) *et B* (*0* ; b).

A et B sont les points d'intersection de la droite avec les axes, ou les traces de la droite sur les axes.

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(-a; b)$. L'équation de la droite est donc :

$$\frac{x - a}{-a} = \frac{y - 0}{b}$$

c'est-à-dire :

$$\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{a}} + \frac{\mathbf{y}}{\mathbf{b}} = 1 \qquad (559; 4)$$

560. Condition de parallélisme de deux droites.

On sait que (cf. nos 542 et 545) :

$$D \parallel D' \iff \vec{U} \parallel \vec{U'} \qquad (560;1)$$

1° Si les équations des droites sont :

$$(D) \quad y = ax + b$$
$$(D') \quad y = a'x + b'$$

on a:

$$\vec{U}(1\,;\,a) \quad \text{et} \quad \vec{U'}(1\,;a').$$

D'où :

$$\boldsymbol{D \parallel D' \iff a = a'} \qquad (560;2)$$

2° Si les équations des droites sont :

$$(D) \quad ux + vy + r = 0$$
$$(D') \quad u'x + v'y + r' = 0$$

on a :

$$\vec{U}(-v\,;\,u) \quad \text{et} \quad \vec{U'}(-v'\,;\,u').$$

D'où :

$$\boldsymbol{D \parallel D' \iff \frac{u'}{u} = \frac{v'}{v}} \qquad (560;3)$$

561. Condition d'alignement de trois points.

1° Soient trois points A, B et C. Pour qu'ils soient alignés il faut et il suffit que les droites AB et AC aient le même coefficient directeur.

D'où la condition :

$$\boldsymbol{\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A}} \qquad (561;1)$$

2° Ce résultat s'écrit :

$$(y_C - y_A)(x_B - x_A) = (y_B - y_A)(x_C - x_A)$$

ou

$$-x_A y_C + x_B y_C - x_B y_A + x_A y_B - x_C y_B + x_C y_A = 0.$$

On s'aperçoit que le premier membre n'est pas autre chose que le développement du déterminant :

$$\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}$$

Une condition d'alignement des points A, B, C est donc :

$$\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (561\,;2)$$

3° En exprimant que le point M $(x;\ y)$ est aligné avec les points A et B, on obtient l'équation de la droite AB sous la forme :

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (561\,;3)$$

562. L'espace réel R^3.

1° ***Les vecteurs liés $\overrightarrow{OI} = \vec{i}$, $\overrightarrow{OJ} = \vec{j}$, $\overrightarrow{OK} = \vec{k}$ de coordonnées respectives (1; 0; 0), (0; 1; 0) et (0; 0; 1) constituent le repère canonique de l'espace R^3 (cf. n° 396).***

Soit le point quelconque

$A\,(x_A;\ y_A;\ z_A)$;

on a (cf. n° 397) :

$$\overrightarrow{OA} = x_A \cdot \vec{i} + y_A \cdot \vec{j} + z_A \cdot \vec{k} \qquad (562\,;1)$$

2° Les *axes canoniques* ont pour équations :

$x'Ox$: $\overrightarrow{OP} = t \cdot \vec{i}$ $\quad t \in R$

$y'Oy$: $\overrightarrow{OP} = t \cdot \vec{j}$ $\quad t \in R$

$z'Oz$: $\overrightarrow{OP} = t \cdot \vec{k}$ $\quad t \in R$

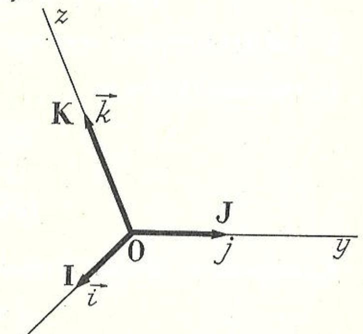


Fig. 562 a.

3° Les droites parallèles aux axes sont des *droites-coordonnées*.

Les plans parallèles aux plans (Ox; Oy); (Oy; Oz); (Oz; Ox) sont des *plans-coordonnées*.

4° Le diagramme de Venn de l'espace R^3 est l'espace physique avec trois axes, $x'Ox$, $y'Oy$, $z'Oz$ (fig. 562 *a*).

563. Changement de repère.

1° Les deux repères ont la même origine.

Le nouveau repère est (cf. n° 398) :

$$\begin{cases} \overrightarrow{OU} = \vec{u} = \alpha \cdot \vec{i} + \beta \cdot \vec{j} + \gamma \cdot \vec{k} \\ \overrightarrow{OV} = \vec{v} = \alpha' \cdot \vec{i} + \beta' \cdot \vec{j} + \gamma' \cdot \vec{k} \\ \overrightarrow{OW} = \vec{w} = \alpha'' \cdot \vec{i} + \beta'' \cdot \vec{j} + \gamma'' \cdot \vec{k} \end{cases}$$

avec (cf. formule 398; 3) :

$$\begin{cases} \vec{i} = \xi \cdot \vec{u} + \eta \cdot \vec{v} + \zeta \cdot \vec{w} \\ \vec{j} = \xi' \cdot \vec{u} + \eta' \cdot \vec{v} + \zeta' \cdot \vec{w} \\ \vec{k} = \xi'' \cdot \vec{u} + \eta'' \cdot \vec{v} + \zeta'' \cdot \vec{w} \end{cases}$$

Les formules de changement de repère sont celles des formules (400; 6) et (400; 5) :

$$\begin{cases} \mathbf{x} = \alpha \cdot \boldsymbol{X} + \alpha' \cdot \mathbf{Y} + \alpha'' \cdot \boldsymbol{Z} \\ \mathbf{y} = \beta \cdot \boldsymbol{X} + \beta' \cdot \mathbf{Y} + \beta'' \cdot \boldsymbol{Z} \\ \mathbf{z} = \gamma \cdot \boldsymbol{X} + \gamma' \cdot \mathbf{Y} + \gamma'' \cdot \boldsymbol{Z} \end{cases} \qquad (563;1)$$

et

$$\begin{cases} \boldsymbol{X} = \xi \cdot \mathbf{x} + \xi' \cdot \mathbf{y} + \xi'' \cdot \mathbf{z} \\ \mathbf{Y} = \eta \cdot \mathbf{x} + \eta' \cdot \mathbf{y} + \eta'' \cdot \mathbf{z} \\ \boldsymbol{Z} = \zeta \cdot \mathbf{x} + \zeta' \cdot \mathbf{y} + \zeta'' \cdot \mathbf{z} \end{cases} \qquad (563;2)$$

2° Les deux repères sont équipollents.

Le nouveau repère est :

$$\overrightarrow{O'U} = \vec{u} = \vec{i}$$
$$\overrightarrow{O'V} = \vec{v} = \vec{j}$$
$$\overrightarrow{O'W} = \vec{w} = \vec{k}.$$

Comme au n° 554, les formules sont

$$\begin{cases} \mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \boldsymbol{X} \\ \mathbf{y} = \mathbf{y}_0 + \mathbf{Y} \\ \mathbf{z} = \mathbf{z}_0 + \boldsymbol{Z} \end{cases} \qquad (563;3)$$

564. Equation d'un plan de R^3.

Le plan déterminé par le point A (x_A; y_A; z_A) et le bivecteur-directeur $\{\vec{U}; \vec{V}\}$ a pour équation vectorielle :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \lambda \cdot \vec{U} + \mu \cdot \vec{V} \qquad (564;1)$$

qui se traduit par les trois équations biparamétriques :

$$\begin{cases} \mathbf{x} = \mathbf{x}_A + \lambda \cdot \alpha + \mu . \alpha' \\ \mathbf{y} = \mathbf{y}_A + \lambda \cdot \beta + \mu \cdot \beta' \\ \mathbf{z} = \mathbf{z}_A + \lambda \cdot \gamma + \mu \cdot \gamma' \end{cases} \qquad (564;2)$$

De ces équations on peut déduire l'équation implicite du plan :

$$\mathbf{ux} + \mathbf{vy} + \mathbf{wz} + \mathbf{r} = 0 \qquad (564;3)$$

565. Equations d'une droite de R^3.

La droite déterminée par le point A et le vecteur-directeur $\vec{U}$ a pour équation vectorielle :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + t \cdot \vec{U} \qquad (565;1)$$

qui se traduit par les trois équations paramétriques :

$$\begin{cases} x = x_A + t \cdot \alpha \\ y = y_A + t \cdot \beta \\ z = z_A + t \cdot \gamma \end{cases} \qquad (565;2)$$

Ces équations peuvent s'écrire, si $\gamma \neq 0$,

$$\begin{cases} x = az + p \\ y = bz + q \end{cases} \qquad (565;3)$$

566. Demi-droite dans un espace réel. Segment.

Le corps R étant ordonné, on peut définir les notions de demi-droite et de segment.

1º Soient un point A et un vecteur-libre $\vec{U}$.

On appelle demi-droite l'ensemble des points M définis par $\overrightarrow{AM} = t \cdot \vec{U}$, *t* étant un réel positif.

$$(Au) = \{ M / \overrightarrow{AM} = t \cdot \vec{U},\ t \in R_+ \} \qquad (566;1)$$

A est l'*origine* de la demi-droite A*u*.

2º Soient deux points A et B.

On appelle segment AB l'ensemble des points M définis par $\overrightarrow{AM} = t.\overrightarrow{AB}$, *t* étant un réel compris entre 0 et 1.

$$(AB) = \{ M / \overrightarrow{AM} = t \cdot \overrightarrow{AB};\ 0 \leqslant t \leqslant 1 \} \qquad (566;2)$$

3º Le milieu du segment $\overrightarrow{AB}$ est le point I tel que $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

On a alors :

$$\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = 0$$

et

$$\overrightarrow{OI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) \qquad (566;3)$$

567. Angle.

Soient deux demi-droites, A*u* et A*v*, ayant la même origine A (fig. 567 *a*).

Le couple (Au; Av) de ces deux demi-droites est un angle.

A est *l'origine* de l'angle; A*u* est le *premier côté*, ou côté-origine; A*v* est le *second côté* ou côté-extrémité.

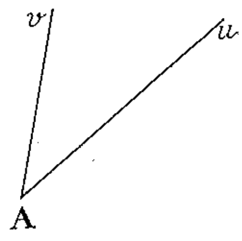


Fig. 567 a.

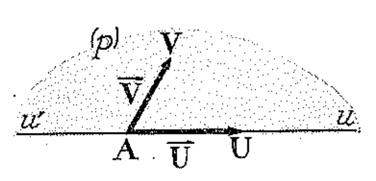


Fig. 568 a.

568. Demi-plan.

Soit la droite *u'*A*u* d'équation :

$$\overrightarrow{AM} = t \cdot \overrightarrow{AU}$$
$$= t \cdot \vec{U},$$

$\overrightarrow{AU} = \vec{U}$ étant un vecteur-directeur de cette droite (fig. 568 *a*).

On considère un vecteur $\overrightarrow{AV} = \vec{V}$, non parallèle à $\vec{U}$.

On appelle demi-plan l'ensemble des points M définis par $\overrightarrow{AM} = t \cdot \vec{U} + \mu \cdot \vec{V}$, ***t étant un nombre réel quelconque, et*** μ ***un nombre réel positif.***

$$(p) = \left\{ M / \overrightarrow{AM} = t \cdot \vec{U} + \mu \cdot \vec{V};\ t \in R;\ \mu \in R_+ \right\}$$

La droite *u'*A*u* est la *frontière* du demi-plan (*p*).

569. Secteurs angulaires.

Soient deux demi-plans (*p*) et (*q*) ayant la même origine A. La droite *u'*A*u* est la frontière de (*p*), et la droite *v'*A*v* est la frontière de (*q*) (fig. 569 *a* et *b*).

L'intersection* (p) ∩ (q) *de ces demi-plans est un secteur angulaire rentrant (fig. 569 *a*).

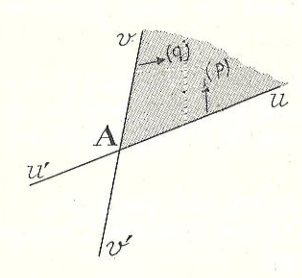


Fig. 569 a.

Fig. 569 b.

La réunion* (p) ∪ (q) *de ces demi-plans est un secteur angulaire sortant (fig. 569 *b*).

Les demi-droites A*u* et A*v* sont les *côtés* du secteur angulaire.

570. Ensembles de droites parallèles.

1° Soit dans le plan une direction de droites, déterminée par la droite Δ (fig. 570 *a*).

***Une droite quelconque de cette direction dépend d'un paramètre* λ.**

En effet si $x'Ox$ est un axe rencontrant Δ en O, une droite (G) de cette direction coupe $x'Ox$ en un point P tel que $\overline{OP} = \lambda$. Il est évident que λ détermine un point P unique donc une droite (G) unique.

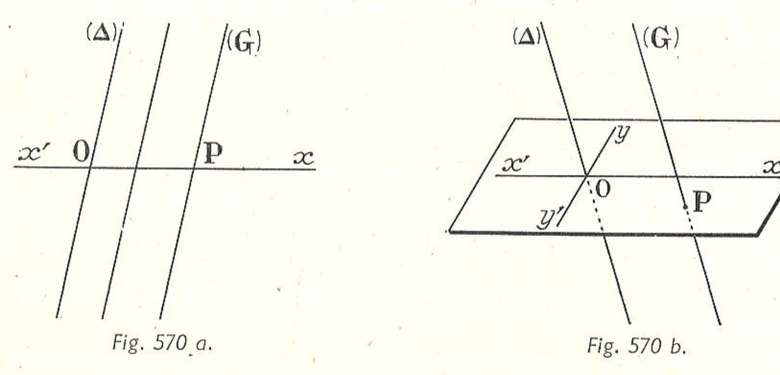


Fig. 570 a.

Fig. 570 b.

Généralement on utilise dans le plan des ensembles de droites parallèles sous le nom de *faisceaux;* souvent ce sont des *faisceaux de quatre droites.*

2° Soit dans l'espace une direction de droites, déterminée par la droite Δ (fig. 570 *b*).

Une droite de cette direction dépend de deux paramètres **λ et μ.**

En effet si un plan (Q) coupe Δ en O, et si $x'Ox$ et $y'Oy$ sont deux axes de (Q), une droite (G) de cette direction coupe (Q) en P, dont les coordonnées sont λ et μ, Il est évident qu'un couple (λ; μ) détermine un point P unique, donc une droite G unique.

Les ensembles de droites parallèles de l'espace sont des *gerbes*.

Généralement on impose à λ et μ une condition simple[1]. L'ensemble est alors une *surface cylindrique ou prismatique*.

571. Ensembles de droites concourantes.

1° Soit dans le plan un point S. On envisage l'ensemble des droites passant par S (fig. 571 *a*).

Une droite quelconque de cet ensemble dépend d'un paramètre **λ.**

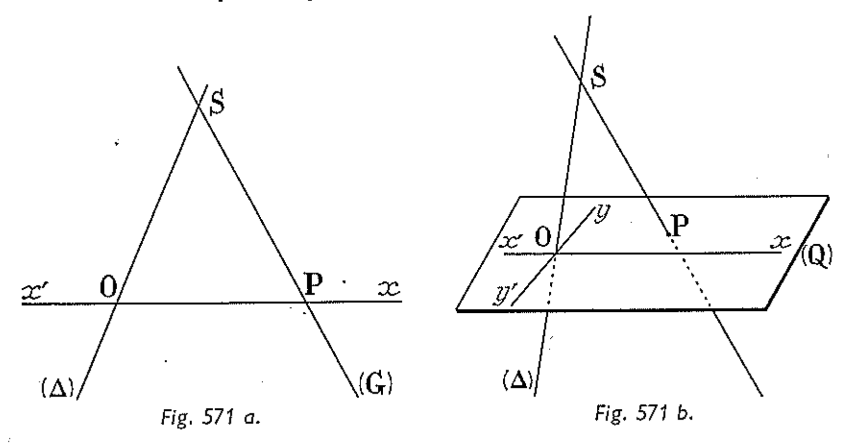


Fig. 571 *a*. Fig. 571 *b*.

Généralement on utilise des ensembles de droites concourantes en S sous le nom de *faisceaux;* souvent ce sont des *faisceaux de quatre droites*.

2° Soit dans l'espace l'ensemble des droites passant par un point S (fig. 571 *b*).

Une droite quelconque de cet ensemble dépend de deux paramètres **λ et μ.**

Généralement on impose à λ et μ une condition simple[1]. L'ensemble est alors une *surface conique ou pyramidale*.

---

(1) Généralement $\varphi(\lambda;\mu) = 0$, ou (G) reste tangente à une surface.

CHAPITRE XLII

ESPACES RÉELS MÉTRIQUES

572. Norme euclidienne d'un vecteur lié.

Soit dans l'espace R^n, rapporté à son repère canonique ($n = 1; 2; 3$) un vecteur lié AB. Il définit un vecteur libre (cf. nos 525 et 526) :

$$\overrightarrow{AB} = \vec{V}$$

On appelle norme euclidienne du vecteur $\overrightarrow{AB}$ la norme euclidienne du vecteur libre $\vec{V}$ (cf. n° 410).

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \|\vec{V}\| \qquad (572; 1)$$

Par exemple dans R^3, si les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont (X, Y, Z), on a :

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} \qquad (572; 2)$$

573. Produit scalaire de deux vecteurs liés.

Soient deux vecteurs liés $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$. Ils définissent deux vecteurs libres :

$$\overrightarrow{AB} = \vec{U} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{CD} = \vec{V}$$

On appelle produit scalaire euclidien du vecteur $\overrightarrow{AB}$ et du vecteur $\overrightarrow{CD}$ le produit scalaire euclidien du vecteur $\vec{U}$ et du vecteur $\vec{V}$ (cf. n° 407).

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \vec{U} \cdot \vec{V} \qquad (573; 1)$$

Par exemple dans R^3 si les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont (X; Y; Z) et (X'; Y'; Z'), on a :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = XX' + YY' + ZZ' \qquad (573; 2)$$

574. Distance euclidienne de deux points.

1° Soient deux points A et B de l'espace R^n. A ces deux points A et B on peut associer le vecteur lié $\overrightarrow{AB}$.

On appelle distance euclidienne du point A au point B, le nombre positif $\| AB \|$ (cf. nº 510).

On note :

$$d(A; B) = \|\overrightarrow{AB}\| \qquad (575; 1)$$

Dans l'espace R^3, on a donc :

$$d(A; B) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2} \qquad (574; 2)$$

2° On a bien défini une distance (cf. nº 510). En effet :

$\boxed{M_1}$ $(\forall A)(\forall B)$ $\quad$ **$d(A; B) = 0 \Leftrightarrow A = B$**

car :

$$d(A; B) = 0 \Leftrightarrow \|\overrightarrow{AB}\| = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = 0 \Leftrightarrow A = B.$$

$\boxed{M_2}$ $(\forall A)(\forall B)$ $\quad$ **$d(A; B) = d(B; A)$**

car :

$$d(A; B) = \|\overrightarrow{AB}\|$$

et

$$d(B;A) = \|\overrightarrow{BA}\| = \|\overrightarrow{AB}\|.$$

$\boxed{M_3}$ $(\forall A)(\forall B)(\forall C)$ $\quad$ **$d(A; B) \leqslant d(A; C) + d(C; B)$**

car on a :

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB};$$

d'où :

$$\|\overrightarrow{AB}\| \leqslant \|\overrightarrow{AC}\| + \|\overrightarrow{CB}\|$$

ou

$$d(A; B) \leqslant d(A; C) + d(C;B).$$

575. Longueur d'un segment.

1° Soit un segment AB.

On appelle longueur du segment AB la distance des points A et B.

On note :

$$long\ (AB) = d(A; B) = \|\overrightarrow{AB}\| \qquad (575; 1)$$

Au lieu de noter long (AB) on note souvent, par abus d'écriture :

$$\text{long}\,(AB) = AB \qquad (575; 2)$$

2° ***Deux segments AB et CD sont dits isométriques si leurs longueurs sont égales*** (1).

$$AB = CD \Leftrightarrow \text{long}\,(AB) = \text{long}\,(CD) \qquad (575;\,3)$$

Cette relation d'isométrie des segments est manifestement une *relation d'équivalence*.

576. Orthogonalité.

1° ***Deux vecteurs liés, non nuls, sont orthogonaux si leur produit scalaire est nul*** (fig. 576 *a*).

$$\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CD} \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0 \qquad (576;\,1)$$

2° ***Deux droites sont orthogonales si leurs vecteurs-directeurs sont orthogonaux.***

Soient (D) et (D′) de vecteurs-directeurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$, on a :

$$D \perp D' \quad \Leftrightarrow \quad \vec{U} \cdot \vec{V} = 0 \quad (576;\,2)$$

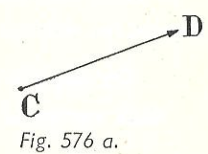


Fig. 576 a.

3° ***Une droite est orthogonale à un plan si ses vecteurs-directeurs sont orthogonaux aux vecteurs-directeurs du plan.***

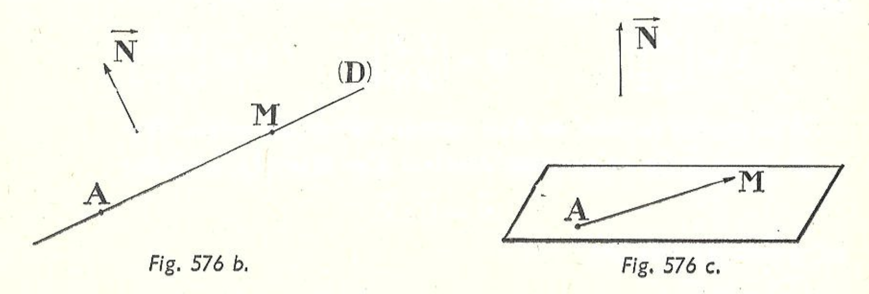


Fig. 576 b. *Fig. 576 c.*

Soient (D) de vecteur directeur $\vec{U}$, et (P) de bivecteur-directeur $(\vec{V};\vec{W})$:

$$D \perp P \quad \Leftrightarrow \quad (\vec{U} \cdot \vec{V} = 0 \quad \text{et} \quad \vec{U} \cdot \vec{W} = 0). \qquad (576;\,3)$$

(1) On dit aussi que les segments AB et CD sont égaux, ou congrus.

4° *Dans le plan R^2, on considère le point A et un vecteur $\vec{N}$. La droite (D) passant par A et orthogonale à $\vec{N}$, a pour équation vectorielle (fig. 576 b) :*

$$\vec{N} \cdot \overrightarrow{AM} = 0 \qquad (576;\ 4)$$

5° *Dans l'espace R^3, on considère le point A et un vecteur $\vec{N}$. Le plan (P) passant par A et orthogonal à $\vec{N}$, a pour équation vectorielle (fig. 576 c) :*

$$\vec{N} \cdot \overrightarrow{AM} = 0 \qquad (576;\ 5)$$

6° *Dans l'espace R^3, on considère le point A et un plan (P). Tout vecteur $\vec{N}$ normal à (P) peut servir de vecteur-directeur à la droite (D) passant par A et orthogonale à (P).*

577. Produit vectoriel de deux vecteurs liés de l'espace R^3.

1° Dans l'espace R^3, on considère les vecteurs liés $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$. On leur associe les vecteurs libres $\vec{U}$ et $\vec{V}$.

On appelle produit vectoriel des vecteurs liés $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ le produit vectoriel des vecteurs libres $\vec{U}$ et $\vec{V}$ associés à ces vecteurs.

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{CD} = \vec{U} \wedge \vec{V}$$

Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ont pour coordonnées (X; Y; Z) et (X'; Y'; Z'), les coordonnées de AB ∧ CD sont :

$$L = \begin{vmatrix} Y & Y' \\ Z & Z' \end{vmatrix} \qquad M = \begin{vmatrix} Z & Z' \\ X & X' \end{vmatrix} \qquad N = \begin{vmatrix} X & X' \\ Y & Y' \end{vmatrix}$$

2° *Le produit vectoriel de deux vecteurs liés est un vecteur libre.*

3° *Si $(\vec{U}; \vec{V})$ est un bivecteur-directeur d'un plan (P), le vecteur*

$$\vec{N} = \vec{U} \wedge \vec{V}$$

est normal au plan (P).

578. Produit mixte de trois vecteurs de l'espace R^3.

Dans l'espace euclidien R^3, on considère trois vecteurs liés $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{EF}$, et les vecteurs libres associés $\vec{U}$, $\vec{V}$, $\vec{W}$.

On appelle produit mixte des trois vecteurs liés $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{EF}$, le produit mixte des trois vecteurs libres associés.

$$\left(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{CD}\right) \cdot \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AB} \cdot \left(\overrightarrow{CD} \wedge \overrightarrow{EF}\right) = \text{Det}\left(\vec{U};\ \vec{V};\ \vec{W}\right).$$

579. Repères orthonormés.

1° Les vecteurs liés $\overrightarrow{OI} = \vec{i}$, $\overrightarrow{OJ} = \vec{j}$, $\overrightarrow{OK} = \vec{k}$ avec $i\ (1; 0; 0)$, $\vec{j}\ (0; 1; 0)$, $\vec{k}\ (0; 0; 1)$ constituent le repère orthonormé canonique de l'espace euclidien R^3 (fig. 579 *a*).

2° De même les vecteurs $\overrightarrow{OI} = \vec{i}$, $\overrightarrow{OJ} = \vec{j}$, avec $\vec{i}\ (1; 0)$, $\vec{j}\ (0; 1)$, constituent le repère orthonormé canonique de l'espace euclidien R^2 (fig. 579 *b*).

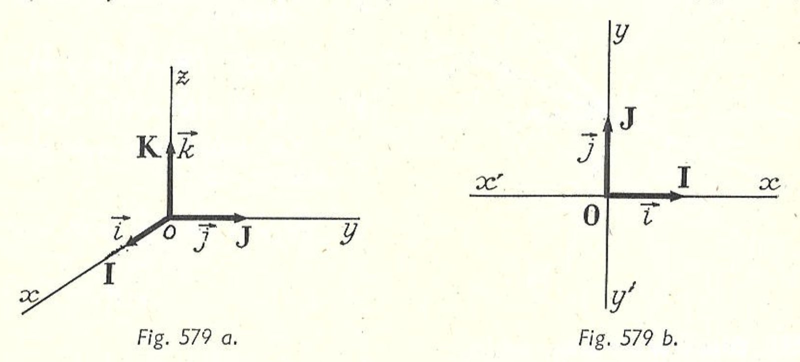


Fig. 579 a.

Fig. 579 b.

3° Les vecteurs liés $\overrightarrow{\Omega U} = \vec{u}$, $\overrightarrow{\Omega V} = \vec{v}$, $\overrightarrow{\Omega W} = w$, les vecteurs libres $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ formant une base orthonormée de l'espace vectoriel des vecteurs libres constituent un repère orthonormé de l'espace euclidien R^3.

4° *Les notions de distance, de produit scalaire, de produit vectoriel, de norme sont intrinsèques; les calculs correspondants peuvent se faire dans un repère orthonormé quelconque.*

580. Repère normé.

1° Deux vecteurs $\overrightarrow{\Omega U} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{\Omega V} = \vec{v}$, avec $\|\vec{u}\| = 1$, $\|\vec{v}\| = 1$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ linéairement indépendants, constituent un *repère normé de l'espace euclidien* R^2 (fig. 580 *a*).

2° Trois vecteurs $\overrightarrow{\Omega U} = \vec{u}$, $\overrightarrow{\Omega V} = v$, $\overrightarrow{\Omega W} = \vec{w}$, avec $\|\vec{u}\| = 1$, $\|\vec{v}\| = 1$, $\|\vec{w}\| = 1$, $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ étant linéairement indépendants, constituent un *repère normé de l'espace euclidien* R^3.

3° ***Si un repère est normé, sans être orthonormé, on ne peut pas utiliser les formules donnant une norme, un produit scalaire, une distance ou une longueur.***

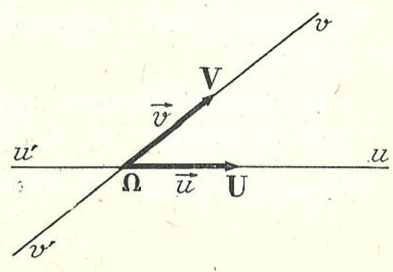


Fig. 580 a.

581. Bissectrices de deux droites.

Soient deux droites (D) et (D′) se coupant en I; on considère les vecteurs unitaires $\vec{u}$ et $\vec{v}$, vecteurs-directeurs de (D) et (D′) (fig. 581 *a*).

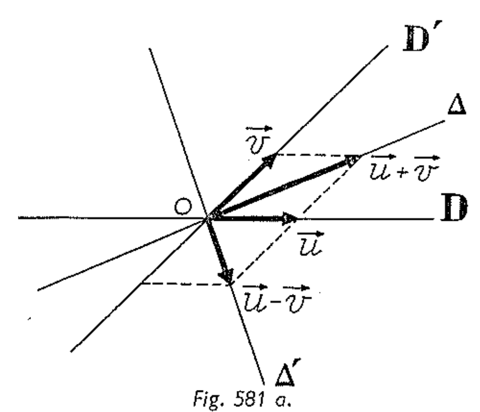


Fig. 581 a.

On appelle bissectrices de (D; D′) les droites (Δ) et (Δ′) ayant pour équations :

$$(\Delta) \quad \overrightarrow{IM} = t(\vec{u} + \vec{v})$$

$$(\Delta') \quad \overrightarrow{IM} = t(\vec{u} - \vec{v})$$

Ces bissectrices sont orthogonales, car :

$$(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$$
$$= 1 - 1$$
$$= 0$$

582. Bissectrice d'un angle.

Soit un angle (I*x*; I*y*). Sur les demi-droites I*x* et I*y* on considère les points U et V tels que $\overrightarrow{\Omega U} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{\Omega V} = \vec{v}$ soient des vecteurs unitaires (fig. 582 *a*).

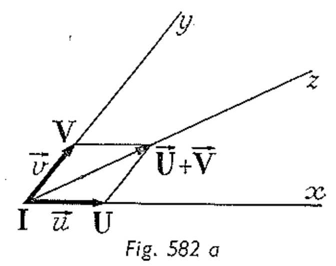


Fig. 582 a

On appelle bissectrice de l'angle (Ix; Iy) la demi-droite Iz ayant pour équation :

$$\overrightarrow{IM} = t(\vec{u} + \vec{v}) \qquad t \in R_+$$

583. Cosinus et sinus d'un angle.

Soit un angle (I*x*; I*y*).

Sur les demi-droites I*x* et I*y*, on considère les points A et B avec $\overrightarrow{IA} = \vec{U}$ et $\overrightarrow{IB} = \vec{V}$.

On appelle cosinus et sinus de l'angle (Ix; Iy) le cosinus et le sinus du bivecteur ($\vec{U}$; $\vec{V}$) (cf. 420; 422; 429).

En posant (I*x*; I*y*) = α, on a donc :

$$\cos \alpha = \cos(\vec{U}; \vec{V})$$

$$\sin \alpha = \sin(\vec{U}; \vec{V})$$

584. Produit scalaire de deux vecteurs unitaires.

Soient deux vecteurs unitaires $\vec{u}$ et $\vec{v}$: $\|\vec{u}\| = 1$, $\|\vec{v}\| = 1$.
La formule (420; 1) donne :

$$\cos(\vec{u}\,;\vec{v}) = \vec{u}\cdot\vec{v} \qquad (584;1)$$

D'où l'énoncé :

Le produit scalaire de deux vecteurs unitaires $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est égal au cosinus du bivecteur $(\vec{u};\ \vec{v})$.

585. Produit scalaire de deux vecteurs parallèles à des axes.

Soient deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ respectivement parallèles aux axes $u'Ou$ et $v'Ov$ de vecteurs unitaires $\vec{u}$ et $\vec{v}$ (fig. 585 *a*).

On note :

$$\text{angle}\,(Ou;\,Ov) = \theta$$

et on a :

$$\overrightarrow{AB} = \overline{AB}\cdot\vec{u} \qquad \overrightarrow{CD} = \overline{CD}\cdot\vec{v}$$

D'où :

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} = \left(\overline{AB}\cdot\vec{u}\right)\left(\overline{CD}\cdot\vec{v}\right) = \overline{AB}\cdot\overline{CD}\cdot\left(\vec{u}\cdot\vec{v}\right)$$

et

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} = \overline{AB}\cdot\overline{CD}\cdot\cos\theta \qquad (585;1)$$

Fig. 585 a.

Le produit scalaire de deux vecteurs parallèles à des axes est égal au produit des mesures algébriques des vecteurs et du cosinus de l'angle des deux axes.

586. Produit scalaire de deux vecteurs.

Soient deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$. La formule (420; 1) s'écrit :

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} = \|\overrightarrow{AB}\|\cdot\|\overrightarrow{CD}\|\cdot\cos(\overrightarrow{AB};\,\overrightarrow{CD})$$

Le produit scalaire de deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ est égal au produit des normes de ces vecteurs et du cosinus du bivecteur $(\overrightarrow{AB};\ \overrightarrow{CD})$.

587. Déterminant de deux vecteurs unitaires du plan euclidien R^2.

Le plan euclidien R^2 est rapporté au repère orthonormé canonique $\{0; \vec{i}; \vec{j}\}$.

Soient deux vecteurs unitaires $\vec{u}$ et $\vec{v}$: $\|\vec{u}\| = 1$, $\|\vec{v}\| = 1$.
La formule (422; 1) donne :

$$\sin(\vec{u}; \vec{v}) = \text{Det}(\vec{u}; \vec{v})$$

D'où l'énoncé :

Le déterminant de deux vecteurs unitaires $\vec{u}$ et $\vec{v}$ du plan euclidien R^2 est égal au sinus du bivecteur $(\vec{u}; \vec{v})$.

588. Déterminant de deux vecteurs parallèles à des axes dans le plan euclidien R^2.

Le plan euclidien R^2 est rapporté au repère orthonormé canonique $\{0; \vec{i}; \vec{j}\}$.

Soient deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ respectivement parallèles aux axes $u'Ou$ et $v'Ov$ de vecteurs unitaires $\vec{u}$ et $\vec{v}$, dans le plan euclidien R^2 (fig. 585 *a*).

On note :

$$\text{angle}(Ou; Ov) = \theta$$

et on a :

$$\overrightarrow{AB} = \overline{AB} \cdot \vec{u} \qquad \overrightarrow{CD} = \overline{CD} \cdot \vec{v}$$

D'où :

$$\text{Det}(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{CD}) = \text{Det}(\overline{AB}\,\vec{u}; \overline{CD}\,\vec{v})$$
$$= \overline{AB} \cdot \overline{CD} \cdot \text{Det}(\vec{u}; \vec{v})$$

et

$$\text{Det}(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{CD}) = \overline{AB} \cdot \overline{CD} \sin\theta \qquad (588; 1)$$

Le déterminant de deux vecteurs parallèles à des axes dans le plan euclidien R^2 est égal au produit des mesures algébriques des vecteurs et du sinus de l'angle des deux axes.

589. Déterminant de deux vecteurs du plan euclidien R^2.

Le plan euclidien R^2 est rapporté au repère orthonormé canonique $\{0; \vec{i}; \vec{j}\}$.

Soient deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ du plan euclidien R^2. La formule (422; 1) donne :

$$\text{Det}(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{CD}) = \|\overrightarrow{AB}\| \cdot \|\overrightarrow{CD}\| \cdot \sin(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{CD})$$

Le déterminant de deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ du plan euclidien R^2 est égal au produit des normes de ces vecteurs et du sinus du bivecteur $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{CD})$.

590. Equation d'une droite dans le plan euclidien R^2.

Une droite (D) est déterminée par un de ses points $A(x_0; y_0)$ et le vecteur normal $\overrightarrow{N}(u; v)$ (fig. 590 *a*).

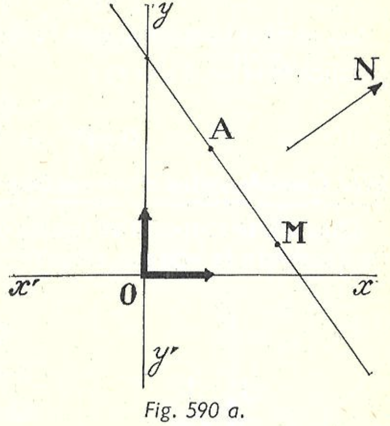


Fig. 590 *a*.

Son équation vectorielle est :

$$\overrightarrow{N} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$$

qui se traduit analytiquement, relativement au repère orthonormé canonique $\{0; i; j\}$ par :

$$u(x - x_0) + v(y - y_0) = 0$$

ou :

$$ux + vy - (ux_0 + vy_0) = 0.$$

En posant $r = -(ux_0 + vy_0)$ on obtient finalement :

$$ux + vy + r = 0.$$

Dans le plan euclidien R^2, l'équation $ux + vy + r = 0$ est l'équation d'une droite normale au vecteur $\overrightarrow{N}(u; v)$.

591. Conditions analytiques d'orthogonalité de deux droites du plan euclidien R^2.

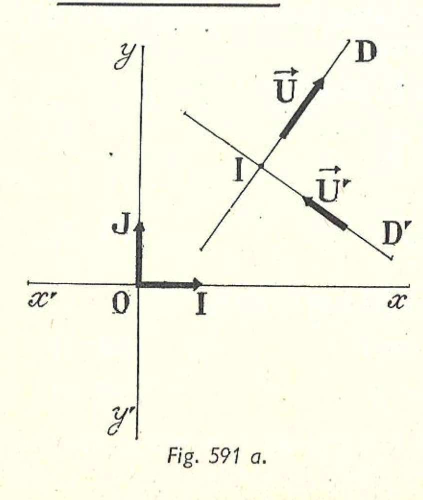


Fig. 591 *a*.

Le plan euclidien R^2 est rapporté au repère orthonormé canonique $\{0; i; j\}$.

1° Soient deux droites (D) et (D') d'équations respectives (fig. 591*a*) :

(D) $y = ax + b$

(D') $y = a'x + b'$.

Les vecteurs-directeurs sont $\overrightarrow{U}(1; a)$ et $\overrightarrow{U'}(1; a')$. La condition d'orthogonalité $V.V' = 0$ s'écrit :

$$1 + aa' = 0$$

et :

$$\mathbf{D \perp D' \Leftrightarrow aa' = -1} \qquad (591; 1)$$

D'où l'énoncé :

***Une condition nécessaire et suffisante pour que deux droites du plan euclidien soient orthogonales est que le produit de leurs pentes*[1] *soit égal à* -1.**

2° Soient deux droites (D) et (D') d'équations respectives

$$(D) \qquad ux + vy + r = 0$$
$$(D') \qquad u'x + v'y + r' = 0.$$

Les vecteurs normaux sont $\vec{N}$ $(u; v)$ et $\vec{N'}$ $(u'; v')$. La condition d'orthogonalité $\vec{N}\cdot\vec{N'} = 0$ s'écrit :

$$uu' + vv' = 0$$

et : $$\boldsymbol{D \perp D \iff uu' + vv' = 0} \qquad (591\,;2)$$

592. Coordonnées d'un vecteur unitaire dans le plan euclidien R^2.

Dans le plan rapporté au repère orthonormé $\vec{OI} = \vec{i}$, $\vec{OJ} = \vec{j}$ (fig. 592 *a*), on considère le vecteur unitaire :

$$\vec{OU} = \vec{u} = \alpha\cdot\vec{i} + \beta\cdot\vec{j}$$

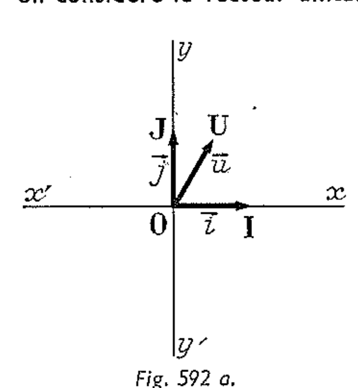


Fig. 592 a.

On se propose de déterminer les coordonnées $(\alpha; \beta)$ de ce vecteur $\vec{u}$.

On pose : (angle $Ox; \vec{u}) = \theta$.

En calculant le produit scalaire $\vec{i}\cdot\vec{u}$, on obtient :

$$\vec{i}\cdot\vec{u} = \vec{i}\cdot\left(\alpha\cdot\vec{i} + \beta\cdot\vec{j}\right)$$

ou : $$\cos\theta = \alpha. \qquad (592;1)$$

En calculant le déterminant Det $(\vec{i}, \vec{u})$, on obtient :

$$\text{Det}\left(\vec{i}\cdot\vec{u}\right) = \text{Det}\left(\vec{i}; \alpha\vec{i} + \beta\vec{j}\right) = \begin{vmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & \beta \end{vmatrix} = \beta$$

ou $$\sin\theta = \beta \qquad (592\,;2)$$

Donc :

Les coordonnées du vecteur $\vec{u}$ ***sont*** $(\cos\theta; \sin\theta)$.

Remarque. On a donc : $$\vec{i}\cdot\vec{u} = \cos\theta \qquad (592\,;3)$$

et $$\vec{j}\cdot\vec{u} = \sin\theta \qquad (592\,;4)$$

(1) Dans le plan euclidien R^2, le coefficient directeur d'une droite prend le nom de pente de cette droite.

593. Coordonnées polaires d'un point dans le plan euclidien R^2.

Le plan est rapporté au repère orthonormé $\overrightarrow{OI} = \vec{i}$, $\overrightarrow{OJ} = \vec{j}$ (fig. 593 *a*).

Un point M situé sur un axe $u'Ou$ est déterminé par l'angle $(Ox; Ou) = \theta$ et $\overline{OM} = r$.

θ et r sont les coordonnées polaires de M.

Si $\overrightarrow{OU} = \vec{u}$ est le vecteur-unitaire de l'axe $u'Ou$, on a :

$$\overrightarrow{OM} = r \cdot \vec{u}$$

ou encore :

$$\overrightarrow{OM} = r\left(\cos\theta \cdot \vec{i} + \sin\theta \cdot \vec{j}\right) = r\cos\theta \cdot \vec{i} + r\sin\theta \cdot \vec{j}.$$

Par suite si

$$\overrightarrow{OM} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j}$$

on a :

$$\mathbf{x = r\cos\theta}$$
$$\mathbf{y = r\sin\theta}$$

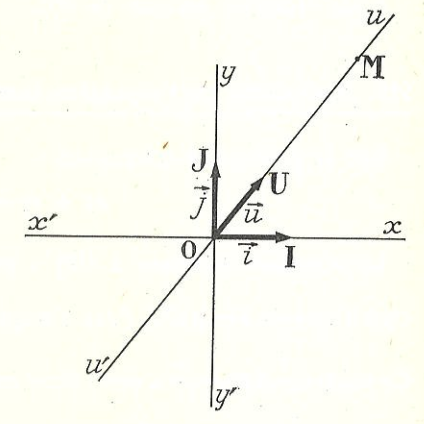


Fig. 593 a.

594. Equation normale d'une droite dans le plan euclidien R^2.

Soient une droite (D) et un axe $u'Ou$ perpendiculaire en H à (D) (fig. 594 *a*).

En posant angle $(Ox; Ou) = \theta$, le vecteur unitaire $\vec{n}$ de l'axe $u'Ou$ a pour coordonnées $(\cos\theta; \sin\theta)$. On pose encore :

$$\overline{OH} = p.$$

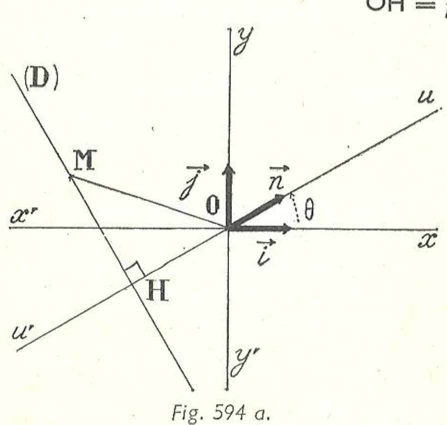


Fig. 594 a.

L'équation vectorielle de (D) est :

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{HM} = 0$$

qui s'écrit :

$$\vec{n} \cdot \left(\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OH}\right) = 0$$

ou

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{OM} = \vec{n} \cdot \overrightarrow{OH}.$$

Or :

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{OM} = x \cdot \cos\theta + y \cdot \sin\theta$$

$$\vec{n} \cdot \overline{\mathrm{OH}} = \vec{n} \cdot p\vec{n}$$
$$= p$$

L'équation de (D) est donc :

$$\mathbf{x} \cos \theta + \mathbf{y} \sin \theta = \mathbf{p} \qquad (594;\ 1)$$

C'est l'équation normale de (D).

595. Recherche de l'équation normale d'une droite.

Soit la droite (D) d'équation :

$$ux + vy + r = 0 \qquad (595;\ 1)$$

La direction normale à (D) a pour vecteur directeur $\vec{N}(u;\ v)$. *On choisit comme axe u'Ou, l'axe d'origine O et de vecteur unitaire* $\vec{n} = \frac{\vec{N}}{\|\vec{N}\|}$.

Ce vecteur unitaire $\vec{n}$ a donc pour coordonnées :

$$\cos \theta = \frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}} \quad \text{et} \quad \sin \theta = \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}} \qquad (595;\ 2)$$

en posant angle $(Ox;\ Ou) = \theta$ (fig. 595 *a*).

L'équation de (D) peut s'écrire :

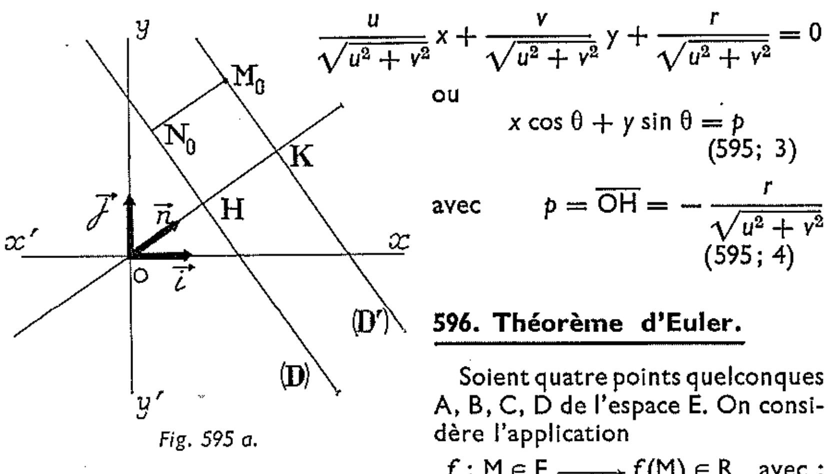


Fig. 595 a.

$$\frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}}\, x + \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}}\, y + \frac{r}{\sqrt{u^2 + v^2}} = 0$$

ou

$$x \cos \theta + y \sin \theta = p \qquad (595;\ 3)$$

avec

$$p = \overline{\mathrm{OH}} = -\frac{r}{\sqrt{u^2 + v^2}} \qquad (595;\ 4)$$

596. Théorème d'Euler.

Soient quatre points quelconques A, B, C, D de l'espace E. On considère l'application

$f : \mathrm{M} \in \mathrm{E} \longrightarrow f(\mathrm{M}) \in \mathrm{R}$ avec :

$$f(\mathrm{M}) = \overrightarrow{\mathrm{MA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BC}} + \overrightarrow{\mathrm{MB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CA}} + \overrightarrow{\mathrm{MC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}} \qquad (596;\ 1)$$

On a :

$$f(M) = \overrightarrow{MA}\cdot\left(\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MB}\right) + \overrightarrow{MB}\left(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MC}\right) + \overrightarrow{MC}\left(\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA}\right)$$
$$= \overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{MA}$$
$$= 0.$$

D'où la relation d'Euler:

$$(\forall M) \qquad \boldsymbol{\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{AB} = 0} \quad (596;2)$$

597. Orthocentre d'un triangle.

Soit un triangle ABC. Les hauteurs BB′ et CC′ se coupent en H (fig. 597 *a*). Le théorème d'Euler permet d'écrire :

$$\overrightarrow{HA}\cdot\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{HB}\cdot\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{HC}\cdot\overrightarrow{AB} = 0$$

Or $\overrightarrow{HB}\cdot\overrightarrow{CA} = 0$ et $\overrightarrow{HC}\cdot\overrightarrow{AB} = 0$. Par suite $\overrightarrow{HC}\cdot\overrightarrow{AB} = 0$, et AH est la troisième hauteur du triangle. Donc :

Les trois hauteurs d'un triangle sont concourantes.

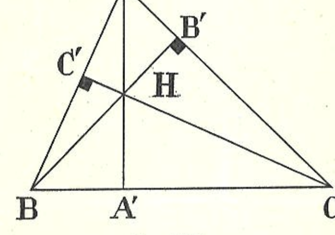


Fig. 597 a.

Les points A, B, C, H forment un ensemble orthocentrique; l'un de ces quatre points est orthocentre du triangle ayant les trois autres pour sommets.

598. Cercle. Disque.

1° Soient un point Ω du plan (P) et un nombre positif R (fig. 598 *a*).

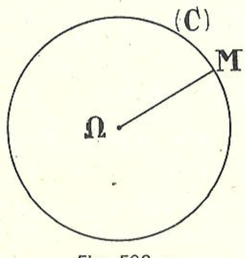


Fig. 598 a.

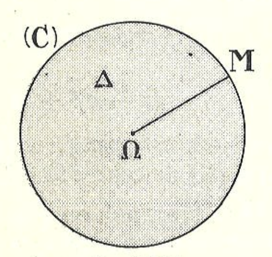


Fig. 598 b.

On appelle cercle (C) l'ensemble des points M du plan (P) tels que d (Ω; M) = R.

Ω est le centre du cercle; R en est le rayon.

2° ***On appelle disque fermé, de centre Ω et de rayon R, l'ensemble (Δ) des points M du plan tels que* d *(Ω; M) $\leqslant$ R** (fig. 598 *b*).

On appelle disque ouvert, de centre Ω et de rayon R, l'ensemble des points M du plan tels que* d *(Ω; M) $<$ R.

Dans les deux cas, *le cercle (C) est la frontière du disque.*

599. Equation d'un cercle.

1° On considère le cercle (C) de centre Ω (a; b) et de rayon R (fig. 599 *a*). Pour qu'un point M appartienne à (C) il faut et il suffit que :

$$[d(\Omega; M)]^2 = R^2 \qquad (599; 1)$$

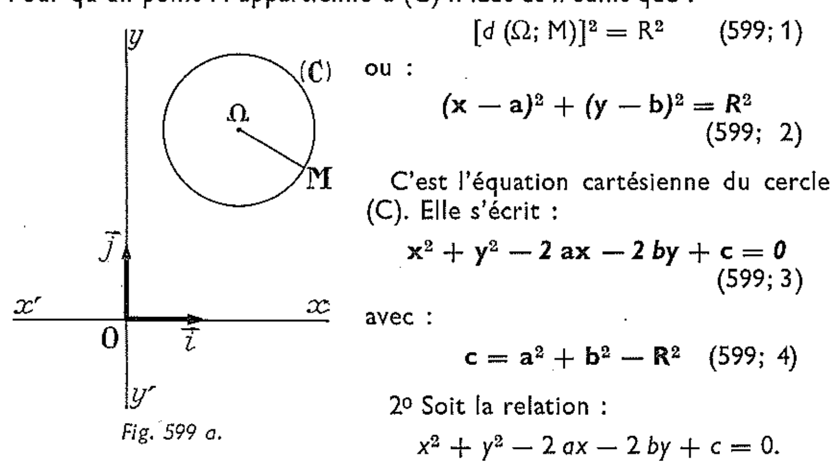


Fig. 599 a.

ou :

$$\mathbf{(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2} \qquad (599; 2)$$

C'est l'équation cartésienne du cercle (C). Elle s'écrit :

$$\mathbf{x^2 + y^2 - 2\,ax - 2\,by + c = 0} \qquad (599; 3)$$

avec :

$$\mathbf{c = a^2 + b^2 - R^2} \qquad (599; 4)$$

2° Soit la relation :

$$x^2 + y^2 - 2\,ax - 2\,by + c = 0.$$

On se propose l'étude de l'ensemble E des points M (x; y) dont les coordonnées satisfont à cette relation.

La relation s'écrit :

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 - a^2 - b^2 + c = 0$$

ou :

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = a^2 + b^2 - c.$$

Si $a^2 + b^2 - c$ est positif, on pose $a^2 + b^2 - c = R^2$ et l'ensemble E est le cercle (C) de centre Ω (a; b) et de rayon R.

Si $a^2 + b^2 - c$ est nul, on a $(x - a)^2 + (y - b)^2 = 0$; cette relation est vérifiée uniquement par ($x = a$; $y = b$). L'ensemble E se réduit au point Ω (a; b). Ω est alors appelé un cercle-point (cercle de centre Ω et de rayon nul).

Si $a^2 + b^2 - c$ est négatif, la relation n'est jamais vérifiée; l'ensemble E est vide.

600. Equation d'un plan dans l'espace euclidien R^3.

Un plan (P) est déterminé par un de ses points A $(x_0;\ y_0;\ z_0)$ et le vecteur normal $\vec{N}\ (u;\ v;\ w)$.

Son équation vectorielle est :

$$\vec{N} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$$

qui se traduit analytiquement, relativement au repère orthonormé canonique $\{0;\ \vec{i};\ \vec{j};\ \vec{k}\}$, par :

$$u\,(x - x_0) + v\,(y - y_0) + w\,(z - z_0) = 0$$

ou :

$$ux + vy + wz + r = 0$$

en posant :

$$r = -\,(ux_0 + vy_0 + wz_0).$$

Dans l'espace euclidien R^3, l'équation ux + vy + wz + r = 0 est l'équation d'un plan normal au vecteur $\vec{N}$ (u; v; w).

601. Equation normale d'un plan dans l'espace euclidien R^3.

Soient un plan (P) et un axe $u'Ou$ perpendiculaire en H à (P). Le vecteur unitaire de l'axe $u'Ou$ est $\vec{n}\ (\alpha;\ \beta;\ \gamma)$. On pose $\overline{OH} = p$.

M étant un point de P, l'équation vectorielle de (P) est :

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{HM} = 0$$

ou

$$\vec{n} \cdot \left(\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OH}\right) = 0$$

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{OM} = \vec{n} \cdot \overrightarrow{OH}$$

Or :

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{OM} = \alpha x + \beta y + \gamma z$$

et

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{OH} = \vec{n} \cdot \overline{OH} \cdot \vec{n} = p.$$

L'équation de (P) est donc :

$$\alpha \mathbf{x} + \beta \mathbf{y} + \gamma \mathbf{z} = \mathbf{p} \qquad (601\,;\,1)$$

C'est l'équation normale du plan (P).

602. Sphère. Boule.

1° Soient un point Ω de l'espace et un nombre positif R.

On appelle sphère (S) l'ensemble des points M de l'espace tels que d $(\Omega;\ M) = R$.

Ω est le centre de la sphère; R en est le rayon.

2° ***On appelle boule fermée, de centre Ω et de rayon R, l'ensemble des points M de l'espace tels que d (Ω; M) $\leqslant$ R.***

On appelle boule ouverte de centre Ω et de rayon R, l'ensemble des points M de l'espace tels que d (Ω; M) $<$ R.

Dans les deux cas, *la sphère (S) est la frontière de la boule.*

603. Equation d'une sphère.

Soit la sphère (S) de centre Ω (a, b, c) et de rayon R. Son équation vectorielle est :

$$\overrightarrow{\Omega M}^2 = R^2 \qquad (603; 1)$$

ou :

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2 \qquad (603; 2)$$

ou :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2\,ax - 2\,by - 2\,cz + d = 0 \qquad (603; 3)$$

avec :

$$d = a^2 + b^2 + c^2 - R^2 \qquad (603; 4)$$

CHAPITRE XLIII

BARYCENTRATION

604. Barycentre de n points.

Soient n points $A_1, A_2 \ldots A_n$, de l'espace affine R^n, affectés de coefficients réels α_1, α_2, ..., α_n ou masses. On suppose que la somme de ces masses n'est pas nulle :

$$\sum_{i=1}^{i=n} \alpha_i = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n \neq 0. \qquad (604;1)$$

Les points $A_i(\alpha_i)$ sont dits *points massifs*.

On appelle barycentre des points massifs $A_1(\alpha_1)$, $A_2(\alpha_2)$, ..., $A_n(\alpha_n)$, tout point G, s'il en existe, défini par la relation vectorielle :

$$\alpha_1 \cdot \overrightarrow{GA_1} + \alpha_2 \cdot \overrightarrow{GA_2} + \ldots + \alpha_n \cdot \overrightarrow{GA_n} = \vec{0}. \qquad (604;2)$$

Lorsque les n masses sont égales à l'unité, le barycentre est appelé isobarycentre.

On a alors :

$$\overrightarrow{GA_1} + \overrightarrow{GA_2} + \ldots + \overrightarrow{GA_n} = 0. \qquad (604;3)$$

605. Existence du barycentre.

Soit un point O pris comme origine des repères vectoriels. La relation de définition s'écrit :

$$\alpha_1 \cdot (\overrightarrow{OA_1} - \overrightarrow{OG}) + \alpha_2 \cdot (\overrightarrow{OA_2} - \overrightarrow{OG}) + \cdots + \alpha_n (\overrightarrow{OA_n} - \overrightarrow{OG}) = 0$$

ou

$$\alpha_1 \cdot \overrightarrow{OA_1} + \alpha_2 \cdot \overrightarrow{OA_2} + \ldots + \alpha_n \cdot \overrightarrow{OA_n} - (\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n) \overrightarrow{OG} = 0.$$

Puisque $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n \neq 0$, on tire

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\alpha_1 \cdot \overrightarrow{OA_1} + \alpha_2 \cdot \overrightarrow{OA_2} + \cdots + \alpha_n \cdot \overrightarrow{OA_n}}{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n}. \qquad (605;1)$$

ou

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} \left(\alpha_i \cdot \overrightarrow{OA_i}\right)}{\sum_{i=1}^{i=n} \alpha_i} \qquad (605; 2)$$

Ce résultat prouve l'existence d'un point G.

606. Unicité du barycentre.

S'il existait un second barycentre G′, on aurait :

$$\alpha_1 \cdot \overrightarrow{G'A_1} + \alpha_2 \cdot \overrightarrow{G'A_2} + \cdots + \alpha_n \cdot \overrightarrow{G'A_n} = 0.$$

En soustrayant de la relation (604; 2), il vient :

$$\alpha_1 \cdot \left(\overrightarrow{GA_1} - \overrightarrow{G'A_1}\right) + \alpha_2 \cdot \left(\overrightarrow{GA_2} - \overrightarrow{G'A_2}\right) + \ldots + \alpha_n \cdot \left(\overrightarrow{GA_n} - \overrightarrow{G'A_n}\right) = 0$$

ou

$$\alpha_1 \cdot \overrightarrow{GG'} + \alpha_2 \cdot \overrightarrow{GG'} + \cdots + \alpha_n \cdot \overrightarrow{GG'} = 0$$

et

$$(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots \alpha_n) \cdot \overrightarrow{GG'} = 0$$

ce qui entraîne, puisque $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n \neq 0$, $GG' = 0$.

Donc, G et G′ sont identiques.

Ainsi :

Le barycentre de n points massifs est unique.

607. Coordonnées du barycentre.

La formule

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\alpha_1 \cdot \overrightarrow{OA_1} + \alpha_2 \cdot \overrightarrow{OA_2} + \cdots + \alpha_n \cdot \overrightarrow{OA_n}}{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n}$$

donne analytiquement

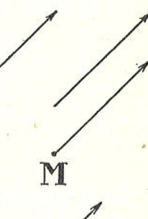
$$\left\{\begin{aligned} x_G &= \frac{\alpha_1 \cdot x_1 + \alpha_2 \cdot x_2 + \cdots + \alpha_n \cdot x_n}{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n} \\ y_G &= \frac{\alpha_1 \cdot y_1 + \alpha_2 \cdot y_2 + \cdots + \alpha_n \cdot y_n}{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n} \\ z_G &= \frac{\alpha_1 \cdot z_1 + \alpha_2 \cdot z_2 + \cdots + \alpha_n \cdot z_n}{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n} \end{aligned}\right. \qquad (607; 1)$$

608. Fonctions vectorielles.

A chaque point M de l'espace R^3, ou d'une partie de R^3, on peut associer un vecteur lié au point M :

$$\varphi : \qquad M \in R^3 \longrightarrow \overrightarrow{\varphi(M)}$$

On définit ainsi une fonction vectorielle; l'ensemble des valeurs de φ, c'est-à-dire l'ensemble des vecteurs $\overrightarrow{\varphi(M)}$, est un champ de vecteurs.



◇ *Exemple 1.*

A chaque point M on associe le vecteur $\overrightarrow{\varphi(M)} = \vec{V}$, $\vec{V}$ étant un vecteur libre donné (fig. 608 *a*).



Fig. 608 a.

$$\varphi : \qquad M \in R^3 \longrightarrow \overrightarrow{\varphi(M)} = \vec{V}$$

La fonction φ ainsi définie est la *fonction vectorielle constante*. Le champ de vecteurs correspondant est un *champ uniforme de vecteurs.*

◇ *Exemple 2.*

Soient un point fixe Ω et un nombre réel α.

A chaque point M on associe le vecteur $\overrightarrow{\varphi(M)} = \alpha \cdot \overrightarrow{M\Omega}$ (fig. 608 *b* et *c*.)

$$\varphi : \qquad M \in R^3 \longrightarrow \overrightarrow{\varphi(M)} = \alpha \cdot \overrightarrow{M\Omega}$$

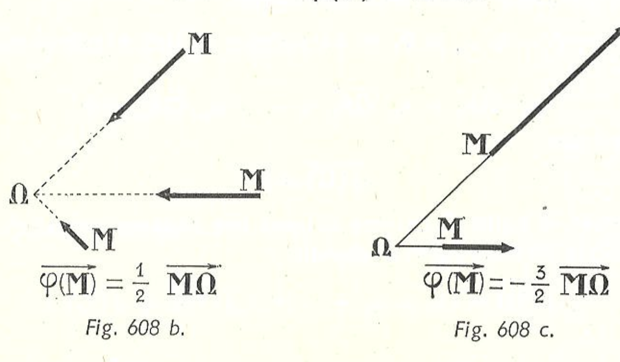


Fig. 608 b. *Fig. 608 c.*

La fonction φ ainsi définie est *la fonction vectorielle linéaire*. Le champ de vecteurs correspondant est un *champ linéaire à centre;* Ω *est le centre;* α *est le coefficient*. Si α est positif, le champ est dit attractif (fig. 608 *b*); si α est négatif, le champ est dit répulsif (fig. 608 *c*).

609. Fonction vectorielle de Leibniz.

Soient n points massifs $A_1(\alpha_1)$; $A_2(\alpha_2)$; ...; $A_n(\alpha_n)$.

A chaque point M on associe le vecteur :

$$\overrightarrow{\varphi(M)} = \alpha_1 \cdot \overrightarrow{MA_1} + \alpha_2 \cdot \overrightarrow{MA_2} + \cdots + \alpha_n \cdot \overrightarrow{MA_n}$$

$$\varphi: \quad M \in R^3 \longrightarrow \overrightarrow{\varphi(M)} = \sum_{i=1}^{i=n} \left(\alpha_i \overrightarrow{MA_i}\right) \qquad (609;1)$$

La fonction φ ainsi définie est la *fonction vectorielle de Leibniz.*

Si un point quelconque Ω est pris comme origine des repères vectoriels, on a :

$$\overrightarrow{\varphi(M)} = \alpha_1 \cdot \left(\overrightarrow{M\Omega} + \overrightarrow{\Omega A_1}\right) + \alpha_2 \cdot \left(\overrightarrow{M\Omega} + \overrightarrow{\Omega A_2}\right) + \cdots + \alpha_n \cdot \left(\overrightarrow{M\Omega} + \overrightarrow{\Omega A_n}\right)$$

$$= (\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n) \cdot \overrightarrow{M\Omega} + \alpha_1 \overrightarrow{\Omega A_1} + \alpha_2 \cdot \overrightarrow{\Omega A_2} + \cdots + \alpha_n \cdot \overrightarrow{\Omega A_n}$$

ou

$$\overrightarrow{\varphi(M)} = (\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n)\, \overrightarrow{M\Omega} + \overrightarrow{\varphi(\Omega)} \qquad (609;2)$$

Si $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = 0$, la formule (609;2) devient

$$\overrightarrow{\varphi(M)} = \overrightarrow{\varphi(\Omega)} \qquad (609;3)$$

Donc :

Si** $\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n = 0$**, la fonction vectorielle de Leibniz est la fonction vectorielle constante.

Si $\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n \neq 0$**,** le barycentre G des n points massifs est défini par :

$$\alpha_1 \cdot \overrightarrow{GA_1} + \alpha_2 \cdot \overrightarrow{GA_2} + \cdots + \alpha_n \cdot \overrightarrow{GA_n} = 0$$

c'est-à-dire par

$$\overrightarrow{\varphi(G)} = 0$$

En prenant le point G comme origine des repères vectoriels (au lieu du point Ω) la formule (609; 2) devient :

$$\overrightarrow{\varphi(M)} = (\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n) \cdot \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{\varphi(G)}$$

ou

$$\overrightarrow{\varphi(M)} = (\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n) \cdot \overrightarrow{MG} \qquad (609;4)$$

Donc :

Si** $\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n \neq 0$**, la fonction vectorielle de Leibniz est une fonction vectorielle linéaire à centre; son centre est le barycentre des points et son coefficient est la somme des masses des points.

610. Commutativité.

La formule de définition du barycentre montre que l'ordre des points n'intervient pas.

On traduit ce résultat en disant que :

La barycentration est commutative.

611. Groupement de points.

Soient n points massifs et leur barycentre $G \cdot (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n \neq 0)$.

On considère les p premiers de ces points ($p < n$) :

$$(\alpha_1 \cdot \overrightarrow{GA_1} + \alpha_2 \cdot \overrightarrow{GA_2} + \cdots + \alpha_p \cdot \overrightarrow{GA_p}) + \alpha_{p+1} \cdot \overrightarrow{GA_{p+1}} + \cdots + \alpha_n \cdot \overrightarrow{GA_n} = 0.$$

Si $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_p \neq 0$**,** on envisage le barycentre g des points $A_1(\alpha_1)$, $A_2(\alpha_1) \dots A_p(\alpha_p)$.

D'après le théorème de Leibniz

$$\alpha_1 \cdot \overrightarrow{GA_1} + \alpha_2 \cdot \overrightarrow{GA_2} + \cdots + \alpha_p \cdot \overrightarrow{GA_p} \cdot = (\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_p) \cdot \overrightarrow{Gg}$$

et par suite :

$$(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots \alpha_p) \cdot \overrightarrow{Gg} + \alpha_{p+1} \cdot \overrightarrow{GA_{p+1}} + \cdots + \alpha_n \cdot \overrightarrow{GA_n} = 0.$$

Autrement dit :

Dans la recherche du barycentre, on peut remplacer plusieurs points, dont la somme des masses n'est pas nulle, par le barycentre de ces points affecté de la somme des masses des points remplacés.

Si $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_p = 0$**,** d'après le théorème de Leibniz

$$\alpha_1 \cdot \overrightarrow{GA_1} + \alpha_2 \overrightarrow{GA_2} + \cdots + \alpha_p \cdot \overrightarrow{GA_p} = \vec{K}$$

$\vec{K} = \overrightarrow{\varphi(\Omega)}$ étant un vecteur constant. On a alors :

$$\vec{K} + \alpha_{p+1} \cdot \overrightarrow{GA_{p+1}} + \cdots + \alpha_n \cdot \overrightarrow{GA_n} = 0$$

Autrement dit :

Dans la recherche du barycentre, on peut remplacer plusieurs points, dont la somme des masses est nulle, par la fonction constante de Leibniz de ces points.

612. Coordonnées barycentriques.

1° *Coordonnées barycentriques sur une droite.*

Soit une droite (D) déterminée par deux points A et B (fig. 612 *a*).

A M B

Fig. 612 a.

On considère un point M quelconque de (D) autre que A et B. Alors il existe deux nombres α et β tels que :

$$\alpha \cdot \overrightarrow{MA} + \beta \cdot \overrightarrow{MB} = 0$$

En effet, α étant un nombre réel non nul quelconque, on déduit :

$$\beta = -\alpha \cdot \frac{\overline{MA}}{\overline{MB}}$$

la droite (D) étant transformée en axe.

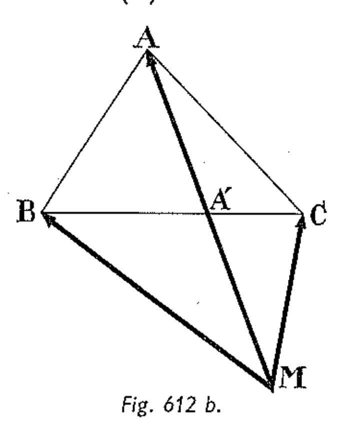


Fig. 612 b.

(α; β) sont des coordonnées barycentriques du point M.

($k\alpha$; $k\beta$) sont aussi des coordonnées barycentriques de M.

2° *Coordonnées barycentriques dans un plan.*

Soit un plan (P) déterminé par trois points A, B, C non alignés (fig. 612 *b*).

On considère un point M quelconque de (P) autre que A, B, C. Alors il existe trois nombres α, β, γ tels que :

$$\alpha \cdot \overrightarrow{MA} + \beta \cdot \overrightarrow{MB} + \gamma \cdot \overrightarrow{MC} = 0.$$

On peut supposer, par exemple, que la droite MA coupe la droite BC en A′.

Il existe donc β et γ tels que :

$$\beta \cdot \overrightarrow{A'B} + \gamma \cdot \overrightarrow{A'C} = 0.$$

D'après le théorème de Leibniz, on a :

$$\beta \cdot \overrightarrow{MB} + \gamma \cdot \overrightarrow{MC} = (\beta + \gamma) \cdot \overrightarrow{MA'}$$

puisque A′ est le barycentre des points B (β) et C (γ).

Les points A, A′, M sont alignés; donc il existe α tel que :

$$\alpha \cdot \overrightarrow{MA} + (\beta + \gamma)\,\overrightarrow{MA'} = 0$$

Finalement, il existe (α, β, γ) tels que

$$\alpha\,\overrightarrow{MA} + \beta \cdot \overrightarrow{MB} + \gamma \cdot \overrightarrow{MC} = 0$$

$(\alpha; \beta; \gamma)$ sont des coordonnées barycentriques du point M. $(k\alpha; k\beta; k\gamma)$ est un autre système de coordonnées barycentriques.

3° *Coordonnées barycentriques dans l'espace.*

Dans l'espace R^3 on envisage quatre points A, B, C, D, non situés dans un même plan (fig. 612 *c*).

On considère un point M quelconque de l'espace autre que A, B, C, D. Alors il existe quatre nombres α, β, γ, δ tels que :

$$\alpha \cdot \overrightarrow{MA} + \beta \cdot \overrightarrow{MB} + \gamma \cdot \overrightarrow{MC} + \delta \cdot \overrightarrow{MD} = 0$$

On peut supposer, par exemple, que la droite MA coupe le plan BCD en A′. Il existe donc, β, γ, δ tels que :

$$\beta \cdot \overrightarrow{A'B} + \gamma \cdot \overrightarrow{A'C} + \delta \cdot \overrightarrow{A'D} = 0.$$

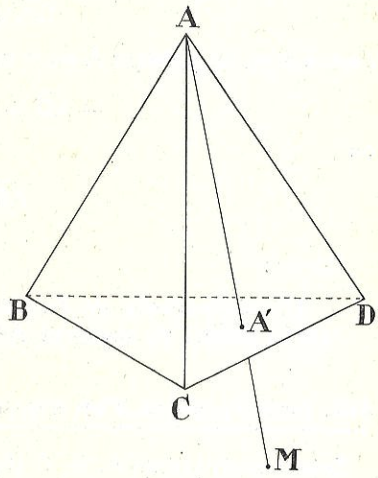


Fig. 612 c.

D'après le théorème de Leibniz, on a :

$$\beta \cdot \overrightarrow{MB} + \gamma \cdot \overrightarrow{MC} + \delta \cdot \overrightarrow{MD} = (\beta + \gamma + \delta) \cdot \overrightarrow{MA'}$$

puisque A′ est le barycentre des points B (β) C (γ) D (δ).

Les points M, A, A′ sont alignés; donc il existe α tel que :

$$\alpha \cdot \overrightarrow{MA} + (\beta + \gamma + \delta) \cdot \overrightarrow{MA'} = 0$$

Finalement, il existe $(\alpha; \beta; \gamma; \delta)$ tels que :

$$\alpha \cdot \overrightarrow{MA} + \beta \cdot \overrightarrow{MB} + \gamma \cdot \overrightarrow{MC} + \delta \cdot \overrightarrow{MD} = 0$$

$(\alpha; \beta; \gamma; \delta)$ sont les coordonnées barycentriques du point M. $(k\alpha; k\beta; k\gamma; k\delta)$ est un autre système de coordonnées barycentriques.

613. Isobarycentre d'un ensemble de deux points.

Soient deux points A et B (fig. 613 *a*).

A G B

Fig. 613 a.

L'isobarycentre est défini par :

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = 0; \qquad (613;1)$$

c'est-à-dire, en prenant A pour origine des repères vectoriels

$$-\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AG} = 0$$

ou

$$\overrightarrow{AG} = \frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{AB}. \qquad (613;2)$$

Donc :

L'isobarycentre de l'ensemble $\{A; B\}$ des deux points A et B est le milieu du segment AB.

614. Isobarycentre d'un ensemble de trois points.

Soient trois points A, B, C (fig. 614 *a*).

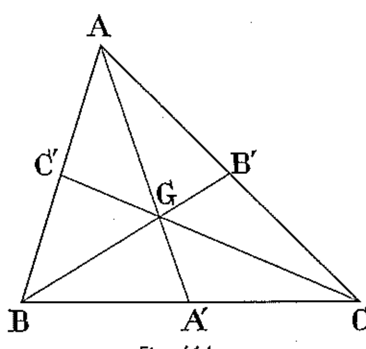


Fig. 614 a.

L'isobarycentre est défini par :

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 0. \qquad (614;1)$$

Soit A′ le milieu du segment BC; on a :

$$\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 2\cdot\overrightarrow{GA'}$$

D'où :

$$\overrightarrow{GA} + 2\cdot\overrightarrow{GA'} = 0.$$

En prenant A comme origine des repères vectoriels :

$$-\overrightarrow{AG} + 2\left(\overrightarrow{AA'} - \overrightarrow{AG}\right) = 0.$$

D'où :

$$\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\cdot\overrightarrow{AA'}. \qquad (614;2)$$

De même :

$$\overrightarrow{BG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BB'} \qquad (614;3)$$

$$\overrightarrow{CG} = \frac{2}{3}\cdot\overrightarrow{CC'}. \qquad (614:4)$$

Remarque.

Si A, B, C ne sont pas alignés, on peut énoncer :

Les trois médianes d'un triangle concourent à l'isobarycentre G, qui est situé aux deux tiers de chacune d'elles à partir du sommet.

615. Isobarycentre d'un ensemble de quatre points.

Soient quatre points A, B, C, D (fig. 615 *a*).

L'isobarycentre est défini par :

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = 0. \qquad (615;1)$$

1° Soit A′ l'isobarycentre de l'ensemble $\{B; C; D\}$; on a :

$$\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = 3\cdot\overrightarrow{GA'}$$

D'où :

$$\overrightarrow{GA} + 3\cdot\overrightarrow{GA'} = 0$$

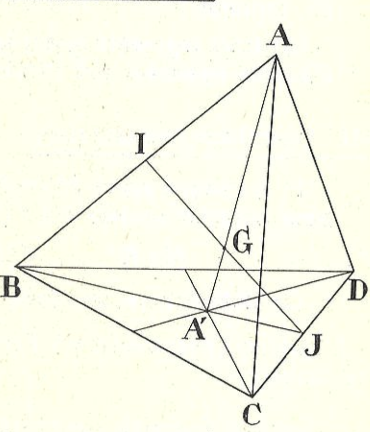


Fig. 615 a.

En prenant A comme origine des repères vectoriels :

$$-\overrightarrow{AG} + 3\left(\overrightarrow{AA'} - \overrightarrow{AG}\right) = 0$$

D'où :

$$\overrightarrow{AG} = \frac{3}{4}\cdot\overrightarrow{AA'} \qquad (615;2)$$

De même :

$$\overrightarrow{BG} = \frac{3}{4}\cdot\overrightarrow{BB'}$$

$$\overrightarrow{CG} = \frac{3}{4}\cdot\overrightarrow{CC'}$$

$$\overrightarrow{DG} = \frac{3}{4}\cdot\overrightarrow{DD'}.$$

2° Soient I le milieu de AB et J le milieu de CD. On a :

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = 2 \cdot \overrightarrow{GI}$$
$$\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = 2 . \overrightarrow{GJ}.$$

D'où :

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = 2(\overrightarrow{GI} + \overrightarrow{GJ}) = 0.$$

Et de $\overrightarrow{GI} + \overrightarrow{GJ} = 0$ on déduit que *G est le milieu du segment IJ.*

Remarque.

Si A, B, C, D ne sont pas situés dans un même plan, on peut énoncer :

Les quatre médianes d'un tétraèdre concourent à l'isobarycentre G qui est situé aux trois quarts de chacune d'elles à partir du sommet.

Les trois segments ayant pour extrémités les milieux des couples d'arêtes opposées ont l'isobarycentre G pour milieu commun.

616. Fonctions numériques.

1° ***A chaque point M de l'espace R^3, ou d'une partie de R^3, on peut associer un nombre f (M) :***

f : $$M \in R^3 \longrightarrow f(M) \in R$$

On définit ainsi une fonction numérique du point M.

L'ensemble des couples (M; f (M)) est un champ de nombres ou un champ de scalaires.

◇ *Exemple.* Fonction constante d'Euler (cf. n° 596).

2° k étant un nombre constant donné, l'ensemble $\{ M/f(M) = k \}$ est un ensemble de niveau (ou surface ou courbe de niveau).

617. Fonction numérique de Leibniz [1].

Soient n points massifs $A_1(\alpha_1)$, $A_2(\alpha_2)$, ..., $A_n(\alpha_n)$.

A chaque point M on associe le nombre :

$$f(M) = \alpha_1 \cdot \overrightarrow{MA_1}^2 + \alpha_2 \cdot \overrightarrow{MA_2}^2 + \cdots + \alpha_n \cdot \overrightarrow{MA_n}^2 \quad (617;1)$$

f : $$M \in R \longrightarrow f(M) = \sum_{i=1}^{i=n} \left(\alpha_i \cdot \overrightarrow{MA_i}^2\right)$$

(1) Cette question relève de la géométrie métrique.

La fonction f ainsi définie est la *fonction numérique de Leibniz.*

Si un point quelconque Ω est pris comme origine des repères vectoriels, on a :

$$\overrightarrow{MA_i}^2 = \left(\overrightarrow{\Omega A_i} - \overrightarrow{\Omega M}\right)^2 = \overrightarrow{\Omega A_i}^2 + \overrightarrow{\Omega M}^2 - 2 \cdot \overrightarrow{\Omega M} \cdot \overrightarrow{\Omega A_i}.$$

D'où :

$$f(M) = (\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n) \cdot \overrightarrow{\Omega M}^2 + \left(\alpha_1 \cdot \overrightarrow{\Omega A_1}^2 + \alpha_2 \cdot \overrightarrow{\Omega A_2}^2 + \cdots + \alpha_n \cdot \overrightarrow{\Omega A_n}^2\right) - 2 \cdot \overrightarrow{\Omega M}\left(\alpha_1 \cdot \overrightarrow{\Omega A_1} + \cdots + \alpha_n \overrightarrow{\Omega A_n}\right)$$

ou

$$f(M) = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\right) \cdot \overrightarrow{\Omega M}^2 + \sum_{i=1}^{n} \left(\alpha_i \cdot \overrightarrow{\Omega A_i}^2\right) - 2 \cdot \overrightarrow{\Omega M} \cdot \sum_{i=1}^{n} \left(\alpha_i \cdot \overrightarrow{\Omega A_i}\right) \qquad (617;2)$$

ou

$$\mathbf{f}(M) = (\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n) \cdot \overrightarrow{\Omega M}^2 + \mathbf{f}(\Omega) - 2 \cdot \overrightarrow{\Omega M} \cdot \overrightarrow{\varphi(\Omega)}. \qquad (617;3)$$

Si $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n$ **= 0 et** $\overrightarrow{\varphi(\Omega)} = 0$**,** la formule (617; 3) devient :

$$\mathbf{f}(M) = \mathbf{f}(\Omega) \qquad (617;4)$$

Et alors :

La fonction numérique est une fonction constante.

Si $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$ **= 0 et** $\overrightarrow{\varphi(\Omega)} \neq 0$**,** la formule (617; 3) devient :

$$\mathbf{f}(M) = \mathbf{f}(\Omega) - 2 \cdot \overrightarrow{\Omega M} \cdot \overrightarrow{\varphi(\Omega)}. \qquad (617;5)$$

Si $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n \neq 0$**,** le barycentre G des n points massifs est défini par :

$$\alpha_1 \cdot \overrightarrow{GA_1} + \alpha_2 \cdot \overrightarrow{GA_2} + \cdots + \alpha_n \cdot \overrightarrow{GA_n} = 0$$

c'est-à-dire par

$$\overrightarrow{\varphi(G)} = 0.$$

En prenant le point G comme origine des repères vectoriels (au lieu du point Ω), la formule (617; 3) devient :

$$f(M) = (\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n) \cdot \overrightarrow{GM}^2 + f(G) - 2 \cdot \overrightarrow{GM} \cdot \overrightarrow{\varphi(G)}$$

ou

$$\mathbf{f}(M) = (\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n) \cdot \overrightarrow{GM}^2 + \mathbf{f}(G) \qquad (617;6)$$

618. Nouvelle équation d'une droite.

Soit une droite (D) déterminée par les deux points A et B (fig. 618 *a*). Son équation vectorielle est :

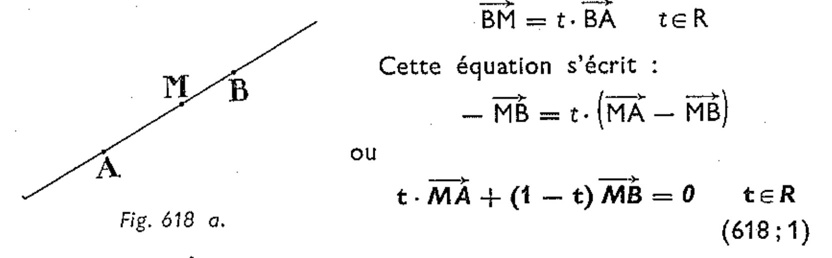


Fig. 618 a.

$$\overrightarrow{BM} = t \cdot \overrightarrow{BA} \qquad t \in R$$

Cette équation s'écrit :

$$-\overrightarrow{MB} = t \cdot \left(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}\right)$$

ou

$$\mathbf{t} \cdot \overrightarrow{MA} + (1 - \mathbf{t})\,\overrightarrow{MB} = 0 \qquad \mathbf{t} \in R \qquad (618;1)$$

Cette équation exprime que M est le barycentre des points massifs A (t) et B ($1 - t$).

On a donc, en utilisant le théorème de Leibniz :

$$\overrightarrow{OM} = \mathbf{t} \cdot \overrightarrow{OA} + (1 - \mathbf{t})\,\overrightarrow{OB}, \qquad \mathbf{t} \in R \qquad (618;2)$$

619. Equation d'un segment.

Le segment AB a pour équation (fig. 618 *a*) :

$$\overrightarrow{BM} = t \cdot \overrightarrow{BA}, \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1 \qquad (619;1)$$

ce qui se traduit par :

$$\mathbf{t} \cdot \overrightarrow{MA} + (1 - \mathbf{t}) \cdot \overrightarrow{MB} = 0, \qquad 0 \leqslant \mathbf{t} \leqslant 1 \qquad (619;2)$$

et par :

$$\overrightarrow{OM} = \mathbf{t} \,.\, \overrightarrow{OA} + (1 - \mathbf{t})\,\overrightarrow{OB}, \qquad 0 \leqslant \mathbf{t} \leqslant 1 \qquad (619;3)$$

CHAPITRE XLIV

CONVEXITÉ

620. Convexité d'un ensemble de points.

Un ensemble E de points est convexe lorsque deux points quelconques A et B appartenant à E le segment AB est contenu dans E.

$$(\forall A)\,(\forall B) \qquad A \in E \text{ et } B \in E \Rightarrow AB \subset E.$$

Un ensemble non convexe est dit concave.

◇ *Exemple.*

Un segment est convexe.

621. Intersection d'ensembles convexes.

Soient deux ensembles convexes E et E′, et leur intersection $\Delta = E \cap E'$ (fig. 621 *a*).

On a :

$$(\forall A)\,(\forall B)\ \left\{\begin{array}{l} A \in E \text{ et } B \in E \Rightarrow AB \subset E \\ \text{et} \\ A \in E' \text{ et } B \in E' \Rightarrow AB \subset E' \end{array}\right\} \Rightarrow AB \subset \Delta.$$

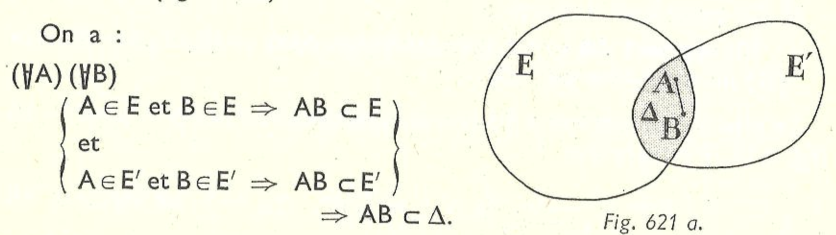


Fig. 621 a.

D'où :

$$(\forall A)\,(\forall B) \qquad A \in \Delta \text{ et } B \in \Delta \Rightarrow AB \subset \Delta.$$

Autrement dit :

L'intersection de deux ensembles convexes est convexe.

622. Convexité d'un demi-plan.

Soit un demi-plan (p) limité par la droite frontière $u'Ou$ (fig. 622 *a*).

Son équation est :

$$\overrightarrow{OM} = x \cdot \vec{u} + y \cdot \vec{v} \quad x \in R \text{ et } y \in R^{+}.$$

Autrement dit, *dans le repère* $(\vec{u}; \vec{v})$, *le demi-plan* (p) *est l'ensemble des points ayant une ordonnée positive.*

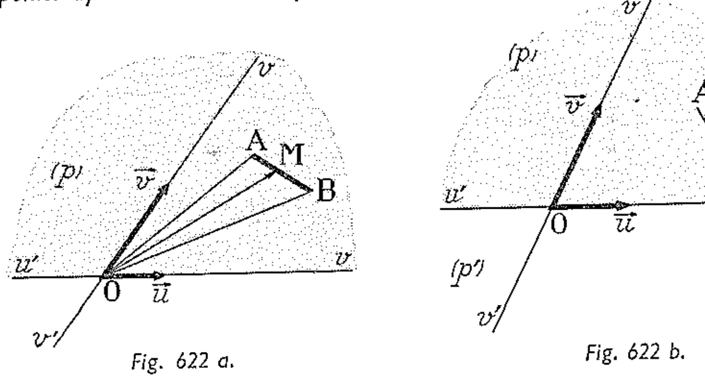


Fig. 622 a. *Fig. 622 b.*

1° Soient deux points A et B de (p) (fig. 622; *a*). Un point M du segment AB est barycentre des points massifs A (t) et B $(1 - t)$, avec

$$0 \leqslant t \leqslant 1.$$

L'ordonnée de M est donc $y_M = t \cdot y_A + (1 - t)\, y_B$. Elle est positive; autrement dit M appartient à (p).

Et :

Un demi-plan est un ensemble convexe.

2° On peut aussi énoncer :

Un segment AB ayant ses extrémités dans un demi-plan d'arête (D) ne rencontre pas (D).

De plus si A appartient à (p) et si B appartient au demi-plan opposé (p') (fig. 622 *b*) en prenant :

$$t = -\frac{y_B}{y_A - y_B},\ 0 \leqslant t \leqslant 1, \text{ on a } y_M = 0.$$ Le segment AB

rencontre donc (D). Et :

Un segment AB ayant ses extrémités de part et d'autre de (D) rencontre (D).

Ces deux résultats constituent le *théorème de Pasch.*

623. Convexité d'un demi-espace.

On démontre de même :

Un demi-espace est un ensemble convexe.

624. Convexité et secteurs angulaires.

1° Soit un secteur angulaire rentrant, intersection des demi-plans (p) et (q) (fig. 624 *a*). Donc :

Un secteur angulaire rentrant est un ensemble convexe.

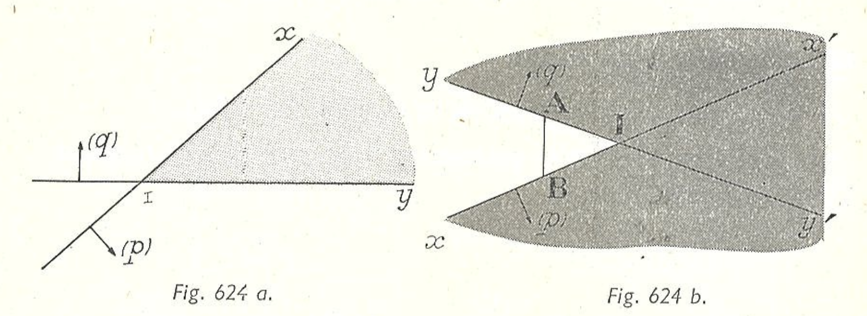


Fig. 624 *a*. Fig. 624 *b*.

2° Par contre le secteur angulaire sortant $(Ix; Iy) = (p) \cup (q)$ n'est pas convexe; car si $A \in Iy$ et $B \in Ix$, le segment AB n'est pas contenu dans le secteur angulaire (fig. 624 *b*).

Donc :

Un secteur angulaire sortant est un ensemble concave.

625. Convexité et polygones.

On considère un polygone non croisé; il peut être considéré comme l'intersection de plusieurs secteurs angulaires : on définit ainsi l'intérieur du polygone.

Si tous les secteurs angulaires sont convexes, l'intérieur du polygone est convexe. C'est d'ailleurs l'intersection de demi-plans (fig. 625 *a*).

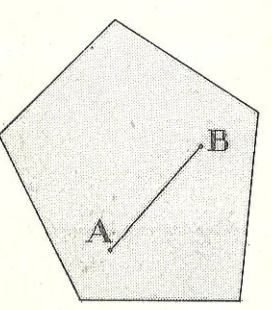


Fig. 625 *a*.

Donc :

Si l'intérieur d'un polygone est situé tout entier d'un même côté de chacune de ses droites-côtés, il est convexe; et réciproquement.

626. Convexité d'une bande, d'un parallélogramme.

Soit une bande (D; D'). L'intérieur de la bande, intersection de deux demi-plans, est convexe (fig. 626 *a*).

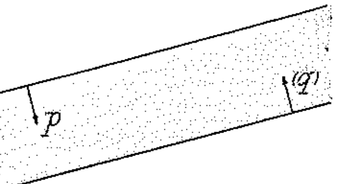


Fig. 626 a.

D'où :

L'intérieur d'une bande est un ensemble convexe.

Par suite :

L'intérieur d'un parallélogramme est un ensemble convexe.

627. Convexité d'un disque.

Soit un disque Δ, de centre O et de rayon R (fig. 627 *a*).

On considère deux points quelconques distincts A et B de ce disque : $\|\overrightarrow{OA}\| \leqslant R$ et $\|\overrightarrow{OB}\| \leqslant R$.

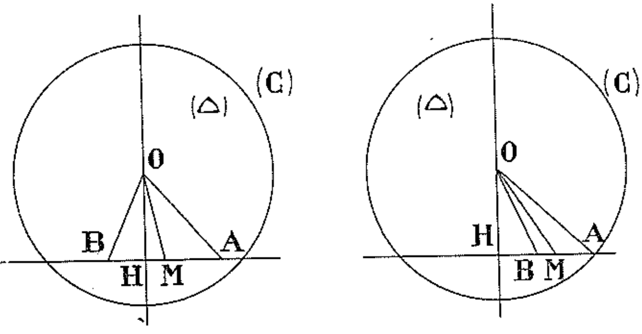


Fig. 627 a.

Si M appartient au segment AB, on a :

$$\overrightarrow{OM} = t \cdot \overrightarrow{OA} + (1 - t) \cdot \overrightarrow{OB} \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1$$

D'où :

$$\|\overrightarrow{OM}\| \leqslant t \cdot \|\overrightarrow{OA}\| + (1 - t) \cdot \|\overrightarrow{OB}\|$$

ou

$$d(O; M) \leqslant t \cdot R + (1 - t) \cdot R$$

et finalement :

$$d(O; M) \leqslant R.$$

Donc M appartient au disque : $AB \subset \Delta$.

Et :

Un disque est un ensemble convexe.

628. Segment de disque.

Un segment de disque est l'intersection d'un disque et d'un demi-plan (fig. 628 *a*).

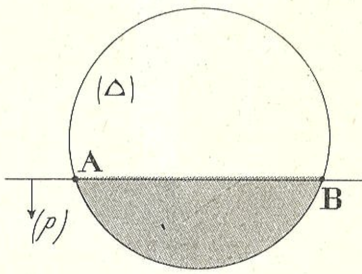


Fig. 628 a.

Donc :

Un segment de disque est un ensemble convexe.

629. Secteurs de disque.

Soient un disque Δ de centre O, et un secteur angulaire de sommet O (fig. 629 *a*, *b*). ***L'intersection du disque et du secteur angulaire au centre est un secteur de disque.***

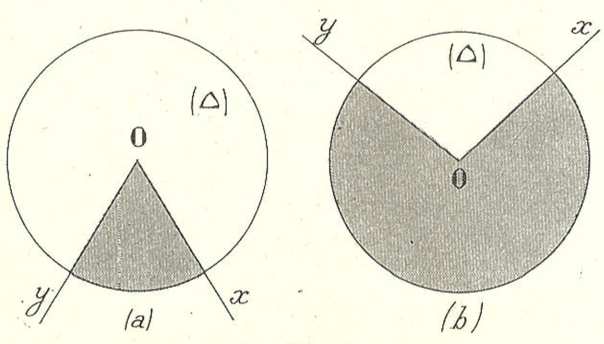


Fig. 629 a, b.

Le secteur de disque est convexe ou concave suivant que le secteur angulaire au centre est convexe ou concave.

630. Dièdre. Secteurs diédriques.

Un dièdre est l'ensemble de deux demi-plans p et q ayant la même droite-frontière Δ (fig. 630 *a*).

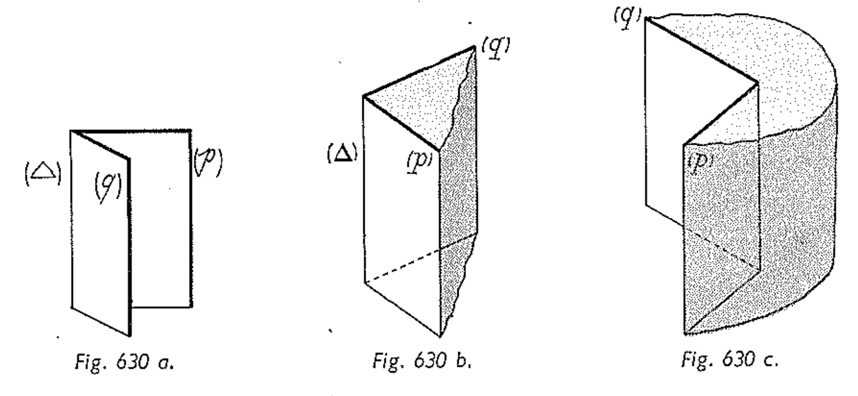


Fig. 630 a. *Fig. 630 b.* *Fig. 630 c.*

L'intersection de deux demi-espaces est un secteur diédrique convexe (fig. 630 *b*).

La réunion de deux demi-espaces sécants est un secteur diédrique concave (fig. 630 *c*).

Cours Painlevé

CHAPITRE XLV

ESPACES PROJECTIFS

631. La droite projective.

On considère le plan réel d'origine O, et l'ensemble des droites de ce plan qui passent par le point O (fig. 631 *a*).

Tout élément de cet ensemble, c'est-à-dire toute droite passant par O, peut être appelé un point de cet ensemble.

D'où :

Une droite projective est l'ensemble des droites du plan réel qui passent par le point O de ce plan.

On note cette droite projective P(R).

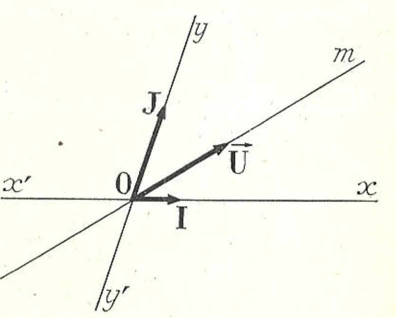


Fig. 631 a.

632. Coordonnées homogènes.

Un point de la droite projective, c'est-à-dire une droite *m* passant par O, est déterminée par un vecteur-directeur de la droite : $\vec{U}$ (X; T) (fig. 631 *a*). Le vecteur $\vec{U}$ n'étant pas nul, ses deux coordonnées (X; T) ne sont pas nulles en même temps.

Les nombres (X; T), qui déterminent la droite *m*, sont des coordonnées du point *m* de la droite P (R).

Quel que soit λ, le vecteur $\lambda\vec{U}$ est aussi un vecteur-directeur de la droite *m*, et les nombres (λX; λT) sont aussi des coordonnées du point *m* de la droite P (R). Pour cette raison on dit que :

Les nombres (X; T) sont des coordonnées homogènes du point* m *de la droite projective P (R).

Si la droite m *est distincte de la droite* x'Ox, T n'est pas nul et le vecteur $\vec{U}$ $(x; 1)$ est un vecteur directeur de *m* avec :

$$x = \frac{X}{T}.$$

Si la droite m *n'est autre que* x'Ox, T est nul et $\vec{U}$ (X; 0) est un vecteur-directeur de *m*.

633. Relation entre la droite réelle et la droite projective.

Dans le plan R^2, on considère la droite réelle Δ d'équation $y = 1$ (fig. 633 *a*).

Si la droite m *est distincte de la droite* x'Ox, elle coupe Δ en M; le vecteur $\overrightarrow{OM}$ a pour coordonnées $(x; 1)$ et $x = \overline{JM}$.

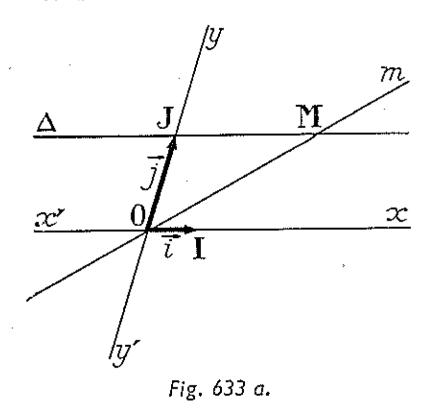


Fig. 633 a.

Si la droite m *n'est autre que* x'Ox, elle est strictement parallèle à Δ.

On envisage alors la fonction φ :

$$\varphi : m \in P(R) \longrightarrow \varphi(m) = M \in \Delta.$$

Cette fonction n'est pas définie pour $m = x'Ox$; ce n'est donc pas une application.

Elle est injective, car :

$$m \neq m' \Rightarrow M \neq M'$$

Elle est surjective, car tout point M de Δ est l'image de la droite OM. Autrement dit, *φ est une fonction bijective, non définie pour* m = x'Ox.

634. Complétion projective de la droite réelle.

La fonction φ n'est pas définie pour $m = x'Ox$. Afin de transformer φ en une application de P (R) sur Δ = R, on est amené à ajouter à la droite réelle R un point qui est l'image par φ de $x'Ox$.

Ce point est appelé le point à l'infini de la droite réelle R.
On dit qu'on a complété projectivement la droite réelle R.

Le point est noté ∞, et la droite complétée est notée R' : $R' = \{ R; \infty \}$.
La fonction φ est une application bijective de P (R) sur R'.

Cette application bijective permet alors d'identifier P (R) et R'.

Aussi par la suite, on appellera droite projective, la droite réelle complétée projectivement :

$$P(R) = \{R ; \infty\}$$

(X; T) sont les coordonnées homogènes d'un point de la droite projective; si T n'est pas nul, le point appartient à R; le point de coordonnées (X; 0) est le point à l'infini de la droite projective.

635. Division d'un vecteur lié dans un rapport donné[1].

Soit un vecteur lié $\overrightarrow{AB}$ sur l'axe $x'Ox$ (fig. 635 *a*).

Fig. 635 a.

On dit que le point M de l'axe x'Ox partage le vecteur lié $\overrightarrow{AB}$ dans le rapport k si

$$\frac{\overrightarrow{MA}}{\overrightarrow{MB}} = k \qquad (635;\ 1)$$

ou

$$\overrightarrow{MA} - k \cdot \overrightarrow{MB} = 0. \qquad (635;\ 2)$$

Si $k \neq 1$, ou $1 - k \neq 0$, M est le barycentre des points massifs A (1) et B $(-k)$. Donc :

Il existe un point M unique partageant le vecteur $\overrightarrow{AB}$ dans le rapports $k \neq 1$.

En prenant A comme origine des abscisses, on a :

$$\overline{AM} = \frac{(-k) \cdot \overline{AB}}{1 - k}$$

ou

$$\overline{AM} = \frac{k}{k-1} \cdot \overline{AB}.$$

Si $k = 1$, on doit avoir $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MB}$, ce qui est impossible; donc :

Il n'y a pas de point de la droite réelle R divisant le vecteur $\overrightarrow{AB}$ dans le rapport k = 1.

(1) Les n°s 635 à 645 sont présentés de façon métrique.

Toutefois on peut dire que :

Le point à l'infini de la droite projective partage le vecteur $\overrightarrow{AB}$ dans le rapport k = 1.

La figure suivante indique le signe de k suivant la position de M sur l'axe :

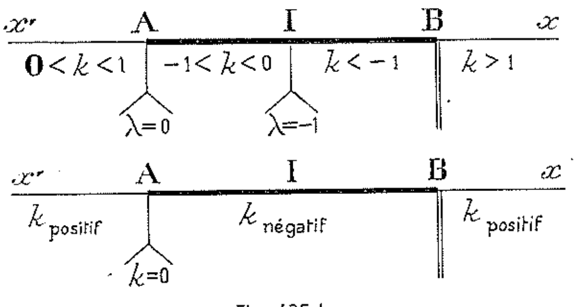


Fig. 635 b.

636. Birapport d'un quaterne.

Un quaterne de points est une suite de quatre points (A; B; C; D) situés sur un axe x'Ox.

On appelle birapport (ou rapport anharmonique) de ce quaterne le nombre ρ :

$$\rho = \frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} : \frac{\overline{DA}}{\overline{DB}} \qquad (636;1)$$

(A; B) est le couple gauche, (C; D) est le couple droit du quaterne. Les points A et D sont les extrêmes; B et C sont les moyens du quaterne.

On note :

$$\rho = (A, B, C, D) \qquad (636;2)$$

Si a, b, c, d sont les abscisses respectives des point A, B, C, D, le birapport ρ s'exprime par :

$$\rho = \frac{a-c}{b-c} : \frac{a-d}{b-d} \qquad (636;3)$$

Le nombre ρ est aussi appelé le birapport de la suite (a; b; c; d) des quatre nombres a, b, c, d.

637. Birapports d'un ensemble de quatre points .

Soit {A; B; C; D} un ensemble de quatre points (fig. 637 *a*). Avec ces quatre points on peut former 4! = 24 quaternes (nombre de permutations de 4 éléments). Il semble donc qu'à l'ensemble {A; B; C; D} soient

associés 24 birapports. En fait certains de ces birapports sont toujours égaux.

C A B D

Fig. 637 a.

On pose :

$$\rho = (A, B; C, D) = \frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} : \frac{\overline{DA}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{CA} \cdot \overline{DB}}{\overline{CB} \cdot \overline{DA}}.$$

1° **Permutation des couples.**

On se propose de calculer :

$$(C, D; A, B) = \frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} : \frac{\overline{BC}}{\overline{BD}}$$

Or :

$$(C, D; A, B) = \frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} : \frac{\overline{BC}}{\overline{BD}}$$

$$= \frac{\overline{CA}}{\overline{DA}} \cdot \frac{\overline{DB}}{\overline{CB}}$$

$$= \rho$$

ou

$$(C, D; A, B) = (A, B; C, D)$$

Et :

Si on permute les couples d'un quaterne, le birapport ne change pas.

2° **Permutation des points de chaque couple.**

On se propose de calculer :

$$(B, A; D, C) = \frac{\overline{DB}}{\overline{DA}} : \frac{\overline{CB}}{\overline{CA}}.$$

Or :

$$(B, A; D, C) = \frac{\overline{DB}}{\overline{DA}} \cdot \frac{\overline{CA}}{\overline{CB}}$$

$$= \rho$$

ou

$$(B, A; D, C) = (A, B; C, D)$$

Et :

Si on permute les éléments de chaque couple d'un quaterne, le birapport ne change pas.

3° **Quaternes symétriques.**

Les quaternes (A, B; C, D) et (D, C; B, A) sont dits symétriques.

On se propose de calculer (D, C; B, A). On a :

$$(D, C; B, A) = (B, A; D, C) \quad \text{(Théorème 1°)}$$
$$= (A, B; C, D) \quad \text{(Théorème 2°)}$$

Et :

Deux quaternes symétriques ont le même birapport.

4° **Permutation des éléments d'un couple.**

On se propose de calculer :

$$(B, A; C, D) = \frac{\overline{CB}}{\overline{CA}} : \frac{\overline{DB}}{\overline{DA}}$$

Or :

$$(B, A; C, D) = \frac{\overline{CB}}{\overline{CA}} \cdot \frac{\overline{DA}}{\overline{DB}}$$
$$= \frac{1}{\rho}$$

Et :

Si on permute les éléments d'un couple d'un quaterne, on doit inverser le birapport.

5° **Permutation des moyens ou des extrêmes.**

On se propose de calculer :

$$(A, C; B, D) = \frac{\overline{BA}}{\overline{BC}} : \frac{\overline{DA}}{\overline{DC}}$$

obtenu en permutant les moyens du quaterne (A; B; C; D).

D'après le théorème d'Euler appliqué aux quatre points A, B, C, D de l'axe de $x'Ox$:

$$\overline{DA} \cdot \overline{BC} \cdot + \overline{DB} \cdot \overline{CA} + \overline{DC} \cdot \overline{AB} = 0.$$

En divisant par $\overline{DA} \cdot \overline{BC}$, on obtient :

$$1 + \frac{\overline{DB} \cdot \overline{CA}}{\overline{DA} \cdot \overline{BC}} + \frac{\overline{DC} \cdot \overline{AB}}{\overline{DA} \cdot \overline{BC}} = 0$$

$$1 - \frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} \cdot \frac{\overline{DB}}{\overline{DA}} - \frac{\overline{BA}}{\overline{BC}} \cdot \frac{\overline{DC}}{\overline{DA}} = 0$$

ou

$$(A, C; B, D) = 1 - (A, B; C, D)$$
$$= 1 - \rho$$

D'autre part, si au lieu de permuter les moyens, on permute les extrêmes, on a :

$$\begin{aligned}(D, B; C, A) &= (C, A; D, B) && \text{(Théorème 1°)}\\ &= (A, C; B, D) && \text{(Théorème 2°)}\\ &= 1 - (A, B; C, D) && \text{(Résultat précédent)}\\ &= 1 - \rho.\end{aligned}$$

Donc :

Si on permute les moyens, ou les extrêmes, d'un quaterne, le nouveau birapport est le complément à 1 du premier birapport.

6° **Conclusion.**

Les théorèmes 1 et 2 (le troisième théorème est une conséquence des deux autres) montrent qu'il ne peut y avoir, au plus, que 6 valeurs distinctes pour les 24 birapports des 24 quaternes de l'ensemble $\{A; B; C; D\}$.

Ces 6 birapports sont :

$$\rho; \quad \frac{1}{\rho}; \quad 1 - \rho$$

$$1 - \frac{1}{\rho} = \frac{\rho - 1}{\rho}$$

$$\frac{1}{1 - \rho} \quad \text{et} \quad \frac{\rho}{\rho - 1}$$

On peut les disposer dans le tableau de la figure 637 *b* suivante :

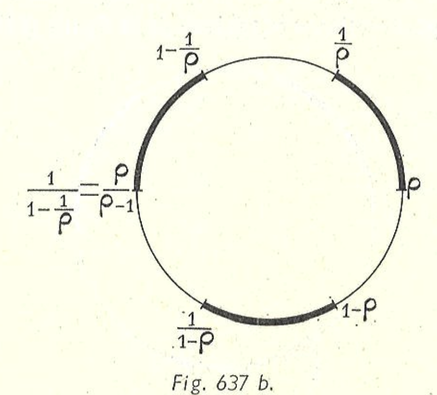


Fig. 637 b.

Les traits forts indiquent un passage à l'inverse; les traits faibles indiquent un complément à l'unité.

638. Quaterne harmonique.

Un quaterne est dit harmonique si son birapport est — 1.

On a alors (fig. 638 *a*)

Fig. 638 a.

$$\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} : \frac{\overline{DA}}{\overline{DB}} = -1 \qquad (638;1)$$

ou

$$\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = -\frac{\overline{DA}}{\overline{DB}} \qquad (638;2)$$

ou

$$\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} + \frac{\overline{DA}}{\overline{DB}} = 0 \qquad (638;3)$$

ou

$$\overline{CA} \cdot \overline{DB} + \overline{DA} \cdot \overline{CB} = 0 \qquad (638;4)$$

Les autres birapports de l'ensemble $\{A; B; C; D\}$ sont :

$$\frac{1}{\rho} = -1 \qquad 1 - \rho = 2 \qquad \frac{1}{1-\rho} = \frac{1}{2} \qquad 1 - \frac{1}{\rho} = 2 \qquad \frac{\rho}{\rho - 1} = \frac{1}{2}.$$

On peut les disposer suivant le tableau de la figure (638 *b*) suivante :

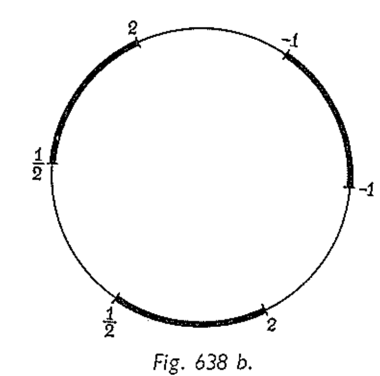


Fig. 638 b.

Il n'y a plus que 3 birapports différents.

639. Points conjugués harmoniques.

Soient deux points A, B et un point C de la droite AB tel que (fig. 638 *a*)

$$\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = k \qquad (k \neq \pm 1) \qquad (639;1)$$

On considère le point D de la droite AB tel que :

$$\frac{\overline{DA}}{\overline{DB}} = -k \qquad (639;2)$$

Le quaterne (A; B; C; D) est harmonique; et on dit que :

D est le conjugué harmonique de C par rapport à AB;
C est le conjugué harmonique de D par rapport à AB;

et que :

C et D sont conjugués harmoniques par rapport à AB.

D'autre part :

$$(A, B; C, D) = -1 \Rightarrow (C, D; A, B) = -1$$

Donc :

A et B sont conjugués harmoniques par rapport à CD.

640. Quaterne harmonique particulier.

Si $k = -1$, C est le milieu I du segment AB, et alors D est le point à l'infini de la droite AB (fig. 640 *a*).

A I B

Fig. 640 a.

Donc :

(A, B; I, ∞) est un quaterne harmonique.

641. Condition générale d'harmonicité.

Si a, b, c, d sont les abscisses des points A, B, C, D, la relation caractéristique (638; 4) s'écrit :

$$(a - c)(b - d) + (a - d)(b - c) = 0$$

c'est-à-dire, après avoir effectué et regroupé :

$$2(ab + cd) = (a + b)(c + d). \qquad (641;1)$$

et on peut énoncer :

Une condition nécessaire et suffisante pour que quatre points A, B, C, D situés sur un axe et ayant a, b, c, d pour abscisses respectives, forment un quaterne harmonique est que l'on ait la relation :

$$2(ab + cd) = (a + b)(c + d).$$

642. Les deux conditions de Newton.

Si on prend comme origine de l'axe le milieu I de AB, on a $b = -a$ (fig. 642 *a*), et la condition générale (218; 1) devient :

$$-a^2 + cd = 0 \quad \text{ou} \quad a^2 = cd$$

ou encore : $\overline{IC}\,.\,\overline{ID} = \overline{IA}^2$ (642;1)

Fig. 642 a.

D'où l'énoncé :

Une condition nécessaire et suffisante pour que quatre points A, B, C, D situés sur un axe forment un quaterne harmonique, si I est le milieu de AB, est que l'on ait la relation

$$\overline{IA}^2 = \overline{IC} \cdot \overline{ID}.$$

C'est la condition de Newton relative au milieu I de AB.

Elle montre que le produit $\overline{IC} \cdot \overline{ID}$ est positif, donc que C et D sont du même côté par rapport à I.

Si H est le milieu de CD, on a une seconde condition de Newton :

$$\overline{HC}^2 = \overline{HA} \cdot \overline{HB} \qquad (642;2)$$

643. Les quatre conditions de Descartes.

Si on prend comme origine de l'axe le point A, on a alors $a = 0$, et la condition générale (641; 1) devient :

$$\begin{aligned} 2\,cd &= b\,(c + d) \\ &= bc + bd \end{aligned}$$

et en divisant par bcd :

$$\frac{2}{b} = \frac{1}{c} + \frac{1}{d}$$

on encore :

$$\frac{2}{\overline{AB}} = \frac{1}{\overline{AC}} + \frac{1}{\overline{AD}}.$$

D'où l'énoncé :

Une condition nécessaire et suffisante pour que quatre points A, B, C, D situés sur un axe forment un quaterne harmonique est que l'on ait la relation :

$$\frac{2}{\overline{AB}} = \frac{1}{\overline{AC}} + \frac{1}{\overline{AD}}. \qquad (643;1)$$

C'est la condition de Descartes relative au point A.

On peut écrire trois autres conditions de Descartes relatives aux points B, C, D :

$$\frac{2}{\overline{BA}} = \frac{1}{\overline{BC}} + \frac{1}{\overline{BD}} \qquad (643;2)$$

$$\frac{2}{\overline{CD}} = \frac{1}{\overline{CA}} + \frac{1}{\overline{CB}} \qquad 643;3)$$

$$\frac{2}{\overline{DC}} = \frac{1}{\overline{DA}} + \frac{1}{\overline{DB}} \qquad (643;4)$$

644. Les quatre conditions de Mac-Laurin.

Le point A est encore pris comme origine. On a :

$$2\,cd = b\,(c + d)$$

ou :

$$cd = b \cdot \frac{c + d}{2}$$

En remarquant que $\frac{c+d}{2}$ est l'abscisse du milieu H de CD, cette relation s'écrit :

$$\overline{AC} \cdot \overline{AD} = \overline{AB} \cdot \overline{AH}$$

D'où l'énoncé :

Une condition nécessaire et suffisante pour que quatre points A, B, C, D situés sur un axe forment un quaterne harmonique, si H est le milieu de CD, est que l'on ait la relation

$$\overline{AC} \cdot \overline{AD} \cdot = \overline{AB} \cdot \overline{AH} \qquad (644;1)$$

C'est la condition de Mac-Laurin relative au point A.

On peut écrire trois autres conditions de Mac-Laurin relatives au point B, C, D :

$$\overline{BC} \cdot \overline{BD} = \overline{BA} \cdot \overline{BH} \qquad (644;2)$$

$$\overline{CA} \cdot \overline{CB} = \overline{CD} \cdot \overline{CI} \qquad (644;3)$$

$$\overline{DA} \cdot \overline{DB} = \overline{DC} \cdot \overline{DI} \qquad (644;4)$$

645. Remarque importante.

En divisant (644; 1) par (644; 2) on obtient :

$$-\frac{\overline{AH}}{\overline{BH}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} \cdot \frac{\overline{AD}}{\overline{BD}}$$

ou

$$-\frac{\overline{HA}}{\overline{HB}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} \cdot \frac{\overline{DA}}{\overline{DB}}$$

c'est-à-dire, en tenant compte de (639; 1) et (639; 2).

$$\frac{\overline{HA}}{\overline{HB}} = +k^2 \qquad (645;1)$$

D'où l'énoncé :

Si deux points C et D partagent un vecteur $\overrightarrow{AB}$ dans le rapport arithmétique k, le milieu H de CD partage le même vecteur $\overrightarrow{AB}$ dans le rapport relatif $+ k^2$.

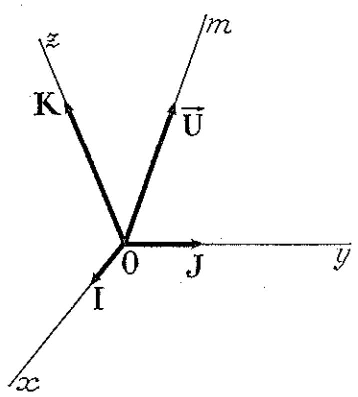


Fig. 646 a.

646. Le plan projectif.

On considère l'espace réel R^3 d'origine O, et l'ensemble des droites de l'espace qui passent par le point O (fig. 646 *a*).

Tout élément de cet ensemble, c'est-à-dire toute droite passant par O, peut être appelé un point de cet ensemble.

D'où :

Un plan projectif est l'ensemble des droites de l'espace réel qui passent par le point O de cet espace.

On note ce plan projectif $P(R^2)$.

647. Coordonnées homogènes.

Un point du plan projectif, c'est-à-dire une droite m passant par O, est déterminée par un vecteur-directeur de la droite : $\vec{U}$ (X; Y; T) (fig. 646 *a*). Le vecteur $\vec{U}$ n'étant pas nul, ses trois coordonnées (X; Y; T) ne sont pas nulles en même temps.

Les nombres (X; Y; T) déterminent la droite m et sont des coordonnées du point m du plan projectif.

Quel que soit λ, le vecteur $\lambda\vec{U}$ est aussi un vecteur-directeur de la droite m; et les nombres (λX; λY; λT) sont aussi des coordonnées du point m du plan projectif. Pour cette raison on dit que :

Les nombres (X; Y; T) sont des coordonnées homogènes du plan projectif P (R²).

Si la droite m *n'est pas dans le plan* xOy, T n'est pas nul et le vecteur $\vec{U}$ (x; y; 1) est un vecteur-directeur de m avec :

$$x = \frac{X}{T} \quad \text{et} \quad y = \frac{Y}{T}$$

Si la droite m est dans le plan xOy, T est nul et $\vec{U}$ (X; Y; 0) est un vecteur-directeur de m.

648. Relation entre le plan réel et le plan projectif.

Dans l'espace R^3, on considère le plan réel π d'équation $z = 1$ (fig 648 *a*).

Si la droite m *n'est pas dans le plan* xOy, elle coupe π en M; le vecteur $\overrightarrow{OM}$ a pour coordonnées (x; y; 1); par suite (x; y) sont les coordonnées de M dans le plan π rapporté au repère (K; $\vec{i}$; $\vec{j}$).

Si la droite m *est dans le plan* xOy, elle est strictement parallèle à π.

On envisage alors la fonction :

$$\varphi \; : \; m \in P(R^2) \longrightarrow \varphi(m) = M \in \pi.$$

Cette fonction n'est pas définie pour les droites m situées dans le plan xOy : ce n'est donc pas une application.

Elle est injective car :

$$m \neq m' \Rightarrow M \neq M'$$

Fig. 648 *a*.

Elle est surjective, car tout point M de π est l'image de la droite OM. Autrement dit φ est *une fonction bijective, non définie pour* $m \subset xOy$.

649. Complétion projective du plan réel.

La fonction φ n'est pas définie pour $m \in xOy$.

Afin de transformer φ en une application de $P(R^2)$ sur $\pi = R^2$, on est amené à ajouter au plan réel R^2 des points qui sont les images par φ de droites du plan xOy qui passent par O.

Ces points sont appelés les points à l'infini du plan réel R^2.

On dit qu'on a complété projectivement le plan R^2.

L'ensemble des points du plan réel R^2 et des points à l'infini est noté P'.

La fonction φ est une application bijective de $P(R^2)$ sur le plan réel complété P'.

Cette application bijective permet alors d'identifier $P(R^2)$, et le plan réel complété P'.

Par la suite on appellera plan projectif le plan réel complété projectivement :

$$P' = P(R^2)$$

$(X; Y; T)$ sont les coordonnées homogènes d'un point du plan projectif. Si $T \neq 0$ le point appartient au plan réel R^2; le point de coordonnées $(X; Y; 0)$ est le point à l'infini de la droite passant par O et ayant pour vecteur-directeur $\vec{u}(X; Y)$.

650. Droites du plan projectif.

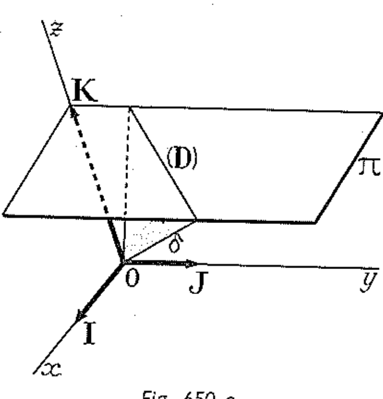


Fig. 650 a.

Un plan δ passant par O est une droite du plan projectif $P(R^2)$. Son image par φ, $D = \varphi(\delta) \subset P'$ est aussi une droite du plan projectif $P'\varphi$ (fig. 650 *a*).

Si le plan δ est distinct du plan xOy, il coupe π suivant une droite D d'équation

$$ux + vy + r = 0$$

ou $$u\frac{X}{T} + v \cdot \frac{Y}{T} + r = 0$$

ou $$uX + vY + rT = 0.$$

C'est l'équation homogène de D.

Si le plan δ n'est autre que le plan xOy, il contient les droites dont les images sont les points à l'infini; son image $\varphi(\delta)$ sera donc une droite dite droite de l'infini; et :

L'ensemble des points à l'infini du plan projectif est la droite de l'infini.

L'équation homogène de la droite à l'infini est $T = 0$ puisque tous ses points sont des points à l'infini.

651. Intersection de deux droites du plan projectif.

Soient les deux plans δ et δ' passant par O, et leur intersection *m*. Soient

$$D = \varphi(\delta), \quad D' = \varphi(\delta') \quad \text{et} \quad M = \varphi(\delta \cap \delta') = \varphi(\mu).$$

Si la droite m *n'est pas dans le plan* xOy, $D \cap D' = M$ est dans le plan réel (fig. 651 *a*).

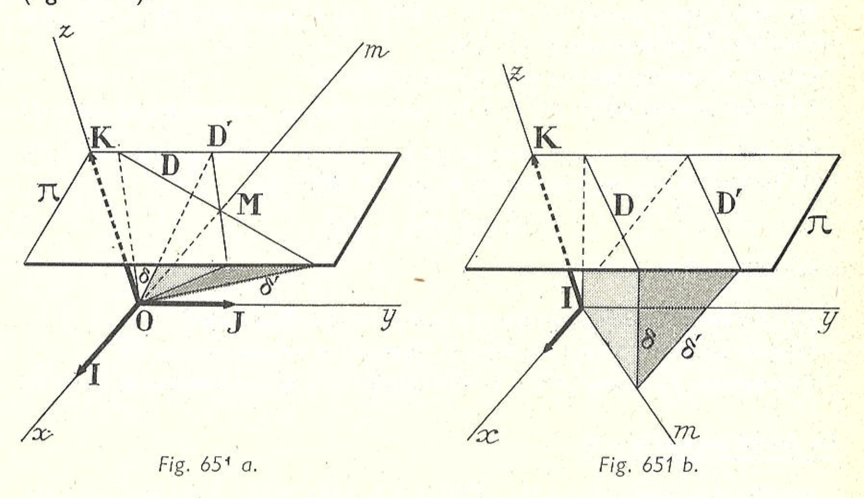


Fig. 651 a. *Fig. 651 b.*

Si la droite m *est dans le plan* xOy, D et D' sont parallèles, et M est un point à l'infini (fig. 651 *b*). Donc :

Deux droites parallèles se coupent sur la droite de l'infini.

EXERCICES ET PROBLÈMES SUR LE LIVRE IV.

Espaces ponctuels affines.

491. On considère l'espace K^2 avec $K = Z/5$.
Construire le diagramme de cet espace. Combien l'espace ponctuel K^2 contient-il de points ?

Marquer les points $A(\dot{3}; \dot{2})$ et $B(\dot{1}; \dot{4})$. Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

492. Dans l'espace ponctuel K^2 avec $K = Z/5$, marquer les points A $(\dot{1}; \dot{2})$ et B $(\dot{3}; \dot{0})$. Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$. Dessiner le diagramme.

On donne le point C $(\dot{2}; \dot{4})$. Construire le point D tel que $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$; quelles sont les coordonnées du point D ?

493. Dans l'espace ponctuel K avec $K = Z/7$, marquer les points A $(\dot{6})$, B $(\dot{3})$, C $(\dot{4})$. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AC}$; vérifier alors que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

494. On considère l'espace ponctuel K^3 avec $K = Z/7$, et les points A $(\dot{0}; \dot{1}; \dot{0})$, B $(\dot{3}; \dot{4}; \dot{6})$, C $(\dot{1}; \dot{6}; \dot{3})$ de cet espace. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$; vérifier que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = 0$.

Quelles sont les coordonnées du point M tel que $\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{AB}$?

495. Soit l'espace ponctuel K^3 avec $K = Z/11$. On donne le point A $(\dot{1}; \dot{7}; \dot{4})$ et le vecteur libre $\vec{U}$ de coordonnées $(\dot{3}; \dot{5}; \dot{4})$.

Calculer les coordonnées du point B tel que $\overrightarrow{AB} = \vec{U}$.

Comment peut-on définir $\overrightarrow{AM} = \dot{4}\ \vec{U}$? Quelles sont les coordonnées du point M ?

496. On considère l'espace ponctuel K^2 avec $K = Z/5$, et deux points A $(\dot{3}; \dot{1})$, B $(\dot{1}; \dot{4})$. Quelles sont les coordonnées du point M défini par

$$\overrightarrow{OM} = \dot{2}' \left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right)$$

si $(\dot{2}')$ désigne l'inverse de $\dot{2}$?

497. On donne l'ensemble ponctuel K^2 avec $K = Z/6$. Diagramme ?

Marquer les points A $(\dot{4}; \dot{1})$ et B $(\dot{0}; \dot{3})$. Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$.

Coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AM} = \dot{3} \cdot \overrightarrow{AB}$? Quelles sont les coordonnées du point M ?

La droite numérique R.

498. On donne les points A $(2 - \sqrt{3})$, B $(1 + \sqrt{3})$, C $(2 + \sqrt{3})$ d'un axe $x'Ox$. Calculer :

$$\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} \quad \text{et} \quad \frac{\overline{BA}}{\overline{BC}}$$

499. Sur un axe $x'Ox$ on marque les points A $(1 + \sqrt{5})$ et B $(2 - \sqrt{5})$. Déterminer un point M de cet axe tel que :

$$\overline{MA} + \sqrt{5} \cdot \overline{MB} = \overline{AB}$$

Calculer alors :

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}}.$$

500. Soient sur l'axe $x'Ox$, quatre points A $\left(\frac{2}{3}\right)$, B (-1), C $\left(\frac{4}{3}\right)$, D $\left(-\frac{1}{3}\right)$. Déterminer sur $x'Ox$ un point M tel que :

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} + \frac{\overline{MC}}{\overline{MD}} = 2.$$

501. Soient sur un axe réel les points A $(\sqrt{5}-1)$, B $(\sqrt{5}+2)$. Trouver sur l'axe un point M tel que :

$$3 \cdot \overline{MA} + 2 \cdot \overline{MB} = 2\sqrt{5} - 3.$$

502. On considère sur $x'Ox$ les points A et B ayant pour abscisses respectives $a = \dfrac{1+\sqrt{2}}{3-\sqrt{2}}$ et $b = \dfrac{2\sqrt{2}-1}{1+\sqrt{2}}$. Déterminer un point M de cet axe par la condition

$$\sqrt{2} \cdot \overline{MA} + 3 \cdot \overline{MB} = \frac{3+\sqrt{2}}{\sqrt{2}-3}.$$

503. Sur l'axe $x'Ox$ on donne les points A (2) et B (— 1). Etudier l'ensemble des points M qui satisfont à la condition :

$$MA^2 + MB^2 - \overline{MA} \cdot \overline{MB} = 13.$$

504. On donne sur l'axe $x'Ox$ les points A (— 2) et B (5). Étudier l'ensemble des points M qui satisfont à la condition

$$\overline{MA} + 3 \cdot \overline{MB} \leqslant \overline{AB}.$$

505. Sur un axe $x'Ox$ on donne les points A (5), B (— 4), C (2). Trouver les points M définis par la condition

$$MA^2 < \overline{MB} \cdot \overline{MC}.$$

506. Sur un axe on donne A $(1-\sqrt{2})$ et B $(3+\sqrt{2})$. Déterminer sur cet axe deux points M et N tels que :

$$\begin{cases} \overline{MA} + \overline{MB} = 6 - \sqrt{2} \\ 2 \cdot \overline{MA} + \overline{MN} = 16 + 3\sqrt{2}. \end{cases}$$

507. Soient deux points A (x_A) et B (x_B) d'un axe $x'Ox$. A ces deux points on associe le nombre

$$\delta\,(A\,;\,B) = \frac{|x_B - x_A|}{1 + |x_B - x_A|}.$$

Montrer que δ est une distance.

Droites et plans dans un espace affine K^n.

508. Dans le plan K^2, on considère le point A $(\dot{1};\ \dot{2})$ et le vecteur libre $\vec{U}\ (\dot{2};\dot{3})$; K étant le corps K = Z/5, déterminer les points constituant la doite D déterminée par le point A et le vecteur directeur $\vec{U}$.

Cette droite contient combien de points ?

509. Soit le corps K = Z/7. Dans le plan K^2 on donne le point A $(\dot{3};\ \dot{4})$. Déterminer la droite D passant par A et ayant $\vec{V}\ (\dot{6};\dot{3})$ comme vecteur-directeur.

510. Dans le plan K^2 (K = Z/5), on donne les points A $(\dot{3};\dot{1})$ et B $(\dot{2};\dot{4})$. Étudier la droite AB.

511. Soit le corps K = Z/19. Dans le plan K^2 on considère les points A $(\dot{3};\dot{7})$ et B $(\dot{10};\dot{4})$. Étudier la droite AB.

512. On considère le plan K^2 avec $K = Z/13$, et les points $A(\dot{3}; \dot{9})$, $B(\dot{10}; \dot{7})$, $C(\dot{4}; \dot{3})$, Le point C appartient-il à la droite AB?

513. On envisage le plan K^2 avec $K = Z/5$. Soient les droites :

$$D = D(A; \vec{U}) \text{ avec } A(\dot{0}; \dot{1}) \text{ et } \vec{U}(\dot{1}; \dot{1})$$
$$D' = D(B; \vec{V}) \text{ avec } B(\dot{0}; \dot{2}) \text{ et } \vec{V}(\dot{1}; \dot{4}).$$

Etudier les droites D et D'.
Déterminer $D \cap D'$.

514. Dans le plan K^2, avec $K = Z/5$, on donne $A(\dot{1}; \dot{2})$, $B(\dot{4}; \dot{4})$, $C(\dot{2}; \dot{2})$.
Étudier la droite AB.
Étudier la droite D passant par C et parallèle à AB.

515. Dans le plan K^2, avec $K = Z/5$, on donne les droites :

D, déterminée par $A(\dot{3}; \dot{4})$ et $B(\dot{0}; \dot{1})$
et
D', déterminée par $C(\dot{1}; \dot{2})$ et $\vec{U}(\dot{1}; \dot{1})$.

Ces deux droites sont-elles parallèles?

516. Dans l'espace K^3, on considère le point $A(\dot{1}; \dot{2}; \dot{1})$ et le vecteur $\vec{U}(\dot{0}; \dot{1}; \dot{3})$, K étant le corps $K = Z/5$.
Étudier la droite $D = D(A; \vec{U})$. De combien de points est-elle constituée?

517. Soit le corps $K = Z/7$. Dans l'espace K^3 on donne le point $A(\dot{5}; \dot{3}; \dot{2})$ et le vecteur libre $\vec{U}(\dot{6}; \dot{3}; \dot{2})$.
Étudier la droite D passant par A et ayant $\vec{U}$ comme vecteur-directeur.

518. Dans l'espace K^3 ($K = Z/5$), on donne les points $A(\dot{1}; \dot{3}; \dot{1})$, $B(\dot{2}; \dot{4}; \dot{1})$. Étudier la droite AB.

519. Dans l'espace K^3 ($K = Z/7$) on donne les points $A(\dot{6}; \dot{1}; \dot{4})$, $B(\dot{3}; \dot{2}; \dot{2})$ et $C(\dot{1}; \dot{4}; \dot{3})$.
Étudier la droite AB.
Étudier la droite D passant par A et parallèle à la droite AB.

520. Dans l'espace K^3 ($K = Z/5$) on donne les droites :

D, déterminée par $A(\dot{3}; \dot{4}; \dot{2})$ et $B(\dot{0}; \dot{1}; \dot{4})$
et
D,' déterminée par $C(\dot{1}; \dot{2}; \dot{4})$ et $\vec{U}(\dot{1}; \dot{1}; \dot{1})$

Ces deux droites sont-elles parallèles? Étudier $D \cap D'$.

521. Dans l'espace K^3, K étant le corps $K = Z/5$, on donne le point $A(\dot{3}; \dot{2}; \dot{2})$ et les vecteurs libres $\vec{U}(\dot{1}; \dot{1}; \dot{1})$ et $\vec{V}(\dot{1}; \dot{1}; \dot{2})$.
Montrer que $\vec{U}$ et $\vec{V}$ sont linéairement indépendants.
Étudier le plan P déterminé par le point A et les vecteurs-directeurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$. Combien le plan P contient-il de points?

522. Soit le corps $K = Z/5$. Dans l'espace K^3 on donne le plan P auquel appartient le point $A(\dot{2};\ \dot{3};\ \dot{2})$ et ayant $\vec{U}(\dot{1};\ \dot{2};\ \dot{3})$ et $\vec{V}(\dot{2};\ \dot{1};\ \dot{1})$ comme bivecteur-directeur. Déterminer les points de ce plan.

On envisage maintenant la droite D déterminée par les points $B(\dot{1};\ \dot{3};\ \dot{4})$ et $C(\dot{0};\ \dot{3};\ \dot{1})$. Déterminer les points de cette droite.

Etudier $P \cap D$.

523. Soit le corps $K = Z/31$. Dans l'espace K^3 on considère le plan P et la droite D :

P, déterminée par $A(\dot{4};\ \dot{17};\ \dot{3})$, $\vec{U}(\dot{2};\ \dot{3};\ \dot{1})$, $\vec{V}(\dot{1};\ \dot{9};\ \dot{7})$

et

D, déterminée par $B(\dot{4};\ \dot{11};\ \dot{19})$ et $C(\dot{3};\ \dot{13};\ \dot{4})$.

Étudier $P \cap D$.

524. Dans l'espace K^3 ($K = Z/5$), on donne :

— la droite $D = D(A;\ B)$ avec $A(\dot{4};\ \dot{3};\ \dot{1})$ et $B(\dot{1};\ \dot{1};\ \dot{2})$

— le plan $P = P(\Omega;\ \vec{U};\ \vec{V})$ avec $\Omega(\dot{1};\ \dot{2};\ \dot{0})$, $\vec{U}(\dot{1};\ \dot{1};\ \dot{1})$, $\vec{V}(\dot{1};\ \dot{2};\ \dot{0})$.

Étudier $D \cap P$.

Espaces réels affines.

525. Soit le plan réel R^2. On donne $A(1;\ 2)$ et $B(-1;\ 3)$.

Trouver les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Quelles sont les équations paramétriques de la droite AB ?

526. On donne les points $A(\sqrt{3}-1;\ 0)$ et $B(\sqrt{3}+1;\ 3)$.

Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Quel est le coefficient directeur de la droite AB ? Quelle est l'équation implicite de cette droite ?

Donner les équations paramétriques de la droite AB.

527. Déterminer les équations implicites des droites définies par les couples de points suivants :

$A(3;\ 2)$ et $B(-1;\ -2)$ $\qquad$ $A(-1;\ 4)$ et $C(2;\ -4)$

$S(-2;\ 2)$ et $M(\alpha;\ \beta)$ $\qquad$ $I(5;\ -4)$ et $M(-2t;\ 4t+1)$.

528. Par le point $A(-0{,}5;\ 0{,}8)$ on mène la droite D dont le coefficient-directeur est $a = \frac{7}{2}$. Trouver l'équation de D.

529. Les droites (D) et (D') d'équations :

$$y = -\frac{x}{3} + 2$$

et

$$x + 3y - 3 = 0.$$

sont-elles parallèles ?

530. Soient les points $A(1;\ 3)$, $B(6;\ 1)$, $C(-2;\ -2)$. Équation de la droite D passant par A et parallèle à BC.

531. Soient les trois droites

$$(D) \quad x - 3y + 3 = 0$$
$$(D') \quad 2x - y + 6 = 0$$
$$(\Delta) \quad x - y = m$$

m étant un paramètre.
Déterminer m pour que Δ passe par le point d'intersection de (D) et (D').

532. On donne les deux droites :

$$(D) \quad (m + 1)\,x + (m - 1)\,y = m$$
$$(D') \quad mx + (m + 1)\,y = m - 1.$$

Pour quelle valeur de m ces droites sont-elles parallèles ?
Peuvent-elles être confondues ?

533. Soit la famille de droites d'équation

$$2\,mx + (2\,m + 1)\,y - 4 = 0.$$

Montrer que toutes les droites de la famille passent par un point fixe. Quelles sont les coordonnées de ce point ?

534. Soit l'ensemble de droites

$$(D_m) \qquad (3\,m - 1)\,x - (2\,m + 1)\,y + m = 0.$$

Déterminer la droite de cet ensemble passant par le point A (2; − 1).
Déterminer m pour que la droite (D_m) soit parallèle à la droite $x - 2\,y = 0$.

535. On donne l'ensemble de droites.

$$(D_m) \qquad 2\,(m - 2)\,x - my + m + 3 = 0.$$

1° Montrer que toutes les droites (D_m) passent par un point fixe I; calculer les coordonnées de ce point I.

2° Déterminer la droite de l'ensemble qui passe par le point A (− 1; 2).

3° Quelle est la droite de l'ensemble qui passe par l'origine ?

4° Déterminer la droite de l'ensemble ayant pour vecteur-directeur $\vec{U}$ (2; 1).

536. Soit le vecteur $\overrightarrow{AB}$ avec $A\left(\sqrt{2} - 1; \sqrt{2} + 1\right)$, $B\left(2 - \sqrt{2}; 3 - 2\sqrt{2}\right)$. On considère le point M de la droite AB tel que

$$\overrightarrow{AM} = \frac{\sqrt{2} + 1}{2\sqrt{2} - 3} \cdot \overrightarrow{AB}$$

Calculer $\overrightarrow{OM}$ en fonction de $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$. Calculer les coordonnées de M. Évaluer $\dfrac{\overrightarrow{MA}}{\overrightarrow{MB}}$.

537. Soient les points A (3; 1; − 1) et B (1; − 2; 3) de l'espace R^3.
Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$.
Déterminer les équations paramétriques de la droite AB.

538. Soient le point A (− 1; − 2; 3) et le vecteur libre $\vec{U}$ (1; 1; 1). Déterminer les équations paramétriques de la droite $D = D\,(A; \vec{U})$.

539. Soient les points A (3; − 1; 2), B (0; 1; 3) et C (1; − 1; 0). Déterminer les équations biparamétriques du plan ABC, et l'équation implicite de ce plan.

540. Soient le point A $(1; -1; 2)$ et les vecteurs libres $\vec{U}(1; 1; -1)$, $\vec{V}(-1; 1; 1)$. Déterminer le plan $P = P(A; \vec{U}; \vec{V})$.

541. Les points $A(-2; 1)$, $B(1; -2)$, $C\left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$ sont-ils alignés ?

542. Étudier l'alignement des points suivants :

1° $A(a; b+c)$, $B(b; c+a)$, $C(c; a+b)$

2° $A\left(2; \frac{4}{3}\right)$; $B\left(\frac{5}{3}; \frac{5}{4}\right)$, $C\left(\frac{5}{3}; \frac{6}{5}\right)$.

543. Dans l'espace R^3 on donne les points A, B, C. Étudier l'alignement de ces points.

1° $A(1; 2; 3)$ $B(1; 3; 5)$ $C(2; -1; 4)$

2° $A(2; -1; 3)$ $B(4; 1; 5)$ $C(-1; -4; 0)$.

544. Dans l'espace R^2 on donne les points $A(2; 3)$, $B(-2; -3)$, $C(2; -1)$. Calculer les coordonnées des milieux des segments BC, CA, AB. Déterminer les équations des médianes du triangle ABC.

545. Dans l'espace R^3, on donne le triangle ABC :

$A(2; 1; 3)$ $B(-1; -5; 3)$ $C(-1; -2; 4)$

Calculer les coordonnées des milieux des côtés. Déterminer les équations paramétriques des médianes du triangle ABC.

Espaces réels métriques.

546. Soient les vecteurs $\overrightarrow{OA}(2; -3)$ et $\overrightarrow{OA'}(-1; 3)$. Calculer $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OA'}$.

547. Soient les vecteurs $\overrightarrow{OA}(\alpha; \beta)$ et $\overrightarrow{OB}(-\beta; \alpha)$. Calculer $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$. Que peut-on déduire du résultat ?

548. Soient les vecteurs :

$$\overrightarrow{OU}\left(\frac{2}{3}; -\frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right) \quad \overrightarrow{OV}\left(\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right) \quad \overrightarrow{OW}\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right).$$

Montrer que ces trois vecteurs forment un repère orthonormé direct de l'espace R^3.

549. Soient les points $A(-2; -3)$ et $B(1; 1)$. Calculer $d(A; B)$.

550. Soient les points $A\left(\frac{1}{2} - \sqrt{2}; -\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$ et $B\left(-\frac{1+\sqrt{2}}{2}; \frac{1-\sqrt{2}}{2}\right)$.

Calculer la norme euclidienne du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

551. Soit le vecteur $\overrightarrow{AB}$: $A(3; -3)$ et $B(-2; +3)$. Utiliser le produit scalaire pour trouver l'équation de la perpendiculaire en A au segment AB.

552. Soient les points A (6; − 1) et B (− 4; 1). Trouver l'équation de la médiatrice du segment AB :
a) en utilisant le produit scalaire,
b) en utilisant les distances de M (x; y) à A et B.

553. Soient A $(3\sqrt{2}; -3)$ et B $(\sqrt{3}; \sqrt{6})$.
Calculer les longueurs des côtés du triangle OAB.

554. On donne le triangle ABC : A (− 6; 2), B (6; − 7), C $\left(6; \frac{11}{2}\right)$.
Déterminer les équations des hauteurs, et les coordonnées de l'orthocentre de ce triangle.
Calculer les longueurs des hauteurs.

555. Soit un tétraèdre OABC, trirectangle en O.
OH étant la hauteur du triangle OBC, montrer à l'aide du produit scalaire, que AH est hauteur du triangle ABC. Montrer que les plans OAH et ABC sont perpendiculaires.

556. ABC est un triangle équilatéral de côté a. Soient $x'Bx$ et $y'Cy$ les axes perpendiculaires en B et C au plan du triangle; ces axes sont orientés dans le même sens. On marque sur $x'Bx$ le point M tel que $\overline{BM} = x$ et sur $y'Cy$ le point P tel que $\overline{CP} = y$.
Trouver une relation entre x et y pour que l'angle MAP soit droit. (Utiliser de préférence le produit scalaire $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AP}$).

557. On considère deux triangles équilatéraux, ABC et ABD non situés dans le même plan. On désigne en outre par M le milieu de AB et par P le milieu de CD.
Démontrer que MP est perpendiculaire à AB et à CD.

558. Un cube ABCDA'B'C'D' a pour arêtes $\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{BB'}$, $\overrightarrow{CC'}$, $\overrightarrow{DD'}$.
Calculer $\overrightarrow{AC'} \cdot \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AC'} \cdot \overrightarrow{CD'}$. En déduire les angles $(\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AC'})$ et $(\overrightarrow{AC'}; \overrightarrow{CD'})$.

559. Soit le tétraèdre ABCD. Montrer que :

$$(AB \perp CD \text{ et } AC \perp BD) \Rightarrow AD \perp BC.$$

560. Dans le plan orthonormé, on donne A (2; 4), B (3; 5), M (λ; 0).
Déterminer λ pour que :
— les points A, B, M, soient alignés;
— $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{BM}$;
— $\cos\left(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AM}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

561. L'espace R^3 étant rapporté à un repère orthonormé (Ox; Oy; Oz), on donne A (a; 0; 0), B (0; b; 0), C (0; 0; c). On désigne par A', B', C' les milieux respectifs de BC, CA, AB, et par G le centre de gravité du triangle ABC.

1° Montrer que

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{OC'} = 3 \cdot \overrightarrow{OG}.$$

2° Calculer :

$$\overrightarrow{OG} \cdot \overrightarrow{AA'}; \quad \overrightarrow{OG} \cdot \overrightarrow{BB'}; \quad \overrightarrow{OG} \cdot \overrightarrow{CC'}.$$

Quelle relation doivent vérifier a, b, c pour que OG soit orthogonal à AA' ?

562. Dans un triangle ABC, on pose AB = c et AC = b.

Soient $\vec{u} = \dfrac{\overrightarrow{BA}}{\|\overrightarrow{BA}\|}$ et $\vec{v} = \dfrac{\overrightarrow{AC}}{\|\overrightarrow{CA}\|}$.

A quelle droite remarquable du triangle est parallèle le vecteur :

1° $\vec{u} + \vec{v}$

2° $\vec{u} - \vec{v}$

3° $c \cdot \vec{u} + b \cdot \vec{v}$

4° $c \cdot \vec{u} - b \cdot \vec{v}$

5° $c \cdot \vec{v} + b \cdot \vec{u}$

6° $c \cdot \vec{v} - b \cdot \vec{u}$.

Cas particulier où $b = c$.

563. Soit le triangle ABC; le côté BC étant partagé en n segments égaux, trouver la somme des vecteurs ayant tous pour origine le point A, et pour extrémités, B, C et les $n - 1$ points de division de BC.

564. ABCD étant un tétraèdre, montrer que

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}.$$

Exprimer le résultat en utilisant deux points particuliers du tétraèdre.

565. Soient $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$, avec angle $(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB}) = \theta$, OA = a, OB = b.
Calculer $\|\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\|$

566. Montrer que le vecteur

$$\overrightarrow{\varphi(M)} = \overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MB} \wedge \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC} \wedge \overrightarrow{MA}$$

est indépendant du point M.
Interpréter géométriquement la condition $\varphi(\vec{M}) = 0$.

Barycentration.

567. Soit un triangle ABC : A (— 2; — 1), B (3; 2), C (0; 4).
Calculer les coordonnées du centre de gravité G de ce triangle.

568. Soient quatre points A (— 1; 2; 1); B (1; — 4; 3); C (2; 2; 2); D (2; — 4; — 2).
Calculer les coordonnées de l'isobarycentre de ces quatre points.
Déterminer A′, B′, C′, D′, isobarycentres des triangles BCD, CDA, DAB, ABC.

569. Soient un triangle ABC, son centre de gravité G et son orthocentre H.
Démontrer :

$$\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = 3 \cdot \overrightarrow{HG}.$$

570. On donne les points massifs A (2), B (— 1), C (1), avec A (— 1; 0), B (0; 2). C (3; — 2).
Déterminer le barycentre G de ces points.

571. Soient un triangle ABC et son centre de gravité G. On considère les points A′, B′, C′ partageant les vecteurs $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{AB}$ dans le rapport λ.

1° Démontrer la formule :

$$\overrightarrow{GB} = \lambda \cdot \overrightarrow{GC} + (1 - \lambda)\,\overrightarrow{GA'}.$$

2° Montrer que G est le centre de gravité du triangle A′B′C′.

572. Soient trois vecteurs liés $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{B_1B_2}$, $\overrightarrow{C_1C_2}$, G_1 et G_2 les centres de gravité des triangles $A_1B_1C_1$ et $A_2B_2C_2$.
Calculer $\overrightarrow{G_1G_2}$ en fonction des vecteurs donnés.
Que peut-on dire si les trois vecteurs donnés sont parallèles.

573. Soient un quadrilatère ABCD, I le milieu de AB et J le milieu de CD.
Évaluer $\overrightarrow{IJ}$ en fonction de $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BC}$.
Montrer que le milieu de IJ est l'isobarycentre des points A, B, C, D.

574. Le plan est rapporté à deux axes orthonormés $x'Ox$ et $y'Oy$. On considère les droites $x = a$ et $x = -a$ coupant respectivement $x'Ox$ en A et B. Soient sur ces droites les points A′ et B′. ($a \in \mathrm{R}$).

1° On suppose que $\overline{AA'} + \overline{BB'} = 2a$. Montrer que la droite A′B′ passe par un point fixe O′ situé sur $y'Oy$.

2° On suppose maintenant que $2 \cdot \overline{AA'} - \overline{BB'} = 4a$. On pose $\overline{AA'} = \lambda$. Calculer, en fonction de λ, les coordonnées des points A′ et B′. Déterminer l'équation de la droite A′B′. Montrer que cette droite passe par un point fixe.

3° Soient I le barycentre des points massifs A (2) et B (− 1), et I′ le barycentre des points massifs A′ (2) et B′ (− 1).
Montrer que la droite II′ est parallèle à $y'Oy$.
Évaluer $\overrightarrow{II'}$ en fonction de $\overrightarrow{AA'}$ et $\overrightarrow{BB'}$. En déduire à nouveau que la droite A′B′ telle que $2\,\overline{AA'} - \overline{BB'} = 4a$ passe par un point fixe.

575. On donne les points A (3; 2) et B $\left(-\frac{3}{2}; -1\right)$; à ces points sont associés les masses $\alpha = 1$ et $\beta = 2$.

1° Déterminer le barycentre G des points A et B.

2° On considère la fonction de point $f(\mathrm{M}) = \alpha\,\mathrm{MA}^2 + \beta\,\mathrm{MB}^2$. Calculer $f(\mathrm{M})$ en fonction des coordonnées x et y du point M.

3° Montrer que :

$$f(\mathrm{M}) = f(\mathrm{G}) + 3 \cdot \mathrm{MG}^2.$$

576. Soient quatre points A,B,C,D, I le milieu du segment AB, J le milieu du segment CD et G le barycentre des points massifs I (α) et J (β). ($\alpha + \beta \neq 0$).

1° Montrer que G est le barycentre des points massifs A (α), B (α), C (β), D (β)

2° En déduire que

$$\alpha \cdot \overrightarrow{MA} + \alpha \cdot \overrightarrow{MB} + \beta \cdot \overrightarrow{MC} + \beta \cdot \overrightarrow{MD} = 2(\alpha + \beta) \cdot \overrightarrow{MG}.$$

3° Etudier l'ensemble des points M tels que les vecteurs

$$\alpha \cdot \overrightarrow{MA} + \alpha \cdot \overrightarrow{MB} + \beta \cdot \overrightarrow{MC} + \beta\,\overrightarrow{MD}$$

et $\vec{u}$ soient parallèles, $\vec{u}$ étant un vecteur donné. Équation vectorielle de cet ensemble ?

577. On donne les points A, B, C.

Ensemble des points M tels que :

$$\overrightarrow{MA} + 2 \cdot \overrightarrow{MB} - 3 \cdot \overrightarrow{MC} = \vec{K},$$

$\vec{K}$ étant un vecteur fixe donné.

578. Trouver la somme des n vecteurs ayant pour origine commune le centre de répétition O d'un polygone régulier de n côtés, et pour extrémités les n sommets du polygone.

En déduire la somme des n vecteurs ayant pour origine commune un point M quelconque, et pour extrémités les n sommets du polygone.

Ensemble des points pour que cette dernière somme soit égale au vecteur $\overrightarrow{AB}$, A et B étant deux sommets consécutifs du polygone.

579. Soient les n vecteurs :

$$\overrightarrow{OA_1}, \overrightarrow{OA_2}, \ldots \overrightarrow{OA_n},$$

dont la somme est nulle.

Montrer que O est le barycentre de masses égales affectées aux extrémités des vecteurs.

580. Étant donnés n points A_1, A_2, ..., A_n respectivement affectés des masses α_1, α_2, ..., α_n, montrer que si on les sépare en deux groupes de barycentres respectifs G et G', le vecteur $\overrightarrow{GG'}$ a une direction indépendante de ce groupage.

581. Soient les n vecteurs liés :

$$\overrightarrow{A_1B_1}, \overrightarrow{A_2B_2}, \ldots \overrightarrow{A_nB_n}$$

avec

$$\overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{A_2B_2} + \ldots + \overrightarrow{A_nB_n} = 0.$$

Montrer que l'isobarycentre des origines et l'isobarycentre des extrémités sont identiques.

582. Soient les n vecteurs liés :

$$\overrightarrow{A_1B_1}, \overrightarrow{A_2B_2}, \ldots \overrightarrow{A_nB_n}.$$

I est l'isobarycentre des origines, J l'isobarycentre des extrémités.

Évaluer $\vec{IJ}$ en fonction de la somme $\vec{S}$ des vecteurs donnés.

Peut-on généraliser au cas où I est le barycentre des points A_i (α_i) et J le barycentre des points B_i (α_i).

583. ABC...KL étant un polygone, et A'B'...K'L' étant les points partageant respectivement les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, ..., $\overrightarrow{KL}$, $\overrightarrow{LA}$ dans un même rapport λ, montrer que l'isobarycentre des points A', B', ..., K', L' est indépendant de λ.

Quelle propriété obtient-on pour un triangle ABC ?

584. Soient les points massifs A (2), B (1), C (λ), D (μ) avec $\lambda + \mu = 3$.

Trouver le lieu géométrique du barycentre G de ces quatre points.

Birapport. Quaterne harmonique.

585. Soit un quaterne harmonique (A, B; C, D) sur l'axe $x'Ox$, avec :

$$\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = -\frac{\overline{DA}}{\overline{DB}} = \lambda.$$

1° Montrer que si I est le milieu du segment CD on a :

$$\frac{\overline{IC}}{\overline{IB}} = \frac{\overline{IA}}{\overline{IC}} = -\lambda.$$

2° Montrer que l'on a aussi :

$$\frac{\overline{ID}}{\overline{IB}} = \frac{\overline{IA}}{\overline{ID}} = \lambda.$$

3° Calculer en fonction de λ :

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} \text{ et } \frac{\overline{BC}}{\overline{BD}}.$$

586. Sur l'axe $x'Ox$, on considère les points A (— 2), B (3) et C (— 1). Déterminer :

1° le conjugué du point C par rapport à AB;

2° le conjugué du point A par rapport à BC;

3° le conjugué du point B par rapport à AC.

587. Sur un axe $x'Ox$ on considère quatre points ABCD. On désigne par I et J les milieux des segments BD et AC.

1° Montrer que l'on a $\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{AD} + \overline{CB}$. Valeur commune de ces deux sommes en utilisant les points I et J.

Quelle est la valeur des deux membres si AC et BD ont le même milieu ?

2° Montrer que si (AB; CD) est harmonique, on a :

$$\frac{1}{\overline{AC}} + \frac{1}{\overline{AD}} + \frac{1}{\overline{BC}} + \frac{1}{\overline{BD}} = 0$$

et

$$\frac{1}{\overline{CA}} + \frac{1}{\overline{CB}} + \frac{1}{\overline{DA}} + \frac{1}{\overline{DB}} = 0.$$

Y a-t-il une différence entre ces deux relations ? Comment passe-t-on de l'une à l'autre?

3° Démontrer que si (AB, CD) est harmonique, on a :

$$\overline{AB} \cdot \overline{CD} + 2 \cdot \overline{AD} \cdot \overline{BC} = 0.$$

588. Une condition nécessaire et suffisante pour que le quaterne (AB; CD) soit harmonique est que :

$$AB^2 + CD^2 = 4 \cdot IJ^2.$$

I et J étant les milieux des segments AB et CD.

589. Sur un axe $x'Ox$ on considère les deux segments AB et CD, de milieux respectifs I et J.

1° Une condition nécessaire et suffisante pour que les segments AB et CD aient le même milieu est :

$$\overline{AC} + \overline{BD} = \overline{AD} + \overline{BC} = 0.$$

2° Montrer que si le quaterne (AB; CD) est harmonique :

$$\frac{1}{\overline{AC}} + \frac{1}{\overline{BD}} + \frac{1}{\overline{AD}} + \frac{1}{\overline{BC}} = 0.$$

3° Montrer que si les segments AB et CD sont quelconques on a :

$$\overline{AC} + \overline{BD} = \overline{AD} + \overline{BC}.$$

4° On suppose maintenant que les quatre points sont tels que :

$$\frac{1}{\overline{AC}} + \frac{1}{\overline{BD}} + \frac{1}{\overline{AD}} + \frac{1}{\overline{BC}} = 0.$$

Montrer que cette condition équivaut à la suivante

$$(\overline{AD} \cdot \overline{BC} + \overline{AC} \cdot \overline{BD})\,(\overline{AD} + \overline{BC}) = 0.$$

En déduire l'étude de la réciproque du 2°.

590. Soient quatre points A, B, C, D d'un axe $x'Ox$. J étant le milieu de CD, une condition nécessaire et suffisante pour que le quaterne (A, B, C, D) soit harmonique est que :

$$\overline{JA} \cdot \overline{JB} + \overline{JC} \cdot \overline{JD} = 0.$$

591. Sur la droite réelle R, on donne les points A (— 3), B (2). C (4), D (— 1). Calculer le birapport $\rho = (A, B; C, D)$.

592. Soient quatre points A, B, C, D de l'axe x'Ox, dont le birapport $\rho = (A, B, C, D)$ est égal à 2.

Calculer les autres birapports. Que peut-on en conclure ?

593. Sur la droite complexe C, on donne les points A $(1 + i)$, B $(1 - i)$, C $(2 + i)$, D $(2 - i)$. Que peut-on appeler birapport $\rho = (A, B; C, D)$ de ces quatre points? Calculer ce birapport.

LIVRE V

FONCTIONS ET ÉQUATIONS

CHAPITRE XLVI

FONCTIONS

652. Ensemble $\mathcal{F}$ (E; F).

Soient deux ensembles E et F. On considère les applications de l'ensemble E dans l'ensemble F, et on désigne leur ensemble par $\mathcal{F}$ (E; F).

***Deux applications* f *et* g *appartenant à $\mathcal{F}$ (E; F) sont identiques si, et seulement si, pour tout* x *on a* f (x) = g (x); *on note alors* f = g.**

Donc :

$$[f = g] \Leftrightarrow [(\forall x)\, x \in E : f(x) = g(x)] \qquad (652;1)$$

La nature des ensembles E et F joue un rôle très important, et tout particulièrement la nature de l'ensemble F.

◇ *Exemple 1.*

Soit l'ensemble $I = \{1;2;3;4;5;6\}$. Étudier les deux fonctions

f : $\qquad x \in I \longrightarrow f(x) = 2 \wedge x \in N$

et

g : $\qquad x \in I \longrightarrow g(x) = 3 \wedge x \in N$

Le symbole $\wedge$ désignant l'opération P.G.C.D.

1° *Étude de l'application* f :

$$f(1) = 2 \wedge 1 = 1$$
$$f(2) = 2 \wedge 2 = 2$$
$$f(3) = 2 \wedge 3 = 1$$
$$f(4) = 2 \wedge 4 = 2$$
$$f(5) = 2 \wedge 5 = 1$$
$$f(6) = 2 \wedge 6 = 2.$$

La figure (652 *a*) donne la représentation graphique de cette application.

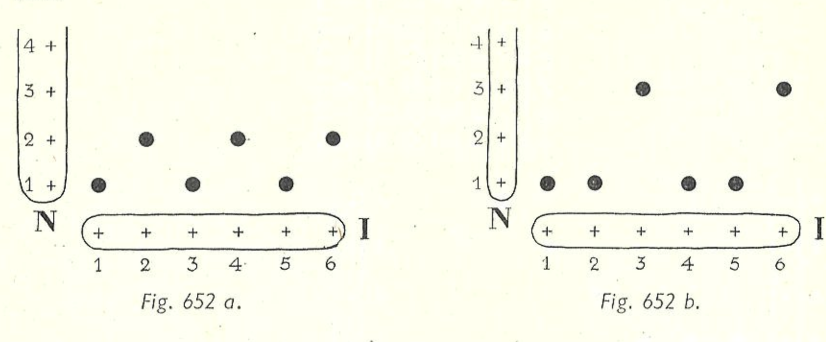


Fig. 652 a. *Fig. 652 b.*

2° *Étude de l'application* g :

$$g(1) = 3 \wedge 1 = 1$$
$$g(2) = 3 \wedge 2 = 1$$
$$g(3) = 3 \wedge 3 = 3$$
$$g(4) = 3 \wedge 4 = 1$$
$$g(5) = 3 \wedge 5 = 1$$
$$g(6) = 3 \wedge 6 = 3.$$

La figure (652 *b*) donne la représentation graphique de cette application.

◇ *Exemple 2.*

Soit l'ensemble $I = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$. Étudier les deux fontions

f : $$x \in I \longrightarrow f(x) = \text{Sup}(3 ; x) \in N$$

et

g : $$x \in I \longrightarrow g(x) = \text{Inf}(2 ; x) \in N$$

1° *Étude de l'application* f.

$$f(1) = \text{Sup}(3; 1) = 3$$
$$f(2) = \text{Sup}(3; 2) = 3$$
$$f(3) = \text{Sup}(3; 3) = 3$$
$$f(4) = \text{Sup}(3; 4) = 4$$
$$f(5) = \text{Sup}(3; 5) = 5$$
$$f(6) = \text{Sup}(3; 6) = 6.$$

La figure (652 *c*) donne la représentation graphique de cette application.

2° *Étude de l'application g.*

$$g(1) = \text{Inf}(2; 1) = 1$$
$$g(2) = \text{Inf}(2; 2) = 2$$
$$g(3) = \text{Inf}(2; 3) = 2$$
$$g(4) = \text{Inf}(2; 4) = 2$$
$$g(5) = \text{Inf}(2; 5) = 2$$
$$g(6) = \text{Inf}(2; 6) = 2.$$

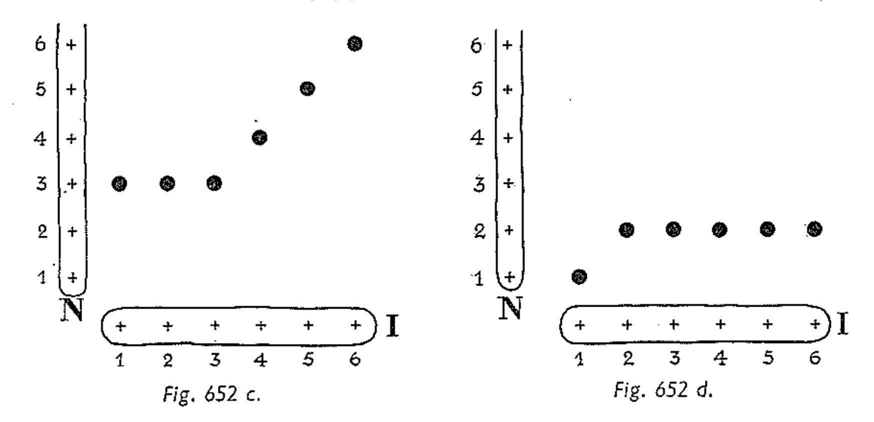


Fig. 652 c. *Fig. 652 d.*

La figure (652 *d*) donne la représentation graphique de cette application.

653. Équations.

Soit une application $f \in \mathcal{F}(E; F)$:

$$f: \qquad x \in E \longrightarrow f(x) \in F$$

On donne un élément b de F, et on se propose de trouver tous les éléments de E qui ont pour image b.

On dit alors que l'on résout l'équation f (x) = b.

Si $\overset{-1}{f}$ est la correspondance réciproque de f, $\overset{-1}{f}(b)$ désigne l'ensemble des éléments de E ayant b pour image par f.

$\overset{-1}{f}(b)$ *est la solution générale de l'équation* $f(x) = b$.

Si **$a \in \overset{-1}{f}(b)$, *c'est-à-dire si* $f(a) = b$, *a est une solution particulière de l'équation* $f(x) = b$.**

Dans l'équation $f(x) = b$, x prend le nom d'inconnue.

Si $\overset{-1}{f}(b) = \varnothing$, l'équation n'a pas de solution ou est impossible.

Résoudre l'équation **$f(x) = b$, *consiste à expliciter* $\overset{-1}{f}(b)$.**

◇ *Exemple 1.*

Soit l'ensemble $I = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$. *On considère l'application :*

$$f: \quad x \in I \longrightarrow f(x) = 2 \wedge x \in N$$

le symbole $\wedge$ *étant celui de l'opération P.G.C.D.*

Résoudre les équations

$$f(x) = 2$$
$$f(x) = 3$$

dans l'ensemble I.

La fonction f a été étudiée dans l'exemple 1 du n° 652. On a immédiatement la solution générale de l'équation $f(x) = 2$.

$$\overset{-1}{f}(2) = \{2; 4; 6\}$$

2,4 et 6 sont des solutions de cette équation.

De même l'équation $f(x) = 3$ n'a pas de solution : $\overset{-1}{f}(3) = \varnothing$.

◇ *Exemple 2.*

Soit $N = \{1; 2; 3; ...\}$. *Résoudre dans N l'équation :*

$$2 \wedge x = 2$$

$\wedge$ *désignant l'opérateur P.G.C.D.*

Il est immédiat que tous les nombres pairs sont solutions de cette équation. La solution générale est donc :

$$P = \{2; 4; 6; \ldots.\}$$

Ce second exemple (qui contient l'exemple 1) montre l'importance qu'il y a à préciser l'ensemble E de départ; E = I dans l'exemple 1, E = N dans l'exemple 2; les solutions de l'équation $f(x) = 2 \wedge x = 2$ *sont alors différentes.*

654. Inéquations.

Soit une application $f \in \mathcal{F}(E; F)$.

$$f: \quad x \in E \longrightarrow f(x) \in F$$

On donne une partie A de F, non vide et non réduite à un seul élément, et on se propose de trouver tous les éléments de E qui ont leur image dans A.

On dit alors que l'on résout l'inéquation f (x) = A.

$\overset{-1}{f}(A)$ ***est la solution générale de l'inéquation. Tout élément de*** $\overset{-1}{f}(A)$ ***est une solution particulière.***

◇ *Exemple 1.*

On considère l'application f étudiée dans l'exemple 1 du n° 652. Soit : $A = \{2; 3\}$. *Résoudre l'inéquation* $f(x) = A$.

On a immédiatement :

$$\overset{-1}{f}(A) = \{2; 4; 6\}$$

◇ *Exemple 2.*

On considère l'application f étudiée dans l'exemple 2 du n° 652. Soit : $A = \{1; 2; 3; 4\}$. *Résoudre l'inéquation* $f(x) = A$.

$A = \{1; 2; 3; 4\}$ peut s'écrire $A = \{x / x \in I \text{ et } x \leqslant 4\}$. L'inéquation peut alors prendre la forme $f(x) \leqslant 4$.

L'étude de l'application f donne :

$$\overset{-1}{f}(A) = \{1; 2; 3; 4\}.$$

655. Addition de deux applications.

On suppose que l'ensemble F est muni d'une addition.

Soient :

$$f \in \mathcal{F}(E; F) \quad \text{et} \quad g \in \mathcal{F}(E; F).$$

On appelle somme de l'application f et de l'application g l'application s définie par :

$$s : \quad x \in E \longrightarrow s(x) = f(x) + g(x) \in F$$

On note :

$$s = f + g$$

D'après la définition précédente :

$$(\forall x) \qquad \mathbf{(f + g)(x) = f(x) + g(x)} \qquad (655; 1)$$

Remarque.

La définition précédente est valable si f et g sont des fonctions; x appartient alors à l'intersection des ensembles de définition des fonctions f et g.

◇ *Exemple.*

On considère l'application f étudiée dans l'exemple 2 du n° 652, et la fonction g étudiée dans l'exemple 1 de ce même numéro. Étudier la fonction

$$s = f + g.$$

Immédiatement :

$$\begin{aligned} s(1) &= f(1) + g(1) = 3 + 1 = 4 \\ s(2) &= f(2) + g(2) = 3 + 1 = 4 \\ s(3) &= f(3) + g(3) = 3 + 3 = 6 \\ s(4) &= f(4) + g(4) = 4 + 1 = 5 \\ s(5) &= f(5) + g(5) = 5 + 1 = 6 \\ s(6) &= f(6) + g(6) = 6 + 3 = 9. \end{aligned}$$

656. Cas où F est un groupe additif.

On suppose que F est un groupe additif.

L'addition des applications de $\mathcal{F}(E; F)$ possède alors les propriétés suivantes :

Associativité.

On a :

$$(\forall x) \quad [(f+g)+h](x) = (f+g)(x) + h(x) = [f(x) + g(x)] + h(x)$$

et :

$$(\forall x) \quad [f+(g+h)](x) = f(x) + (g+h)(x) = f(x) + [g(x) + h(x)]$$

Or, par suite de l'associativité dans le groupe F,

$$[f(x) + g(x)] + h(x) = f(x) + [g(x) + h(x)].$$

Donc :

$$(\forall x)\ [(f+g)+h](x) = [f+(g+h)](x).$$

ce qui prouve (cf. n° 652) que :

[A] $\quad (\forall \mathbf{f})\ (\forall \mathbf{g})\ (\forall \mathbf{h}) \quad (\mathbf{f}+\mathbf{g})+\mathbf{h} = \mathbf{f}+(\mathbf{g}+\mathbf{h}).$ (656; 1)

Et :

L'addition dans $\mathcal{F}(E; F)$ est associative.

Existence d'un neutre.

Soit 0 le neutre pour l'addition dans le groupe F. On définit l'*application nulle* e = 0 par :

$$e : \qquad (\forall x) \quad x \in E \longrightarrow e(x) = 0 \in F$$

On a donc :

$$(\forall x) \quad f(x) + e(x) = e(x) + f(x) = f(x).$$

Où :

[N] $\quad (\forall \mathbf{f}) \quad \mathbf{f} + \mathbf{e} = \mathbf{e} + \mathbf{f} = \mathbf{f}$ (656; 2)

Et :

L'application nulle est neutre pour l'addition dans $\mathcal{F}$ (E; F).

$\mathcal{F}$ (E; F) est symétrisé pour l'addition.

Soit $f \in \mathcal{F}$ (E; F). On définit l'*application opposée* $-f$ par :

$$-f: \quad (\forall x) \quad x \in E \longrightarrow (-f)(x) = -f(x) \in F$$

On a :

$$(\forall x) \quad [f + (-f)](x) = f(x) + (-f)(x) = f(x) - f(x) = 0$$

De même :

$$(\forall x) \quad [(-f)(x) + f(x)] = 0.$$

Donc :

$$\boxed{S} \quad (\forall \mathbf{f}) \quad \mathbf{f} + (-\mathbf{f}) = (-\mathbf{f}) + \mathbf{f} = \mathbf{e}. \qquad (656; 3)$$

Et :

L'ensemble $\mathcal{F}$ (E; F) est symétrisé pour l'addition.

Commutativité.

On suppose maintenant que le groupe F est commutatif. Alors :

$$(\forall x) \quad (f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

et :

$$(\forall x) \quad (g + f)(x) = g(x) + f(x).$$

Or, par suite de la commutativité dans F, $f(x) + g(x) = g(x) + f(x)$.

Donc :

$$(\forall x) \quad (f + g)(x) = (g + f)(x)$$

ce qui prouve que :

$$\boxed{C} \quad (\forall \mathbf{f})(\forall \mathbf{g}) \quad \mathbf{f} + \mathbf{g} = \mathbf{g} + \mathbf{f}. \qquad (656; 4)$$

Et :

L'addition dans $\mathcal{F}$ (E; F) est commutative.

En résumé :

Si F est un groupe additif, alors $\mathcal{F}$ (E; F) est un groupe additif.
Si F est commutatif, alors $\mathcal{F}$ (E; F) est aussi commutatif.

657. Soustraction.

Si F est un groupe, on peut définir une soustraction par :

$$f - g: \quad x \in \mathbf{E} \longrightarrow (f - g)(x) = f(x) - g(x)$$

D'autre part :

$$[f + (-g)](x) = f(x) + [(-g)(x)]$$
$$= f(x) - g(x).$$

Donc :

$$\mathbf{f - g = f + (-g).} \qquad (657;1)$$

Et :

Pour soustraire une application on ajoute l'application opposée :

658. Équations équivalentes.

Deux équations sont équivalentes si elles ont la même solution générale.

C'est bien là une *relation d'équivalence*, car elle est manifestement réflexive, symétrique et transitive.

Deux équations équivalentes appartiennent à la même classe d'équivalence, et *une équation peut être remplacée par une équation équivalente :* c'est un procédé très utile de résolution d'une équation.

659. Équations f (x) = g (x).

Soient $f \in \mathcal{F}(E:F)$ et $g \in \mathcal{F}(E;F)$.

Une équation peut alors se présenter sous la forme :

$$\mathbf{f(x) = g(x).}$$

Résoudre cette équation, c'est trouver l'ensemble S des éléments de E qui ont la même image par f et par g.
S est la solution générale de l'équation.

◇ *Exemple.*

On considère l'application f *de l'exemple* 1 *du* nº 652 *et l'application* g *de l'exemple* 2 *du même numéro.*
Résoudre l'équation $f(x) = g(x)$.

On a :

$f(1) = 1$	$g(1) = 1$	$f(1) = g(1)$
$f(2) = 2$	$g(2) = 2$	$f(2) = g(2)$
$f(3) = 1$	$g(3) = 2$	$f(3) \neq g(3)$
$f(4) = 2$	$g(4) = 2$	$f(4) = g(4)$
$f(5) = 1$	$g(5) = 2$	$f(5) \neq g(5)$
$f(6) = 2$	$g(6) = 2$	$f(6) = g(6)$

Donc, 1, 2, 4, 6 sont les solutions particulières de $f(x) = g(x)$.

Et :

L'équation $2 \wedge x = Inf(2; x)$ *a pour solution générale dans* I, *l'ensemble* $S = \{1; 2; 4; 6\}$.

660. Équations $f(x) = g(x)$ lorsque F est un groupe additif.

On suppose que F est un groupe additif.

Soit l'équation $f(x) = g(x)$. On a :

$$[(\forall x)(x \in S) : f(x) = g(x)] \Leftrightarrow [(\forall x)(x \in S) : f(x) - g(x) = 0].$$

D'où :

Les deux équations $f(x) = g(x)$ ***et*** $f(x) - g(x) = 0$ ***sont équivalentes.***

De même :

Les deux équations $f(x) = g(x) + h(x)$ ***et*** $f(x) - g(x) = h(x)$ ***sont équivalentes.***

Ce dernier résultat est connu sous le nom de *théorème de transposition.*

661. Multiplication d'une application par un nombre.

On suppose que F est muni d'une loi externe, les nombres appartenant au corps K.

Soit $f \in \mathcal{F}(E; F)$ et $\alpha \in K$.

On appelle produit de l'application f par le nombre α, ***l'application p définie par :***

$$p \qquad x \in E \longrightarrow p(x) = \alpha \cdot f(x) \in F.$$

On note :

$$p = \alpha \cdot f$$

D'après la définition précédente :

$$(\forall x) \qquad (\alpha f)(x) = \alpha \cdot f(x). \qquad (661; 1)$$

Remarque.

La définition précédente est valable si f est une fonction ayant $E^* \subset E$ comme ensemble de définition. $p = \alpha f$ est alors une fonction définie sur E^*.

◇ *Exemple.*

Soit l'application f de l'exemple 1 du nº 652. Étudier l'application $p = 2f$.

On a immédiatement :

$$
\begin{aligned}
p(1) &= 2 \cdot f(1) = 2 \\
p(2) &= 2 \cdot f(2) = 4 \\
p(3) &= 2 \cdot f(3) = 2 \\
p(4) &= 2 \cdot f(4) = 4 \\
p(5) &= 2 \cdot f(5) = 2 \\
p(6) &= 2 \cdot f(6) = 4
\end{aligned}
$$

662. Cas où F est un espace vectoriel.

On suppose que F est un espace vectoriel sur le corps K : $\{F; +; .\}$

D'après le n° 656, $\mathcal{F}(E; F)$ *est un groupe additif commutatif.*

De plus la loi externe, multiplication d'une application par un nombre, possède les propriétés suivantes :

Neutralité.

Si 1 est l'unité de K, on a :

$$
\begin{aligned}
(1.f)(x) &= 1 \cdot f(x) \\
&= f(x).
\end{aligned}
$$

Donc :

[N'] $\quad (\forall \mathbf{f}) \quad 1 \cdot \mathbf{f} = \mathbf{f}.$ (662; 1)

Distributivité pour l'addition des applications.

Soient :

$$f \in \mathcal{F}(E; F); \quad g \in \mathcal{F}(E; F); \quad \alpha \in K.$$

On a :

$(\forall x) \quad [\alpha \cdot (f+g)](x) = \alpha \cdot [(f+g)(x)]$ (cf. 661; 1)

$= \alpha \cdot [f(x) + g(x)]$ (cf. 655; 1)

$= \alpha \cdot f(x) + \alpha . g(x)$ (Distributivité dans F)

$= (\alpha f)(x) + (\alpha g)(x)$ (cf. 661; 1)

ou

$(\forall x) \quad [\alpha \cdot (f+g)](x) = (\alpha f + \alpha g)(x)$ (cf. 655; 1)

Ceci prouve (cf. n° 652) que :

[D'] $\quad (\forall \alpha) \ (\forall \mathbf{f}) \ (\forall \mathbf{g}) \quad \alpha \cdot (\mathbf{f} + \mathbf{g}) = \alpha \cdot \mathbf{f} + \alpha \cdot \mathbf{g}.$ (662; 2)

Distributivité pour l'addition dans le corps K.

Soient :

$$f \in \mathcal{F}(E; F); \quad \alpha \in K; \quad \beta \in K.$$

On a :

$$(\forall x) \quad [(\alpha+\beta) f](x) = (\alpha+\beta)\cdot f(x) \qquad \text{(cf. 661; 1)}$$
$$= \alpha \cdot f(x) + \beta \cdot f(x) \qquad \text{(Distributivité dans F)}$$
$$= (\alpha f)(x) + (\beta f)(x) \qquad \text{(cf. 661; 1)}$$

ou

$$(\forall x) \quad [(\alpha+\beta)\cdot f](x) = (\alpha f + \beta f)(x) \qquad \text{(cf. 655; 1)}$$

Ceci prouve que :

$\boxed{D''}$ $\quad (\forall\alpha)\ (\forall\beta)\ (\forall \mathbf{f}) \quad (\alpha+\beta)\cdot \mathbf{f} = \alpha\cdot \mathbf{f} + \beta\cdot \mathbf{f}.$ (662; 3)

Associativité mixte.

Soient :

$$f \in \mathcal{F}(E; F); \quad \alpha \in K; \quad \beta \in K.$$

On a :

$$(\forall x) \quad [\alpha\cdot(\beta\cdot f)](x) = \alpha\cdot[(\beta\cdot f)(x)] \qquad \text{(cf. 661; 1)}$$
$$= \alpha\cdot[\beta\cdot f(x)] \qquad \text{(cf. 661; 1)}$$
$$= (\alpha\beta)\cdot f(x) \qquad \text{(Associativité mixte dans F)}$$

ou

$$(\forall x) \quad [\alpha\cdot(\beta f)](x) = [(\alpha\beta) f](x) \qquad \text{(cf. 661; 1)}$$

Ceci prouve que :

$\boxed{A'}$ $\quad (\forall\alpha)\ (\forall\beta)\ (\forall \mathbf{f}) \quad \alpha\cdot(\beta \mathbf{f}) = (\alpha\beta)\,\mathbf{f}.$ (662; 4)

L'ensemble $\mathcal{F}(E; F)$ est ainsi muni d'une loi associative possédant les propriétés d'un groupe commutatif $\boxed{A}$ $\boxed{N}$ $\boxed{S}$ $\boxed{C}$ et d'une loi externe possédant les propriétés $\boxed{N'}$ $\boxed{D'}$ $\boxed{D''}$ $\boxed{A'}$.

Autrement dit :

Si F est un espace vectoriel sur le corps K, alors l'ensemble $\mathcal{F}(E; F)$ est aussi un espace vectoriel sur K.

De même :

Si F est un module sur l'anneau A, alors l'ensemble $\mathcal{F}(E; F)$ est aussi un module sur A.

663. Multiplication d'une équation par un nombre.

On suppose que F est un espace vectoriel.

Soit l'équation $f(x) = 0$, ayant S pour solution générale. On a :

$$[(\forall x)(x \in S) : f(x) = 0] \Leftrightarrow [(\forall x)(x \in S)(\alpha \neq 0) : \alpha f(x) = 0].$$

D'où :

Si le nombre α n'est pas nul, les deux équations $f(x) = 0$ et $\alpha \cdot f(x) = 0$ sont équivalentes.

De même :

Si le nombre α n'est pas nul, les deux équations $f(x) = g(x)$ et $\alpha \cdot f(x) = \alpha \cdot g(x)$ sont équivalentes.

664. Multiplication de deux applications.

On suppose que F est un ensemble muni d'une multiplication.

Soient $f \in \mathcal{F}(E; F)$ et $g \in \mathcal{F}(E; F)$.

On appelle produit de l'application f et de l'application g, l'application π définie par :

$$\pi : \quad x \in E \longrightarrow \pi(x) = f(x) \times g(x) \in F$$

On note :

$$\pi = f \cdot g.$$

D'après la définition précédente :

$$(\forall x) \quad (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) \qquad (664; 2)$$

Remarque.

La définition précédente est valable si f et g sont des fonctions; x appartient alors à l'intersection des ensembles de définition des fonctions f et g.

◇ *Exemple.*

On considère l'application f *étudiée dans l'exemple* 2 *du* n° 652 *et la fonction* g *étudiée dans l'exemple* 1 *de ce même numéro. Etudier la fonction* $\pi = f \cdot g$.

Immédiatement :

$$\pi(1) = f(1) \cdot g(1) = 3 \times 1 = 3$$
$$\pi(2) = f(2) \cdot g(2) = 3 \times 1 = 3$$
$$\pi(3) = f(3) \cdot g(3) = 3 \times 3 = 9$$
$$\pi(4) = f(4) \cdot g(4) = 4 \times 1 = 4$$
$$\pi(5) = f(5) \cdot g(5) = 5 \times 1 = 5$$
$$\pi(6) = f(6) \cdot g(6) = 6 \times 3 = 18$$

665. Cas où F est un anneau.

On suppose que F est un anneau : { F; + ; × }.

La multiplication des applications de $\mathcal{F}$ (E; F) possède alors les propriétés suivantes :

Associativité.

On a :

$$(\forall x) \quad [(f \times g) \times h](x) = [(f \times g)(x)] \times h(x) \qquad \text{(cf. 664; 2)}$$
$$= [f(x) \times g(x)] \times h(x) \qquad \text{(cf. 664; 2)}$$

et

$$(\forall x) \quad [f \times (g \times h)](x) = f(x) \times [(g \times h)(x)]$$
$$= f(x) \times [g(x) \times h(x)]$$

Or par suite de l'associativité de la multiplication dans l'anneau F $[f(x) \times g(x)] \times h(x) = f(x) \times [g(x) \times h(x)]$.

Donc :

$$(\forall x) \quad [(f \times g) \times h](x) = [f \times (g \times h)](x)$$

ce qui prouve (cf. n° 652) que :

$\boxed{\text{A}}$ $\quad \mathbf{(\forall f)\ (\forall g)\ (\forall h) \qquad (f \times g) \times h = f \times (g \times h).}$

Existence d'un neutre.

On suppose que l'anneau F est unitaire.

Soit 1 le neutre pour la multiplication dans l'anneau F. On définit *l'application unité* ε par :

$$\varepsilon : \qquad (\forall x) \qquad x \in \text{E} \longrightarrow \varepsilon(x) = 1$$

On a :

$$(\varepsilon \times f)(x) = \varepsilon(x) \times f(x) = 1 \times f(x)$$
$$= f(x)$$

De même :

$$(f \times \varepsilon)(x) = f(x) \times \varepsilon(x) = f(x) \times 1$$
$$= f(x).$$

Donc :

$$(\forall x) \qquad (1 \times f)(x) = f(x).$$

Ce qui prouve que :

$\boxed{\text{N}}$ $\qquad \mathbf{(\forall f)} \qquad \varepsilon \times \mathbf{f} = \mathbf{f} \times \varepsilon = f \qquad\qquad (665; 2)$

Commutativité.

On suppose que l'anneau F est commutatif.

On a :

$$(\forall x) \quad (f \times g)(x) = f(x) \times g(x) \qquad \text{(cf. 664; 2)}$$

et

$$(\forall x) \quad (g \times f)(x) = g(x) \times f(x).$$

Or ici $f(x) \times g(x) = g(x) \times f(x)$, et :

$$(\forall x) \quad (f \times g)(x) = (g \times f)(x)$$

ce qui prouve que :

[C] $$(\forall f)(\forall g) \quad f \times g = g \times f \qquad (665; 3)$$

Distributivité.

On a :

$$\begin{aligned}(\forall x) \quad [(f+g) \times h](x) &= [(f+g)(x)] \times h(x) \\ &= [f(x) + g(x)] \times h(x) \\ &= [f(x) \times h(x)] + [g(x) \times h(x)] \\ &= (f \times h)(x) + (g \times h)(x)\end{aligned}$$

ou $$(\forall x) \quad [(f+g) \times h](x) = [(f \times h) + (g \times h)](x)$$

ce qui prouve que :

[D] $$(f+g) \times h = (f \times h) + (g \times h) \qquad (665; 4)$$

Autrement dit :

Si F est un anneau, $\mathcal{F}$ (E; F) est un anneau de même nature.

666. Équation-produit dans un anneau.

On appelle équation-produit une équation de la forme :

$$\mathbf{f(x) \times g(x) = 0.}$$

1° F est un anneau sans diviseur de zéro.

L'équation-produit :

$$f(x) \times g(x) = 0$$

se décompose en :

$$\begin{cases} f(x) = 0 \\ \text{ou} \\ g(x) = 0 \end{cases}$$

car dans F, sans diviseur de zéro, il y a intégrité.

D'où l'équivalence :

$$[f(x) \times g(x) = 0] \Leftrightarrow \begin{bmatrix} f(x) = 0 \\ \textit{ou} \\ g(x) = 0 \end{bmatrix} \qquad (661;1)$$

◇ *Exemple 1.*

Résoudre l'équation (x − 1) (x − 2) = 0 *dans R* (*E* = *F* = *R*).

D'après ce qui précède, on a :

$$\begin{cases} x - 1 = 0 \\ \text{ou} \\ x - 2 = 0 \end{cases}$$

D'où les deux solutions $x = 1$ et $x = 2$. La solution générale est $S = \{1; 2\}$

2° F est un anneau avec diviseurs de zéro.

L'équivalence (666; 1) n'est plus nécessairement exacte, mais on a l'implication :

$$\begin{bmatrix} f(x) = 0 \\ \text{ou} \\ g(x) = 0 \end{bmatrix} \Rightarrow [f(x) \times g(x)] = 0. \qquad (666;2)$$

Donc, en résolvant les deux équations $f(x) = 0$ et $g(x) = 0$ on obtient des solutions particulières de l'équation $f(x) \times g(x) = 0$, mais on n'obtient pas nécessairement la solution générale de cette équation. En effet le produit $f(x) \times g(x)$ peut être nul sans que $f(x)$ ou $g(x)$ soit nul.

◇ *Exemple 2.*

Résoudre l'équation $(x - \dot{1})(x - \dot{2}) = 0$ dans l'anneau Z/6.

On peut avoir :

$$\begin{cases} x - \dot{1} = 0 \\ \text{ou} \\ x - \dot{2} = 0 \end{cases}$$

D'où les solutions particulières $x = \dot{1}$ et $x = \dot{2}$.

Mais dans l'anneau A = Z/6, on a :

$$\dot{2} \times \dot{3} = 0 \qquad \dot{3} \times \dot{2} = 0 \qquad \dot{3} \times \dot{4} = 0 \qquad \dot{4} \times \dot{3} = 0$$

Donc $(x - \dot{1})(x - \dot{2})$ peut être nul si :

$$\begin{pmatrix} x - \dot{1} = \dot{2} \\ \text{et} \\ x - \dot{2} = \dot{3} \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} x - \dot{1} = \dot{3} \\ \text{et} \\ x - \dot{2} = \dot{2} \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} x - \dot{1} = \dot{3} \\ \text{et} \\ x - \dot{2} = \dot{4} \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} x - \dot{1} = \dot{4} \\ \text{et} \\ x - \dot{2} = \dot{3} \end{pmatrix}$$

ce qui équivaut à :

$$\begin{pmatrix} x = \dot{3} \\ \text{et} \\ x = \dot{5} \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} x = \dot{4} \\ \text{et} \\ x = \dot{4} \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} x = \dot{4} \\ \text{et} \\ x = \dot{0} \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} x = \dot{5} \\ \text{et} \\ x = \dot{5} \end{pmatrix}$$

Il n'y a possibilité que pour la seconde et la quatrième hypothèses.

D'où les solutions particulières $x = \dot{4}$ et $x = \dot{5}$.

On a donc quatre solutions particulières : $\dot{1}$; $\dot{2}$; $\dot{4}$; $\dot{5}$. On vérifie facilement que, si $f(x) = (x - \dot{1})(x - \dot{2})$:

$$f(\dot{0}) = \dot{2} \quad \text{et} \quad f(\dot{3}) = \dot{2}$$

c'est-à-dire que $\dot{0}$ et $\dot{2}$ ne sont pas solutions particulières.

On peut alors affirmer :

La solution générale de l'équation $(x - \dot{1})(x - \dot{2}) = 0$ est

$$S = \{\dot{1}; \dot{2}; \dot{4}; \dot{5}\}$$

667. Multiplication d'une équation par une application.

Soient $f \in \mathcal{F}(E; F)$ et $g \in \mathcal{F}(E; F)$, F étant un anneau sans diviseur de zéro.

On considère les deux équations :

$$f(x) = 0$$

et

$$f(x) \times g(x) = 0.$$

1° Ces deux équations ne sont pas équivalentes, car (cf. n° 666; 2°) :

$$[f(x) \times g(x) = 0] \Leftrightarrow \begin{bmatrix} f(x) = 0 \\ \text{ou} \\ g(x) = 0 \end{bmatrix}.$$

Par suite :

En général on ne peut multiplier une équation par une application (ou une fonction).

2° Cependant si $g(x) = 0$ n'a pas de solution dans E, on peut multiplier $f(x) = 0$ par $g(x)$.

◇ *Exemple 1.*

Les équations dans R (E = F = R) :

$$x - 1 = 0 \qquad (E_1)$$

et

$$(x - 1)(x - 2) = 0 \qquad (E_2)$$

ne sont pas équivalentes.

En effet :

$$S_1 = \{1\} \quad \text{et} \quad S_2 = \{1; 2\}$$

◇ *Exemple 2.*

Soient les deux équations :

$$x - 1 = 0 \qquad (E_1)$$

et

$$(x - 1)(x^2 + 1) = 0 \qquad (E_2)$$

Si E = F = R, ces deux équations sont équivalentes car elles ont la même solution générale $S = \{1\}$.

Si E = F = C, ces deux équations ne sont pas équivalentes car $S_1 = \{1\}$ et $S_2 = \{1; +i; -i\}$.

668. Fonctions numériques.

On appelle fonctions numériques les fonctions à valeurs réelles, c'est-à-dire les fonctions ayant R pour ensemble d'arrivée :

$$f : \qquad x \in E \longrightarrow f(x) \in R$$

L'ensemble $\mathcal{F}$ (E; R) a donc une structure d'anneau commutatif unitaire.

669. Inéquations numériques.

1° Si la fonction f est numérique (ou si F est totalement ordonné) on peut envisager l'inéquation :

$$f(x) > 0$$

et l'inéquation

$$f(x) \geqslant 0.$$

Dans le premier cas, $A = R^+ - \{0\}$; dans le second cas $A = R^+$ (cf. n° 654).

2° Si les fonctions f et g sont numériques on peut envisager l'inéquation :

$$f(x) > g(x)$$

ou

$$f(x) \geqslant g(x)$$

3° Deux inéquations sont équivalentes si elles ont les mêmes solutions. Comme au n° 660 :

$$[f(x) \geqslant g(x) + h(x)] \Leftrightarrow [f(x) - h(x) \geqslant g(x)]$$

Comme au nº 663.

Si $\alpha > 0$ $\quad [\mathbf{f}(\mathbf{x}) > \mathbf{g}(\mathbf{x})] \Leftrightarrow [\alpha \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}) > \alpha \cdot \mathbf{g}(\mathbf{x})]$
Si $\alpha < 0$ $\quad [\mathbf{f}(\mathbf{x}) > \mathbf{g}(\mathbf{x})] \Leftrightarrow [\alpha \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}) < \alpha \cdot \mathbf{g}(\mathbf{x})]$

4º Pour étudier une inéquation-produit $f(x) \cdot g(x) > 0$, on étudie le signe du produit $f(x) \cdot g(x)$ et on en déduit la solution de l'inéquation.

670. Applications de plusieurs arguments.

Si E est un produit de plusieurs ensembles, on a une fonction de plusieurs arguments ou variables.

$$f: \qquad (x; y) \in E_1 \times E_2 \longrightarrow f(x; y) \in F.$$

Tout ce qui précède est évidemment valable pour de telles fonctions ou applications.

◇ *Exemples.*

Soient $I = \{1; 2; 3\}$ et $J = \{1; 2\}$.

Étudier la fonction f :

$$f: \qquad (x; y) \in I \times J \longrightarrow f(x; y) = 2^x \cdot 3^y \in N$$

Résoudre les équations $f(x; y) = 12$ *et* $f(x; y) = 30$.
Résoudre l'inéquation $f(x; y) > 20$.

On obtient facilement :

$$f(1; 1) = 2 \times 3 = 6$$
$$f(1; 2) = 2 \times 3^2 = 18$$
$$f(2; 1) = 2^2 \times 3 = 12$$
$$f(2; 2) = 2^2 \times 3^2 = 36$$
$$f(3; 1) = 2^3 \times 3 = 24$$
$$f(3; 2) = 2^3 \times 3^2 = 72$$

L'équation $f(x; y) = 12$ a donc dans $I \times J$ la seule solution $(2; 1)$.
L'équation $f(x; y) = 30$ n'a pas de solution.
L'inéquation $f(x; y) > 20$ a pour solutions $(2; 2)$, $(3; 1)$ et $(3; 2)$.

671. Changement d'inconnue.

On considère une équation de la forme :

$$(g_o f)(x) = 0 \qquad (671; 1)$$

Elle peut s'écrire :

$$g[f(x)] = 0 \qquad (671; 2)$$

On pose alors $u = f(x)$, et on obtient l'équation résolvante :

$$g(u) = 0 \qquad (671; 3)$$

u est la nouvelle inconnue. La résolution de l'équation (671; 1) se ramène à la résolution de (671; 3), puis des équations $f(x) = u$ pour chaque solution de la résolvante :

◇ *Exemple.*

Résoudre l'équation

$$3 \cdot 2^{2x} - 2 \cdot 2^x - 8 = 0$$

dans N.

On pose $u = 2^x$ et la résolvante est :

$$3u^2 - 2u - 8 = 0$$

qui admet, dans N, la solution unique $u = 2$.

On résout alors :

$$2^x = 2$$

qui admet la solution $x = 1$.
Finalement l'équation proposée admet la solution $x = 1$.

672. Systèmes d'équations.

Soient, par exemple, deux applications f et g :

$$f \in \mathcal{F}(E; F) \quad \text{et} \quad g \in \mathcal{F}(E; F)$$

On envisage les équations :

$$f(x) = 0 \quad \text{et} \quad g(x) = 0$$

ayant respectivement pour solutions générales S_1 et S_2.

L'ensemble :

$$\begin{cases} f(x) = 0 \\ \text{et} \\ g(x) = 0 \end{cases}$$

est un système de deux équations.

Un élément α de E est solution du système s'il est à la fois solution des deux équations, c'est-à-dire si $f(\alpha) = 0$ et $g(\alpha) = 0$.

Donc :

La solution générale S du système est $S = S_1 \cap S_2$.

Deux systèmes sont équivalents s'ils ont les mêmes solutions.

673. Combinaison linéaire d'équations.

On suppose que F est un anneau commutatif unitaire sans diviseur de zéro.

1° Soit le système d'équations :

$$\begin{cases} f(x) = 0 & (E_1) \\ g(x) = 0 & (E_2) \end{cases}$$

Si a et b sont des éléments de F, on envisage l'équation

$$a \cdot f(x) + b \cdot g(x) = 0 \qquad (E)$$

qui est une combinaison linéaire des équations données (E_1) et (E_2).

Si α est une solution du système on a $f(\alpha) = 0$ et $g(\alpha) = 0$, donc aussi $a \cdot f(\alpha) + b \cdot f(\beta) = 0$, autrement dit α est solution de (E).

Et :

Toute solution d'un système d'équations est solution de toute combinaison linéaire d'équations du système.

2° ***Les deux systèmes :***

$$\Sigma \begin{cases} f(x) = 0 \\ g(x) = 0 \end{cases}$$

et

$$\Sigma' \begin{cases} f(x) = 0 \\ a \cdot f(x) + b \cdot g(x) = 0 \end{cases} \qquad (a \neq 0 \text{ et } b \neq 0)$$

sont équivalents.

Soient S et S′ les solutions générales de ces deux systèmes.

On a :

$$\alpha \in S \Rightarrow \begin{cases} f(\alpha) = 0 \\ g(\alpha) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(\alpha) = 0 \\ a \cdot f(\alpha) + b \cdot g(\alpha) = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha \in S'$$

et

$$\alpha \in S' \Rightarrow \begin{cases} f(\alpha) = 0 \\ a \cdot f(\alpha) + b \cdot g(\alpha) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(\alpha) = 0 \\ g(\alpha) = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha \in S$$

Donc $S = S'$; autrement dit Σ et Σ' sont équivalents.

CHAPITRE XLVII

FONCTIONS POLYNOMIALES

674. Fonctions polynomiales d'une variable.

Soit un polynôme formel F :

$$F = (a_0; a_1; ...; a_n; 0; 0; ...)$$

dont les coefficients $a_0; a_1; ... ; a_n$ sont des éléments d'un anneau A commutatif unitaire.

A ce polynôme on peut associer la fonction f :

$$f : x \in A \longrightarrow f(x) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + ... + a_n \cdot x^n \in A.$$

La fonction f est une fonction polynomiale à une variable sur l'anneau A.

Généralement A est un anneau Z/p, ou un corps R, C ou Z/p, p premier.

◇ *Exemples.*

1° $f: \ x \in R \longrightarrow f(x) = 2x^2 - 3x + 1 \in R$
est une fonction polynomiale sur le corps R des réels.

2° $f: \ x \in C \longrightarrow f(x) = 2ix^3 - 3(1 + i)x + 3 - 2i \in C$
est une fonction polynomiale sur le corps C des complexes.

3° $f: \ x \in Z/6 \longrightarrow f(x) = \dot{2} \cdot x^2 - \dot{4} \cdot x + \dot{3} \in Z/6$
est une fonction polynomiale sur l'anneau $Z/6$.

Remarques.

L'ensemble de définition de la fonction polynomiale est l'anneau A. Mais quelquefois on prend pour ensemble de définition un sous-anneau de A.

Par exemple :

$f: \ x \in R \longrightarrow f(x) = (1 + i)x^2 - 3x + 1 - i \in C$

est une fonction définie sur le corps R des réels et à valeurs dans le corps C des complexes.

675. Polynômes et fonctions polynomiales.

On considère les deux polynômes suivants sur $A = Z/6$:

$$F = (\dot{0}\,;\dot{0}\,;\dot{1}\,;\dot{1}\,;\dot{0}\,;\dot{0}\,;\ldots)$$

et

$$G = (\dot{0}\,;\dot{1}\,;\dot{1}\,;\dot{0}\,;\dot{0}\,;\ldots)$$

auxquels on associe les fonctions polynomiales :

$f: \ x \in Z/6 \longrightarrow f(x) = x^2 + x^3 \in Z/6$

et

$g: \ x \in Z/6 \longrightarrow g(x) = x + x^2 \in Z/6$

On établit aisément le tableau suivant :

x	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$	$\dot{3}$	$\dot{4}$	$\dot{5}$
x^2	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{4}$	$\dot{3}$	$\dot{4}$	$\dot{1}$
x^3	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$	$\dot{3}$	$\dot{4}$	$\dot{5}$

D'où :

x	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$	$\dot{3}$	$\dot{4}$	$\dot{5}$
$f(x)$	$\dot{0}$	$\dot{2}$	$\dot{0}$	$\dot{0}$	$\dot{2}$	$\dot{0}$

et

x	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$	$\dot{3}$	$\dot{4}$	$\dot{5}$
$g(x)$	$\dot{0}$	$\dot{2}$	$\dot{0}$	$\dot{0}$	$\dot{2}$	$\dot{0}$

Par suite :

$$(\forall x) \qquad (x \in Z/6) \quad : \ f(x) = g(x)$$

Donc les fonctions f et g sont identiques : $f = g$. Et aux *deux polynômes formels différents est associée une seule fonction.*

Cet exemple met bien en évidence la différence qui existe entre polynôme et fonction polynomiale.

L'application φ **:**

φ **:** $\quad$ $F \in A[u] \longrightarrow \varphi(F) = f \in \mathcal{F}(A\,;\,A)$

n'est pas injective.

Toutefois, on admet ici :

Lorsque le polynôme F est à coefficients réels ou complexes l'application φ est injective.

Toute fonction polynomiale n'est l'image que d'un seul polynôme.

676. Équations polynomiales.

Soit une fonction polynomiale sur l'anneau A :

$$f : \quad x \in A \longrightarrow f(x) \in A$$

L'équation f (x) = 0 est une équation polynomiale.

La solution générale est évidemment $S = \overset{-1}{f}(0)$.

Si α *est une solution particulière (ou racine) de l'équation, alors* $f(\alpha) = 0$.
α *est encore appelé un zéro de la fonction polynomiale* $f(x)$.

◇ *Exemple 1.*

Résoudre dans l'anneau $A = Z/6$ *les équations polynomiales :*

a) $x^3 + x + \dot{1} = \dot{0}$.

b) $x^2 + x - \dot{2} = \dot{0}$.

c) $x^3 - x = 0$.

d) $x^3 - \dot{3} \cdot x^2 + \dot{2} \cdot x = \dot{0}$.

Pour faciliter la résolution de ces équations il est utile de construire le tableau des carrés et des cubes.

x	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$	$\dot{3}$	$\dot{4}$	$\dot{5}$
x^2	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{4}$	$\dot{3}$	$\dot{4}$	$\dot{1}$
x^3	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$	$\dot{3}$	$\dot{4}$	$\dot{5}$

a) On a :

x	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$	$\dot{3}$	$\dot{4}$	$\dot{5}$
$x^3 + x + 1$	$\dot{1}$	$\dot{3}$	$\dot{5}$	$\dot{1}$	$\dot{3}$	$\dot{5}$

Le tableau montre que $f(x) = x^3 + x + \dot{1}$ n'est jamais égal à $\dot{0}$. Donc :

L'équation $x^3 + x + \dot{1} = \dot{0}$ *n'a pas de solution dans* $Z/6$.

b) De même :

x	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$	$\dot{3}$	$\dot{4}$	$\dot{5}$
$x^2 + x - \dot{2}$	$\dot{4}$	$\dot{0}$	$\dot{4}$	$\dot{4}$	$\dot{0}$	$\dot{4}$

Donc :

$x = \dot{1}$ et $x = \dot{4}$ *sont les solutions de l'équation* $x^2 + x - \dot{2} = 0$ *dans* $Z/6$.

c) On a encore :

x	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$	$\dot{3}$	$\dot{4}$	$\dot{5}$
$x^3 - x$	$\dot{0}$	$\dot{0}$	$\dot{0}$	$\dot{0}$	$\dot{0}$	$\dot{0}$

Le tableau montre que $S = A$:

Tous les nombres de $Z/6$ *sont solutions de l'équation* $x^3 - x = \dot{0}$.

d) Si $f(x) = x^3 - \dot{3}\cdot x^2 + \dot{2}\cdot x$, on a :

$$f(\dot{0}) = \dot{0}$$
$$f(\dot{1}) = \dot{1} - \dot{3}\cdot\dot{1} + \dot{2}\cdot\dot{1} = \dot{0}$$
$$f(\dot{2}) = \dot{2} - \dot{3}\cdot\dot{4} + \dot{2}\cdot\dot{2} = \dot{0}$$
$$f(\dot{3}) = \dot{3} - \dot{3}\cdot\dot{3} + \dot{2}\cdot\dot{3} = \dot{0}$$
$$f(\dot{4}) = \dot{4} - \dot{3}\cdot\dot{4} + \dot{2}\cdot\dot{4} = \dot{0}$$
$$f(\dot{5}) = \dot{5} - \dot{3}\cdot\dot{1} + \dot{2}\cdot\dot{5} = \dot{0}.$$

Donc :

Tous les nombres de $Z/6$ *sont solutions de l'équation* $x^3 - \dot{3}\cdot x^2 + \dot{2}\cdot x = \dot{0}$.

◇ *Exemple 2.*

Résoudre dans le corps $K = Z/5$ *les équations :*

a) $x^2 - \dot{2} = \dot{0}$.

b) $x^3 + \dot{1} = \dot{0}$,

c) $x^5 - x = \dot{0}$.

Pour faciliter la résolution de ces équations il est utile de construire le tableau suivant :

x	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$	$\dot{3}$	$\dot{4}$
x^2	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{4}$	$\dot{4}$	$\dot{1}$
x^3	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{3}$	$\dot{2}$	$\dot{4}$
x^5	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$	$\dot{3}$	$\dot{4}$

a) On a :

x	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$	$\dot{3}$	$\dot{4}$
$x^2 - \dot{2}$	$\dot{3}$	$\dot{4}$	$\dot{2}$	$\dot{2}$	$\dot{1}$

Donc :

L'équation $x^2 - \dot{2} = \dot{0}$ *n'a pas de solution dans le corps* $K = Z/5$.

b) On a :

x	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$	$\dot{3}$	$\dot{4}$
$x^3 + \dot{1}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$	$\dot{4}$	$\dot{3}$	$\dot{0}$

Donc :

$x = \dot{4}$ *est l'unique solution de l'équation* $x^3 + \dot{1} = 0$ *dans* $K = Z/5$.

c) On a :

x	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$	$\dot{3}$	$\dot{4}$
$x^5 - x$	$\dot{0}$	$\dot{0}$	$\dot{0}$	$\dot{0}$	$\dot{0}$

Donc :

Tous les nombres du corps $K = Z/5$ *sont solutions de l'équation* $x^5 - x = 0$.

677. Divisibilité par $x - \alpha$.

On considère dans ce numéro des fonctions polynomiales sur Z, Q, R *ou* C.

1° Les identités remarquables :

$$\mathbf{x}^2 - \alpha^2 = (\mathbf{x} - \alpha)(\mathbf{x} + \alpha), \qquad (677;\ 1)$$

$$\mathbf{x}^3 - \alpha^3 = (\mathbf{x} - \alpha)(\mathbf{x}^2 + \alpha\mathbf{x} + \alpha^2), \qquad (677;\ 2)$$

bien connues, se généralisent. En effet, on vérifie facilement, pour $n \in \mathrm{N}$,

$$\mathbf{x}^n - \alpha^n = (\mathbf{x} - \alpha)\,(\mathbf{x}^{n-1} + \alpha \cdot \mathbf{x}^{n-2} + \cdots + \alpha^k \cdot \mathbf{x}^{n-k-1} + \cdots + \alpha^{n-1}). \qquad (677;\ 3)$$

2° Soit maintenant une fonction polynomiale

$$f: \qquad x \longrightarrow f(x) = a_0 + a_1 \cdot x + \ldots + a_n\, x^n,$$

admettant α comme solution; donc $f(\alpha) = 0$.

On a :

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x) - f(\alpha) \\ &= (a_0 + a_1 \cdot x + \ldots + a_n \cdot x^n) - (a_0 + a_1 \cdot \alpha + \ldots + a_n \cdot \alpha^n) \\ &= a_1\,(x - \alpha) + a_2\,(x^2 - \alpha^2) + \ldots + a_n\,(x^n - \alpha^n) \\ &= (x - \alpha) \cdot q\,(x). \end{aligned}$$

Donc :

Si α est un zéro de la fonction polynomiale f, alors il existe une fonction polynomiale q telle que $\mathbf{f(x) = (x - \alpha) \cdot q(x)}$, pour toute valeur de x.

Plus brièvement, on dit que f (x) *est divisible par* x — α.

Réciproquement :

Si $\mathbf{f(x) = (x - \alpha) \cdot q(x)}$, alors α est un zéro de la fonction f; en effet $f(\alpha) = 0$,

3° Soit $f(x) = x^n + \alpha^n$. On a :

$$f(-\alpha) = (-\alpha)^n + \alpha^n.$$

Si $n = 2p$, $f(-\alpha) = 2 \cdot \alpha^{2n}$ et $f(x)$ n'est pas divisible par $x + \alpha$.
Si $n = 2p + 1$, $f(-\alpha) = 0$ et $f(x)$ est divisible par $x + \alpha$.

Dans ce dernier cas, on a immédiatement :

$$\mathbf{x}^{2p+1} + \alpha^{2p+1} = (\mathbf{x} + \alpha)\,(\mathbf{x}^{2p} - \alpha \,.\, \mathbf{x}^{2p-1} + \alpha^2 .\, \mathbf{x}^{2p-2} + \ldots + (-1)^k .\, \alpha^k .\, \mathbf{x}^{2p-k} + \ldots + \alpha^{2p})$$

Par exemple :

$$\mathbf{x}^3 + \alpha^3 = (\mathbf{x} + \alpha)\,(\mathbf{x}^2 - \alpha\mathbf{x} + \alpha^2). \qquad (677;\ 4)$$

678. Solutions multiples.

D'après le résultat du numéro précédent; et dans Z, Q, R ou C :

Une condition nécessaire et suffisante pour que α soit solution de l'équation polynôme f (x) = 0 est qu'il existe une fonction polynomiale q telle que, pour tout x, on ait $\mathbf{f(x) = (x - \alpha) \cdot q(x)}$.

Cet énoncé conduit à la définition suivante :

Si $\mathbf{f(x) = (x - \alpha)^h \cdot q(x)}$ avec $\mathbf{q(\alpha) \neq 0}$, on dit que α est solution (ou racine) multiple d'ordre h de l'équation f (x) = 0,

On dit aussi que α est zéro d'ordre h de la fonction polynomiale f.

◇ *Exemples.*

Dans R, l'équation $x^3 - 2x^2 + x = 0$ admet la racine double 1 et la racine simple 0, car $x^3 - 2x^2 + x = x(x-1)^2$.

Dans R, l'équation $x^3 - 2x^2 = x^2 - 3x + 1$ admet la racine triple 1, car elle est équivalente à $x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 0$ ou $(x-1)^3 = 0$.

679. Équation ax + b = 0 dans un corps K.

Soit l'équation polynomiale du premier degré dans un corps K commutatif.

$$ax + b = 0, \quad a \neq 0.$$

En appliquant les théorèmes sur les équations équivalentes, on obtient les équations équivalentes successives :

$$ax = -b$$

$$x = (-b)\cdot\frac{1}{a}$$

ou

$$x = -\frac{b}{a}.$$

L'équation ax + b = 0 (a ≠ 0) admet donc, dans K, la solution unique $-\dfrac{b}{a}$.

◇ *Exemple 1.*

Résoudre, dans le corps $K = Z/5$, l'équation $\dot{2}\cdot x - \dot{3} = 0$.

On a l'équation équivalente :

$$\dot{2}\cdot x = \dot{3}$$

Or l'inverse de $\dot{2}$ est $\dot{3}$. Donc :

$$\dot{3}\cdot\dot{2}\cdot x = \dot{3}\cdot 3$$

ou

$$x = \dot{4}$$

L'équation a donc pour solution unique $x = \dot{4}$.

◇ *Exemple 2.*

Résoudre et discuter, suivant les valeurs du paramètre réel m, *l'équation :*

$$(m^2 - 1)\,x = m - 1$$

x *étant une inconnue réelle.*

$m^2 - 1$ est nul pour $m = 1$ et $m = -1$.

Si $m \neq 1$ et $m \neq -1$, on a immédiatement $x = \dfrac{m-1}{m^2-1} = \dfrac{1}{m+1}$.
Si $m = 1$, tous les nombres réels sont solutions : $S = R$.
Si $m = -1$, l'équation n'a pas de solution.

680. Équation $ax^2 + bx + c = 0$ dans le corps R.

Soit l'équation :

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad (680;1)$$

dont les coefficients sont des réels, et que l'on se propose de résoudre dans le corps R. On suppose $a \neq 0$.

En vue de résoudre l'équation par la méthode du nº 671, on fait le changement d'inconnue :

$$x = u + \lambda \qquad (680;2)$$

λ étant une constante à déterminer le plus avantageusement possible.

On obtient :

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^2 + bx + c \\ &= a\,(u+\lambda)^2 + b\,(u+\lambda) + c \\ &= au^2 + 2\,a\lambda.u + a\lambda^2 + bu + b\lambda + c \\ &= au^2 + (2\,a\lambda + b)\,u + a\lambda^2 + b\lambda + c \end{aligned}$$

Il est alors avantageux de poser :

$$2\,a\lambda + b = 0$$

c'est-à-dire de prendre :

$$\lambda = -\frac{b}{2a}$$

de manière à obtenir la disparition du terme en u.

Il vient ainsi :

$$\begin{aligned} f(x) &= a \cdot u^2 + a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b \cdot \left(-\frac{b}{2a}\right) + c \\ &= a\,u^2 + \frac{4\,ac - b^2}{4a} \end{aligned}$$

On voit donc que $f(x) = 0$ si :

$$u^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}.$$

Le nombre réel $\Delta = b^2 - 4ac$ est le *discriminant* du trinôme, ou de l'équation.

Si $\Delta = b^2 - 4ac$ *est positif*, on a $u = \frac{\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$; et l'équation admet les deux solutions :

$$x' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x'' = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Si $\Delta = b^2 - 4ac$ *est nul*, on a $u = 0$; et l'équation admet une solution double :

$$x' = x'' = -\frac{b}{2a}.$$

Si $\Delta = b^2 - 4ac$ *est négatif*, il n'existe pas de nombres réels ayant $\frac{\Delta}{4a^2}$ pour carré; et l'équation n'a pas de solution.

D'où l'énoncé :

Si $\Delta = b^2 - 4ac$ ***est positif, l'équation*** $ax^2 + bx + c = 0$ ***admet deux solutions distinctes données par les formules :***

$$x' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x'' = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Si $\Delta = b^2 - 4ac$ ***est nul, l'équation*** $ax^2 + bx + c = 0$ ***admet une solution double donnée par la formule :***

$$x' = x'' = -\frac{b}{2a}.$$

Si $\Delta = b^2 - 4ac$ ***est négatif, l'équation*** $ax^2 + bx + c = 0$ ***n'a pas de solution dans R.***

681. Remarques.

1° Lorsque les coefficients a et c sont de signes contraires, $b^2 - 4ac$ est strictement positif, et il y a deux solutions distinctes.

Et :

Si les coefficients a et c sont de signes contraires, l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ ***a deux solutions distinctes.***

2° Lorsque $b = 2b'$ on a $\Delta = 4b'^2 - 4ac = 4(b'^2 - ac) = 4\Delta'$ en posant $\Delta' = b'^2 - ac$.

Δ' est le discriminant simplifié ou réduit. Δ et Δ' étant de même signe, on a :

Si Δ' *est négatif*, l'équation n'a pas de solution.

Si Δ' *est nul*, l'équation a une solution double : $x' = x'' = -\frac{b'}{a}$.

Si Δ' *est positif*, l'équation a deux solutions :

$$x' = \frac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a} \quad \text{et} \quad x'' = \frac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{a}.$$

682. Équation bicarrée dans le corps R.

On appelle équation bicarrée l'équation :

$$\mathbf{ax^4 + bx^2 + c = 0}$$

On suppose ici que les coefficients a, b, c sont réels.

En posant :

$$u = x^2$$

on obtient l'équation résolvante :

$$au^2 + bu + c = 0.$$

◇ *Exemple 1.*

Résoudre dans le corps R l'équation :

$$x^4 - 5x^2 + 4 = 0.$$

En posant $u = x^2$, on obtient l'équation résolvante :

$$u^2 - 5u + 4 = 0$$

qui admet les solutions $u' = 1$ et $u'' = 4$.

D'où :

$$x^2 = 1 \quad \text{et} \quad x^2 = 4.$$

Finalement :

$$x = \pm 1 \quad \text{et} \quad x = \pm 2$$

Et la solution générale est :

$$S = \{-1; +1; -2; +2\}$$

◇ *Exemple 2.*

Résoudre, dans le corps R, l'équation :

$$x^4 - x^2 - 2 = 0.$$

En posant $u = x^2$, on obtient l'équation résolvante :

$$u^2 - u - 2 = 0$$

qui admet les solutions $u' = 2$ et $u'' = -1$.

D'où :

$$x^2 = 2$$

et

$$x = \pm \sqrt{2}.$$

Par contre $x^2 = -1$ n'a pas de solution dans R.

Finalement la solution générale est :

$$S = \{ +\sqrt{2} ; -\sqrt{2} \}$$

◇ *Exemple 3.*

Résoudre, dans le corps R, l'équation :

$$x^4 + 10\,x^2 + 9 = 0.$$

La résolvante est :

$$u^2 + 10\,u + 9 = 0.$$

Elle admet les solutions $u' = -1$ et $u'' = -9$; toutes deux négatives. Donc l'équation donnée n'a pas de solution dans R :

$$S = \varnothing.$$

683. Fonctions polynomiales de plusieurs variables.

Soit un polynôme formel $\Phi \in A[u; v]$; par exemple :

$$\Phi = au^2 + 2\,buv + cv^2 + 2\,du + 2\,ev + f.$$

A ce polynôme formel on peut associer la fonction φ :

$$\varphi : (x; y) \in A^2 \rightarrow \varphi\,(x; y) = ax^2 + 2\,bxy + cy^2 + 2\,dx + 2\,ey + f.$$

La fonction φ est une fonction polynomiale de deux variables sur l'ensemble $E = A^2$.

On peut évidemment généraliser à plus de deux variables.

684. Équations polynomiales à plusieurs inconnues.

Si, par exemple, φ et ψ sont des fonctions polynomiales de deux variables, les équations :

$$\varphi(x; y) = 0$$

et :

$$\varphi(x; y) = \psi(x; y)$$

sont des équations polynomiales à deux inconnues.

Un couple $(\alpha; \beta)$ est solution de l'équation $\varphi(x; y) = 0$ si $\varphi(\alpha; \beta) = 0$.

Généralement on cherche les solutions dans l'ensemble $E = A^2$; quelquefois on ne retient que les solutions appartenant à une partie de E.

◇ *Exemple 1.*

Résoudre l'équation :

$$2x + 3y = 6$$

dans le corps R.

En posant, pour des raisons de simplification,

$$x = 3t \quad (t \in R).$$

On a :

$$6t + 3y = 6.$$

D'où :

$$y = 2 - 2t.$$

Finalement, la solution générale de l'équation est donnée par :

$$S = \{(3t; 2 - 2t) / t \in R\}$$

L'équation admet une infinité de solutions particulières.

◇ *Exemple 2.*

Résoudre l'équation :

$$\dot{2}x^2 + y^2 = 0$$

dans l'anneau $A = Z/4$.

En posant $f(x; y) = \dot{2}x^2 + y^2$, on obtient facilement :

$f(\dot{0};\dot{0}) = \dot{0}$	$f(\dot{1};\dot{0}) = \dot{2}$	$f(\dot{2};\dot{0}) = \dot{0}$	$f(\dot{3};\dot{0}) = \dot{2}$
$f(\dot{0};\dot{1}) = \dot{1}$	$f(\dot{1};\dot{1}) = \dot{3}$	$f(\dot{2};\dot{1}) = \dot{1}$	$f(\dot{3};\dot{1}) = \dot{3}$
$f(\dot{0};\dot{2}) = \dot{0}$	$f(\dot{1};\dot{2}) = \dot{2}$	$f(\dot{2};\dot{2}) = \dot{0}$	$f(\dot{3};\dot{2}) = \dot{2}$
$f(\dot{0};\dot{3}) = \dot{1}$	$f(\dot{1};\dot{3}) = \dot{3}$	$f(\dot{2};\dot{3}) = \dot{1}$	$f(\dot{3};\dot{3}) = \dot{3}$

Donc :

$$S = \{ (\dot{0};\dot{0}) ; (\dot{0};\dot{2}) ; (\dot{2};\dot{0}) ; (\dot{2};\dot{2}) \}$$

L'équation admet quatre solutions particulières.

◇ *Exemple 3.*

Résoudre l'équation :

$$4x^2 + y^2 = 0$$

dans le corps C; dans le corps R.

Ici on a :

$$\begin{aligned} y^2 &= -4x^2 \\ &= 4i^2x^2 \end{aligned}$$

ou

$$\begin{cases} y = 2ix \\ \text{ou} \\ y = -2ix \end{cases}$$

D'où les solutions :

$$S_1 = \{ (x = t; y = 2it) / t \in C \}$$

et :

$$S_2 = \{ (x = t; y = -2it) / t \in C \}$$

Finalement :

Dans C, l'équation admet la solution générale $S = S_1 \cup S_2$.

Mais :

Dans R, l'équation admet la solution unique (0; 0).

685. Systèmes d'équations polynomiales à une inconnue.

1° Soit le système :

$$\begin{cases} \alpha x + \beta = 0 & (E_1) \\ ax^2 + bx + c = 0 & (E_2) \end{cases}$$

de deux équations sur le corps C (ou un sous-corps de C).

La première (E_1) a pour solution $-\frac{\beta}{\alpha}$.

La seconde (E_2) a pour solution $-\frac{\beta}{\alpha}$ si :

$$a \cdot \left(-\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 + b\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right) + c = 0$$

ou

$$\frac{a\beta^2}{\alpha^2} - \frac{b\beta}{\alpha} + c = 0$$

ou

$$a\beta^2 - b\cdot\alpha\beta + c\alpha^2 = 0. \qquad (685;1)$$

A cette condition (685; 1) les deux équations ont une racine commune, ou encore la solution S du système $(E_1) \cup (E_2)$ n'est pas vide.

$a\beta^2 - b\alpha\beta + c\alpha^2$ *est le résultant du système.*

2° Soit le système :

$$\begin{cases} ax^2 + bx + c = 0 \\ a'x^2 + b'x + c' = 0. \end{cases}$$

Il est équivalent au système :

$$\begin{cases} ax^2 + bx + c = 0 \\ a(a'x^2 + b'x + c') - a'(ax^2 + bx + c) = 0 \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} ax^2 + bx + c = 0 \\ (ab' - ba')\,x - ca' + ac' = 0. \end{cases}$$

On suppose $\alpha = ab' - ba'$ non nul. En posant $\beta = ac' - ca'$, on est ramené au cas du 1°.

Le résultant du système est donc :

$$a(ac' - ca')^2 - b\cdot(ab' - ba')(ac' - ca') + c(ab' - ba')^2 = 0$$

ou :

$$a(ca' - ac')^2 - (ab' - ba')(abc' - bca' - acb' + bca') = 0$$

ou enfin :

$$(ca' - ac')^2 - (ab' - ba')(bc' - cb') = 0 \qquad (685;2)$$

A cette condition les deux équations ont une racine commune.

Afin de retenir plus facilement *le résultant* (685; 2), on considère les vecteurs $\vec{U}(a; b; c)$ et $\vec{V}(a'; b'; c')$. Le produit vectoriel $\vec{U} \wedge \vec{V}$ a pour coordonnées :

$$A = \begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix} = bc' - cb'; \quad B = \begin{vmatrix} c & a \\ c' & a' \end{vmatrix} = ca' - ac'; \quad C = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - ba'$$

Le résultant prend alors la forme simple :

$$\boldsymbol{B^2 - AC = 0.} \qquad (685;3)$$

686. Systèmes d'équations polynomiales à plusieurs inconnues.

Soit, pour fixer les idées, le système :

$$\Sigma \begin{cases} f(x;y) = 0 & (E_1) \\ g(x;y) = 0 & (E_2) \end{cases}$$

dans lequel f et g sont des fonctions polynomiales des deux variables x et y.

Pour résoudre ce système on utilise soit la méthode de substitution soit la méthode des combinaisons linéaires.

1° Méthode de substitution.

Elle est intéressante si on peut expliciter y, par exemple de E_1, par $y = \varphi(x)$. Le système Σ est alors équivalent à :

$$\begin{cases} y = \varphi(x) \\ g(x;y) = 0 \end{cases}$$

ou

$$\Sigma' \begin{cases} y = \varphi(x) & (E_1) \\ g[x;\varphi(x)] = 0 & (E_2') \end{cases}$$

(E_2') est alors une équation à une inconnue. Si α est une solution de cette équation, le couple $[\alpha; \beta = \varphi(\alpha)]$ est une solution du système Σ.

◇ *Exemple 1.*

Résoudre le système :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = A \\ 2xy = B \end{cases}$$

dans le corps R. (A et B sont des nombres réels donnés.)

Le système équivaut à :

$$\begin{cases} y = \dfrac{B}{2x} \\ x^2 - y^2 = A \end{cases}$$

et à

$$\begin{cases} y = \dfrac{B}{2x} \\ x^2 - \dfrac{B^2}{4x^2} = A \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} y = \dfrac{B}{2x} & (E_1') \\ 4x^4 - 4Ax^2 - B^2 = 0. & (E_2') \end{cases}$$

L'équation E'_2 est une équation bicarrée. On fait le changement d'inconnue $u = x^2$:

$$4u^2 - 4Au - B^2 = 0.$$

Cette équation a deux racines :

$$u' = \frac{2A + \sqrt{4A^2 + 4B^2}}{4} = \frac{A + \sqrt{A^2 + B^2}}{2}$$

$$u'' = \frac{2A - \sqrt{4A^2 + 4B^2}}{4} = \frac{A - \sqrt{A^2 + B^2}}{2}$$

La première u' est positive; la seconde u'' est négative.

Il reste donc seulement :

$$x^2 = \frac{A + \sqrt{A^2 + B^2}}{2}$$

D'où :

$$x' = \sqrt{\frac{A + \sqrt{A^2 + B^2}}{2}} = k$$

$$x'' = -\sqrt{\frac{A + \sqrt{A^2 + B^2}}{2}} = -k.$$

Le système admet donc les deux solutions :

$$\left(k ; \frac{B}{2k}\right) \text{ et } \left(-k ; -\frac{B}{2k}\right).$$

2º Méthode des combinaisons linéaires.

Le système Σ équivaut à :

$$\Sigma' \begin{cases} a \cdot f(x;y) + b \cdot g(x;y) = 0 \\ a' \cdot f(x;y) + b' \cdot g(x;y) = 0 \end{cases}$$

Si a, b, a', b' peuvent être choisis tels que :

$$a \cdot f(x;y) + b \cdot g(x;y) = \Phi(x)$$
$$a \cdot f(x;y) + b \cdot g(x;y) = \Psi(y)$$

le système Σ' s'écrit :

$$\Sigma' \begin{cases} \Phi(x) = 0 \\ \Psi(y) = 0 \end{cases}$$

On est ramené à deux équations à une inconnue.

◇ *Exemple 2.*

Résoudre, dans C, le système :

$$(2+i)\,x+(2-i)\,y=2 \quad E_1$$
$$(2-i)\,x-(2+i)\,y=1 \quad E_2$$

On fait les deux combinaisons :

$$(2-i)\,E_1-(2+i)\,E_2$$

et :

$$(2+i)\,E_1+(2-i)\,E_2.$$

On obtient :

$$\begin{cases} (2-i)\,[(2+i)\,x+(2-i)\,y]-(2+i)\,[(2-i)\,x-(2+i)\,y] \\ =2\,(2-i)-(2+i) \\ (2+i)\,[(2+i)\,x+(2-i)\,y]+(2-i)\,[(2-i)\,x-(2+i)\,y] \\ =2\,(2+i)+(2-i) \end{cases}$$

ou :

$$\begin{cases} 5\,x+(2-i)^2\,y-5\,x+(2+i)^2\,y=2-3\,i \\ (2+i)^2\,x+5\,y+(2-i)^2\,x-5\,y=6+i \end{cases}$$

ou :

$$\begin{cases} 6\,y=2-3\,i \\ 6\,x=6+i. \end{cases}$$

Finalement le système admet la solution unique :

$$x=\frac{6+i}{6}; \quad y=\frac{2-3i}{6}$$

687. Racines carrées d'un nombre complexe.

Soit un nombre complexe A + iB, A ∈ R et B ∈ R.

On appelle racine carrée de ce nombre complexe A + iB tout nombre complexe dont le carré est A + iB.

La recherche des racines carrées revient donc à résoudre l'équation :

$$x^2=A+iB$$

dans le corps C.

A cet effet on pose $x=\alpha+i\beta$. D'où :

$$(\alpha+i\beta)^2=A+iB$$

ou :

$$\alpha^2-\beta^2+2\,i\alpha\beta=A+iB.$$

Ce qui se ramène au système :

$$\begin{cases} \alpha^2-\beta^2=A \\ 2\,\alpha\beta=B. \end{cases}$$

Ce système a été étudié précédemment (Exemple 1 du n° 686). Il admet deux solutions :

$$\left(k; \frac{B}{2k}\right) \quad \text{et} \quad \left(-k; -\frac{B}{2k}\right) \quad \text{avec} \quad k = \sqrt{\frac{A + \sqrt{A^2 + B^2}}{2}}$$

Donc :

Le nombre complexe A + iB admet dans C deux racines carrées opposées :

$$\mathbf{x' = k + i \cdot \frac{B}{2k} \quad et \quad x'' = -k - i \cdot \frac{B}{2k}}$$

◇ *Exemple 1.*

Calculer les racines carrées du nombre complexe $3 + 4i$.

On a immédiatement :

$$\begin{aligned} 3 + 4i &= 4 + 4i - 1 \\ &= 4 + 4i + i^2 \\ &= (2 + i)^2 \end{aligned}$$

Les racines carrées cherchées sont donc $2 + i$ et $-2 - i$.

Exemple 2.

Calculer les racines carrées du nombre complexe $-5 - 12i$.

Cela revient à résoudre l'équation $x^2 = -5 - 12i$.

On pose : $x = \alpha + i\beta$; d'où :

$$(\alpha + i\beta)^2 = -5 - 12i$$

ou :

$$\alpha^2 - \beta^2 + 2i\alpha\beta = -5 - 12i.$$

On doit donc avoir :

$$\begin{cases} \alpha^2 - \beta^2 = -5 \\ \alpha\beta = -6. \end{cases}$$

On résout ce système par substitution :

$$\begin{cases} \beta = -\dfrac{6}{\alpha} \\ \alpha^2 - \dfrac{36}{\alpha^2} + 5 = 0 \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} \beta = -\dfrac{6}{\alpha} \\ \alpha^4 + 5\alpha^2 - 36 = 0. \end{cases}$$

On pose $u = \alpha^2$, pour résoudre la seconde équation.

$$u^2 + 5u - 36 = 0$$

admet les solutions $u = 4$ et $u = -9$; la seconde ne convient pas.

De $\alpha^2 = 4$, on déduit $\alpha = \pm 2$, et $\beta = \mp 3$.

Le nombre complexe $-5 - 12i$ a donc deux racines carrées opposées : $2 - 3i$ et $-2 + 3i$.

688. Équation $ax^2 + bx + c = 0$ dans le corps C.

Les coefficients de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ sont des nombres complexes.

Les calculs du nº 680 sont valables dans un corps quelconque, donc dans C.

On a :

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow u^2 = \frac{\Delta}{4a^2}.$$

Ici Δ est un nombre complexe; il a, dans C, deux racines carrées opposées α et $-\alpha$.

Donc :

$$u = \frac{\alpha}{2a} \quad \text{et} \quad u = -\frac{\alpha}{2a}$$

Finalement :

$$x = -\frac{b}{2a} + \frac{\alpha}{2a} \quad \text{et} \quad x = -\frac{b}{2a} - \frac{\alpha}{2a}$$

Et :

Dans le corps C l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ à coefficients complexes admet toujours deux solutions données par la formule :

$$x = \frac{-b \pm \alpha}{2a} \text{ avec } \alpha^2 = \Delta = b^2 - 4ac.$$

Lorsque $\Delta = 0$ il y a une solution double $x' = x'' = -\frac{b}{2a}$.

◇ *Exemple 1.*

Résoudre, dans C, l'équation :

$$x^2 + x + 1 = 0.$$

Ici le discriminant est :

$$\begin{aligned} \Delta &= 1 - 4 \\ &= -3 \\ &= 3i^2. \end{aligned}$$

Donc $\alpha = i\sqrt{3}$, et par suite les deux solutions de l'équation sont :

$$x = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$$

Ce sont deux nombres complexes conjugués.

◇ *Exemple 2.*

Résoudre, dans C, l'équation :

$$x^2 - 2x + 2 = 0.$$

Ici il est avantageux d'écrire l'équation sous la forme :

$$x^2 - 2x + 1 = -1$$

ou :

$$(x-1)^2 = i^2.$$

On en déduit :

$$x - 1 = \pm i.$$

Finalement les solutions sont :

$$x = 1 \pm i.$$

Ce sont deux nombres complexes conjugués.

◇ *Exemple 3.*

Résoudre l'équation :

$$(1-i)x^2 + 2(1+i)x - (1-i) = 0.$$

On a :

$$\begin{aligned} \Delta' &= (1+i)^2 + (1-i)^2 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Il y a donc une racine double :

$$\begin{aligned} x' = x'' &= -\frac{1+i}{1-i} \\ &= -\frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)} \end{aligned}$$

ou

$$x' = x'' = -i.$$

◇ *Exemple 4.*

Résoudre, dans C, l'équation :

$$x^2 - (4-i)x + 5 + i = 0.$$

Le discriminant de l'équation est :

$$\Delta = (4 - i)^2 - 4(5 + i) = -5 - 12i.$$

Ses racines carrées sont $2 - 3i$ et $-2 + 3i$ (cf. Exemple 2 du n° 687).

Donc :

$$\Delta = (2 - 3i)^2$$

Par suite :

$$x' = \frac{4 - i + 2 - 3i}{2} = 3 - 2i.$$

$$x'' = \frac{4 - i - 2 + 3i}{2} = 1 + i.$$

Ici les racines ne sont plus des nombres complexes conjugués.

689. Équation bicarrée dans le corps C.

On utilise la même méthode qu'au n° 682. Mais les équations $x^2 = u'$ et $x^2 = u''$ ont toujours des solutions dans C.

◇ *Exemple 1.*

Résoudre, dans le corps C :

$$x^4 - x^2 - 2 = 0.$$

Comme au n° 682, exemple 2, la résolvante est :

$$u^2 - u - 2 = 0$$

qui a pour solutions $u' = -1$ et $u'' = 2$.

D'où :

$$x^2 = 2 \quad \text{et} \quad x^2 = -1 = i^2$$

et finalement :

$$S = \{\sqrt{2}; -\sqrt{2}; +i; -i\}$$

◇ *Exemple 2.*

Résoudre, dans le corps C, l'équation :

$$x^4 + 10x^2 + 9 = 0.$$

Comme au n° 682, exemple 3, la résolvante est :

$$u^2 + 10u + 9 = 0$$

qui a pour solutions $u' = -1$ et $u'' = -9$.

D'où :

$$x^2 = -1 = i^2 \text{ et } x^2 = -9 = 9\,i^2$$

et finalement :

$$S = \{+i; -i; +3\,i; -3\,i\}$$

◇ *Exemple 3.*

Résoudre, dans le corps C, l'équation :

$$x^4 - 3\,(1 + 2\,i)\,x^2 - 2\,(4 - 3\,i) = 0.$$

En posant :

$$x^2 = u$$

on obtient l'équation résolvante :

$$u^2 - 3\,(1 + 2\,i)\,u - 2\,(4 - 3\,i) = 0$$

D'où :

$$\begin{aligned}\Delta &= 9\,(1 + 2\,i)^2 + 8\,(4 - 3\,i)\\ &= 5 + 12\,i\\ &= (3 + 2\,i)^2.\end{aligned}$$

Par suite la résolvante admet comme solutions :

$$\begin{cases} u' = 3 + 4\,i \\ u'' = 2\,i. \end{cases}$$

On est ainsi amené à résoudre les deux équations :

$$x^2 = 3 + 4\,i$$

et :

$$x^2 = 2\,i.$$

Or :

$$3 + 4\,i = (2 + i)^2$$

et :

$$2\,i = (1 + i)^2.$$

D'où les solutions :

$$x = 1 + i, \quad x = -(1 + i), \quad x = 2 + i, \quad x = -(2 + i).$$

690. Produit de fonctions du premier degré.

On considère le produit de n fonctions-binômes du premier degré dans le corps C :

$$f(x) = (a + x)\,(b + x)\dots(k + x)\,(l + x)$$

En développant, on obtient une fonction polynomiale de degré n qu'on peut écrire :

$$f(x) = S_0 + S_1 \cdot x + S_2 \cdot x^2 + \dots + S_p \cdot x^p + \dots + S_{n-1}x^{n-1} + x^n$$

Par identification, on trouve :

$S_0 \quad = ab \dots kl$

. . . .

$S_p \quad = \underbrace{ab \dots f}_{n-p \text{ facteurs}} + \dots + \underbrace{g \dots kl}_{n-p \text{ facteurs}}$

. . . .

$S_{n-2} = ab + ac + \dots + kl$
$S_{n-1} = a + b + \dots + k + l.$

On voit que :

S_{n-1} contient n termes.
S_{n-2} contient les produits 2 à 2 des n nombres $a, b, \dots k, l$; il y a C_n^2 termes
S_{n-3} contient les produits 3 à 3 des n nombres $a, b, \dots; k, l$; il y a C_n^3 termes

. . . .

S_{n-p} contient C_n^p termes

. . . .

S_0 contient un seul terme.

691. Fonction polynomiale de Newton.

On peut imaginer que tous les facteurs du produit précédent deviennent égaux :

$$a = b = \dots = k = l.$$

On aura alors :

$$S_0 \quad = a^n$$
. . . .
$$S_{n-p} = C_n^p \cdot a^p$$
. . . .
$$S_{n-3} = C_n^3 \cdot a^3$$
$$S_{n-2} = C_n^2 \cdot a^2$$
$$S_{n-1} = C_n^1 \cdot a$$

On obtient alors la formule de Newton :

$$(\mathbf{a} + \mathbf{x})^n = C_n^0 \cdot \mathbf{a}^n + C_n^1 \cdot \mathbf{a}^{n-1} \cdot \mathbf{x} + \dots + C_n^p \mathbf{a}^{n-p} \cdot \mathbf{x}^p + \dots + C_n^{n-1} \cdot \mathbf{a}\mathbf{x}^{n-1} + C_n^n \mathbf{x}^n$$

692. Remarque.

La formule $C_n^p = C_n^{n-p}$ montre que les termes équidistants des extrêmes ont des coefficients égaux.

Ainsi on a :

$$(a + x)^2 = a^2 + 2\,ax + x^2$$
$$(a + x)^3 = a^3 + 3\,a^2 x + 3\,ax^2 + x^3$$
$$(a + x)^4 = a^4 + 4\,a^3 x + 6\,a^2 x^2 + 4\,ax^3 + x^4.$$

693. Triangle de Pascal.

Sur une première ligne on écrit l'unité; puis on forme un tableau triangulaire en écrivant au-dessous de chaque nombre la somme de ce nombre et de celui qui est à sa gauche. On considère chaque place libre à la droite ou à la gauche d'un nombre comme occupée par un zéro.

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
. . . .

Le tableau ainsi dressé s'appelle le triangle de Pascal. Il donne les coefficients de la fonction polynomiale de Newton. En effet le tableau est construit en utilisant la formule $C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p$:

$$\boxed{C_{n-1}^{p-1}} + \boxed{C_{n-1}^{p}}$$
$$=$$
$$\boxed{C_n^p}$$

694. Relations entre les coefficients de la formule de Newton.

1° En faisant dans la formule du binôme $a = x = 1$, on obtient :

$$2^n = C_n^0 + C_n^1 + \cdots + C_n^{n-1} + C_n^n \qquad (694;1)$$

2° En faisant $a = 1$ et $x = -1$, on obtient :

$$0 = C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 + \cdots + (-1)^{n-1} \cdot C_n^{n-1} + (-1)^n C_n^n \qquad (694;2)$$

3° En ajoutant ces deux égalités, il vient :

$$2^n = 2\,(C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \ldots)$$

et en retranchant :

$$2^n = 2\,(C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \ldots)$$

On a donc :

$$C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \cdots = C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \cdots = 2^{n-1} \quad (694;\,3)$$

695. Formes canoniques de fonctions polynomiales.

1° A l'aide du changement de variable (cf. n° 680) :

$$x = X + \lambda \qquad (695\,;1)$$

on met la fonction polynomiale :

$$f\,(x) = ax^2 + bx + c$$

sous la forme

$$\mathbf{f(x) = aX^2} + K \qquad (695\,;2)$$

avec :

$$K = \frac{4\,ac - b^2}{4\,a} = -\frac{\Delta}{4\,a}.$$

2° On fait le même changement de variable dans la fonction :

$$f\,(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

On obtient :

$$\begin{aligned} f\,(x) &= a\,(X + \lambda)^3 + b\,(X + \lambda)^2 + c\,(X + \lambda) + d \\ &= a\,(X^3 + 3\,\lambda\,X^2 + 3\,\lambda^2 X + \lambda^3) + b\,(X^2 + 2\,\lambda X + \lambda^2) \\ &\qquad + c\,(X + \lambda) + d \\ &= aX^3 + (3\,a\lambda + b)\,X^2 + (3\,a\lambda^2 + 2\,b\lambda + c)\,X + a\lambda^3 + b\lambda^2 \\ &\qquad + c\lambda + d. \end{aligned}$$

Le terme en X^2 disparaît si $\lambda = -\frac{b}{3a}$. On a alors :

$$\begin{aligned} 3\,a\,\lambda^2 + 2\,b\,\lambda + c &= 3\,a \times \frac{b^2}{9\,a^2} - 2\,b \times \frac{b}{3\,a} + c \\ &= -\frac{b^2}{3\,a} + c \\ &= \frac{3\,ac - b^2}{3\,a} \\ &= K. \end{aligned}$$

et

$$a\lambda^3 + b\lambda^2 + c\lambda + d = a\left(-\frac{b^3}{27a^3}\right) + b\left(\frac{b^2}{9a^2}\right) - c\left(\frac{b}{3a}\right) + d$$
$$= -\frac{b^3}{27a^2} + \frac{b^3}{9a^2} - \frac{bc}{3a} + d$$
$$= \frac{2b^3 - 9abc + 27a^2d}{27a^2}$$
$$= H.$$

La fonction prend la forme canonique :

$$\mathbf{f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d} = aX^3 + \mathbf{K}X + H \qquad (695\,;3)$$

696. Théorème de d'Alembert.

1° On admet ici le théorème de d'Alembert :

Toute fonction polynomiale à une variable construite sur le corps C des complexes a, au moins, un zéro.

2° En conséquence :

Soit a_1 un zéro de la fonction polynomiale $f(x)$. $f(x)$ est donc divisible par $x - a_1$ et :

$$f(x) = (x - a_1) \cdot f_1(x)$$

$f_1(x)$ est une fonction polynomiale de degré $n - 1$. Elle a au moins un zéro a_2 et

$$f_1(x) = (x - a_2) \cdot f_2(x)$$

et ainsi de suite.

Donc :

Une fonction polynomiale à une variable, de degré n, construite sur le corps C des complexes, a n zéros dans le corps C.

3° Bien entendu, *ce résultat n'est valable que pour le corps C.*

697. Décomposition d'une fonction polynomiale.

D'après le résultat précédent la fonction polynomiale $f(x)$ sur le corps C s'écrit :

$$f(x) = a \cdot (x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_n).$$

Elle est décomposée en facteurs premiers. Si des zéros de la fonction sont égaux on a une décomposition en facteurs primaires :

$$f(x) = a(x - a_1)^{h_1}(x - a_2)^{h_2} \dots (x - x_p)^{h_p}$$

avec $h_1 + h_2 + \dots + h_p = n$.

On démontre que cette décomposition est unique.

Remarque.

Ce résultat n'est valable que pour le corps C.

Ainsi, soit la fonction polynomiale :

$$f(x) = x^2 - \dot{3}x + \dot{2}$$

dont les coefficients appartiennent à l'anneau A = Z/6.

Or on a :

$$(x - \dot{1})(x - \dot{2}) = x^2 - \dot{3}x + \dot{2} = f(x)$$

et

$$(x - \dot{4})(x - \dot{5}) = x^2 - \dot{3}x + \dot{2} = f(x)$$

La fonction polynomiale a donc deux décompositions.

CHAPITRE XLVIII

APPLICATIONS LINÉAIRES

698. Applications linéaires.

Soient deux espaces vectoriels E et F sur le même corps K.
On envisage une application u de E dans F :

u : $$X \in E \longrightarrow u(X) \in F$$

L'application u est dite application linéaire si elle possède les deux propriétés suivantes :

Additivité :

[A_D] $(\forall X)\ (\forall Y)$ $\quad u(X + Y) = u(X) + u(Y)$.

Homogénéité d'ordre 1 :

[H] $(\forall \lambda)\ (\forall X)$ $\quad u(\lambda \cdot X) = \lambda \cdot u(X)$.

L'ensemble des applications linéaires de E dans F se note $\mathcal{L}(E; F)$ et évidemment $\mathcal{L}(E; F) \subset \mathcal{F}(E; F)$.

699. Exemples.

◇ *Exemple 1.*

Soient l'espace vectoriel $E = K^3$ et l'espace vectoriel $F = K^2$. A un vecteur $A = (X; Y; Z)$ de E on fait correspondre le vecteur $A' = u(A) = (X; Y)$ de l'espace vectoriel F.

On a :

u : $$A \in K^3 \longrightarrow A' = u(A) \in K^2.$$

u est une application linéaire de E dans F.

En effet :

Additivité.

Soient $A = (X; Y; Z)$ et $B = (X'; Y'; Z')$.

On a :

$$A + B = (X + X'; Y + Y'; Z + Z').$$

Or :

$$u(A) = (X;\ Y),\ u(B) = (X'; Y')$$

et

$$u(A) + u(B) = (X + X'; Y + Y').$$

On a aussi :

$$u(A + B) = (X + X'; Y + Y')$$

c'est-à-dire :

$\boxed{A_D}$ $$u(A + B) = u(A) + u(B)$$

Homogénéité d'ordre 1.

Soient : $\lambda \in K$ et $A \in K^3$. On a : $\lambda A = (\lambda X; \lambda Y; \lambda Z)$.

Or :

$$u(A) = (X;\ Y) \quad \text{et} \quad \lambda \cdot u(A) = (\lambda X; \lambda Y)$$

On a aussi :

$$u(\lambda A) = (\lambda X; \lambda Y)$$

c'est-à-dire :

$\boxed{H}$ $$u(\lambda A) = \lambda \cdot u(A).$$

◇ *Exemple 2.*

Soient l'espace vectoriel $E = R^3$ et l'espace vectoriel $F = R^2$.

A un vecteur $A = (x; y; z)$ de E on fait correspondre le vecteur $A' = (X; Y)$ avec :

$$X = x - y$$
$$Y = 2x + y - z.$$

On a :

$$u : \quad A \in R^3 \longrightarrow A' = u(A) \in R^2$$

u *est une application linéaire.*

En effet :

Additivité.

Soient : $A = (x; y; z)$, $B = (x'; y'; z')$.

On a : $$A + B = (x + x'; y + y'; z + z').$$

Or :

$$u(A) = (x - y; 2x + y - z)$$
$$u(B) = (x' - y'; 2x' + y' - z')$$

et

$$u(A + B) = (x + x' - y - y'; 2x + 2x' + y + y' - z - z')$$

On a aussi :

$$u(A) + u(B) = (x - y + x' - y'; 2x + y - z + 2x' + y' - z')$$

c'est-à-dire :

$\boxed{A_D}$ $$u(A + B) = u(A) + u(B).$$

Homogénéité d'ordre 1.

Soient : $\lambda \in K$ et $A \in K^3$. On a : $\lambda . A = (\lambda x; \lambda y; \lambda z)$.

Or :

$$u(A) = (x - y; 2x + y - z)$$

et

$$\lambda \cdot u(A) = (\lambda x - \lambda y; 2\lambda x + \lambda y - \lambda z)$$

On a aussi :

$$u(\lambda A) = (\lambda x - \lambda y; 2\lambda x + \lambda y - \lambda z)$$

c'est-à-dire :

$\boxed{H}$ $$u(\lambda \cdot A) = \lambda \cdot u(A).$$

700. Formes linéaires.

Soient un espace vectoriel E sur le corps K. K est lui-même considéré, ici, comme un espace vectoriel.

Une application linéaire u de E dans K est appelée une forme linéaire :

u : $$X \in E \longrightarrow u(X) \in K$$

◇ *Exemple.*

Soit l'espace vectoriel $E = R^3$. On envisage l'application u :

u : $$(x; y; z) \in R^3 \longrightarrow u(x; y; z) = ax + by + cz \in K$$

dans laquelle a, b, c sont des constantes réelles données.

Cette application u est linéaire.

En effet :

Additivité.

Soient :

$$A = (x; y; z) \text{ et } B = (x'; y'; z').$$

On a :

$$A + B = (x + x'; y + y'; z + z').$$

D'où :

$$\begin{aligned} u\,(A) &= ax + by + cz, \\ u\,(B) &= ax' + by' + cz', \\ u\,(A + B) &= a\,(x + x') + b\,(y + y') + c\,(z + z') \\ &= (ax + by + cz) + (ax' + by' + cz') \end{aligned}$$

c'est-à-dire :

$\boxed{A_D}$ $u(A + B) = u(A) + u(B)$.

Homogénéité d'ordre 1.

Soients : $\lambda \in R$ et $A \in R^3$. On a : $\lambda A = (\lambda x; \lambda y; \lambda z)$.

D'où :

$$\begin{aligned} u\,(A) &= ax + by + cz \\ u\,(\lambda A) &= a\,(\lambda x) + b\,(\lambda y) + c\,(\lambda z) \\ &= \lambda\,(ax + by + cz) \end{aligned}$$

c'est-à-dire :

$$u\,(\lambda \cdot A) = \lambda \cdot u\,(A).$$

Remarque.

Par abus de langage, très souvent on appelle forme linéaire les fonctions polynomiales **ax, ax + by, ax + by + cz.**

701. Addition des applications linéaires.

Soient deux applications linéaires u et v appartenant toutes deux à $\mathcal{L}$ (E; F). Leur somme $s = u + v$ est définie par (cf. nº 655) :

$u + v$: $\quad x \in E \longrightarrow (u + v)\,(x) = u\,(x) + v\,(x) \in F$

L'application $s = u + v$ *est linéaire.*

En effet :

Additivité.

On a :

$(u + v)\,(x + y) = u\,(x + y) + v\,(x + y)$	Définition
$= u\,(x) + u\,(y) + v\,(x) + v\,(y)$	$\boxed{A}$ et $\boxed{C}$ dans F
$= [u(x) + v(x)] + [u(y) + v(y)]$	u et v, linéaires
$= (u + v)\,(x) + (u + v)\,(y)$	Définition

c'est-à-dire :

$\boxed{A_D}$ $$s(x+y) = s(x) + s(y).$$

Homogénéité d'ordre 1.

On a :

$(u+v)(\lambda \cdot x) = u(\lambda x) + v(\lambda x)$	Définition
$= \lambda \cdot u(x) + \lambda \cdot v(x)\lambda$	u et v linéaires
$= \lambda \cdot [u(x) + v(x)]$	$\boxed{D'}$ dans F
$= \lambda [(u+v)(x)]$	Définition

c'est-à-dire :

$\boxed{H}$ $$s(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot s(x).$$

Et :

La somme de deux applications linéaires de E dans F est une application linéaire de E dans F.

ou

L'addition des applications linéaires est une loi interne dans $\mathcal{L}$ ***(E; F).***

702. Propriétés de l'addition des applications linéaires.

Associativité.

Il y a associativité dans $\mathcal{F}$(E; F), donc aussi dans $\mathcal{L}(E; F) \subset \mathcal{F}(E;F)$.

$\boxed{A}$ $$(\forall \mathbf{u})(\forall \mathbf{v})(\forall \mathbf{w}) \quad (\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w} = \mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w})$$

Commutativité.

Il y a commutativité dans $\mathcal{F}$(E; F), donc aussi dans $\mathcal{L}(E; F) \subset \mathcal{F}(E;F)$.

$\boxed{C}$ $$(\forall \mathbf{u})(\forall \mathbf{v}) \quad \mathbf{u}+\mathbf{v} = \mathbf{v}+\mathbf{u}.$$

Existence d'une application linéaire neutre.

Il existe une application neutre pour l'addition dans $\mathcal{F}$(E; F) (cf. n° 656). Il suffit de montrer que cette application neutre est linéaire, c'est-à-dire qu'elle appartient à $\mathcal{L}$(E; F).

L'application neutre, ou nulle, est notée e = 0. On a :

$$e(x+y) = 0 \quad \text{et} \quad e(x) + e(y) = 0.$$

Donc :

$\boxed{A_D}$ $$e(x+y) = e(x) + e(y)$$

$$e(\lambda x) = 0 \quad \text{et} \quad \lambda \cdot e(x) = 0.$$

Donc :

H $$e(\lambda x) = \lambda \cdot e(x).$$

Ainsi : $$e \in \mathcal{L}(E; F)$$

et :

N $$\mathbf{(\exists e), e \in \mathcal{L}(E; F), (\forall u) : u + e = e + u = u.}$$

$\mathcal{L}$ (E; F) est symétrisé pour l'addition.

Une application linéaire $u \in \mathcal{L}(E; F)$ étant donnée, il existe une application opposée $-u$ qui appartient à $\mathcal{F}(E; F)$; il suffit de montrer qu'elle est linéaire, c'est-à-dire qu'elle appartient à $\mathcal{L}(E; F)$.

En effet, on a :

$$\begin{aligned}(-u)(x+y) &= -[u(x+y)] \\ &= [-u(x)] + [-u(y)] \\ &= [(-u)(x)] + [(-u)(y)]\end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}(-u)(x+y) &= [(-u)(x)] + [(-u)(y)] \\ (-u)(\lambda x) &= -[u(\lambda x)] \\ &= -[\lambda \cdot u(x)] \\ &= \lambda \cdot [-u(x)] \\ &= \lambda \cdot [(-u)(x)]\end{aligned}$$

Donc :

$$(-u)(\lambda x) = \lambda \cdot [(-u)(x)]$$

Ainsi : $$u \in \mathcal{L}(E; F) \Rightarrow (-u) \in \mathcal{L}(E; F)$$

S $$\mathbf{(\forall u)\ (\exists (-u)) : u + (-u) = (-u) + u = e.}$$

703. Multiplication d'une application linéaire par un nombre.

Soient $u \in \mathcal{L}(E; F)$ et $\alpha \in K$. Le produit $p = \alpha \cdot u$ est défini par : (cf. n° 661) :

u : $$x \in E \longrightarrow p(x) = (\alpha \cdot u)(x) = \alpha \cdot u(x).$$

L'application $p = \alpha \cdot u$ *est linéaire.*

En effet :

Additivité.

On a :

$$\begin{aligned}(\alpha \cdot u)(x+y) &= \alpha . [u(x+y)] \\ &= \alpha . [u(x) + u(y)] \\ &= \alpha \cdot u(x) + \alpha \cdot u(y) \\ &= (\alpha u)(x) + (\alpha u)(y)\end{aligned}$$

c'est-à-dire :

$\boxed{A_D}$ $$p(x + y) = p(x) + p(y).$$

Homogénéité d'ordre 1.

On a :

$$\begin{aligned}(\alpha u)(\lambda x) &= \alpha \cdot [u(\lambda x)] \\ &= \alpha \cdot [\lambda \cdot u(x)] \\ &= \lambda \cdot [\alpha \cdot u(x)] \\ &= \lambda \cdot [(\alpha u)(x)]\end{aligned}$$

c'est-à-dire :

$\boxed{H}$ $$p(\lambda x) = \lambda \cdot p(x).$$

Et :

La multiplication d'une application linéaire par un nombre est une loi externe sur $\mathcal{L}(E; F)$.

704. Espace vectoriel $\mathcal{L}(E; F)$.

Comme dans $\mathcal{F}(E; F)$, dans $\mathcal{L}(E; F)$ on a les propriétés (cf. nº 662) :

$(\forall u) \qquad 1 \cdot u = u$

$(\forall \alpha)(\forall u)(\forall v) \qquad \alpha \cdot (u + v) = \alpha \cdot u + \alpha \cdot v$

$(\forall \alpha)(\forall \beta)(\forall u) \qquad (\alpha + \beta) u = \alpha \cdot u + \beta \cdot u$

$(\forall \alpha)(\forall \beta)(\forall u) \qquad \alpha \cdot (\beta \cdot u) = (\alpha\beta) u.$

En tenant compte des propriétés de l'addition, on peut alors énoncer :

$\mathcal{L}(E; F)$ est un espace vectoriel sur le corps K.

705. Composition des fonctions linéaires.

Soient les trois espaces vectoriels E, F, G sur le même corps K. On envisage les fonctions linéaires :

$u : \; x \in E \longrightarrow y = u(x) \in F$

$v : \; y \in F \longrightarrow z = v(y) = v[u(x)] = (v \circ u)(x) \in G.$

On se propose de démontrer que $w = v \circ u$ est une fonction linéaire.

On a :

$$\begin{aligned}(v \circ u)(x + y) &= v[u(x + y)] \\ &= v[u(x) + u(y)] \\ &= v[u(x)] + v[u(y)] \\ &= (v \circ u)(x) + (v \circ u)(y)\end{aligned}$$

ou

$\boxed{A_D}$ $$w(x + y) = w(x) + w(y).$$

De même :

$$\begin{aligned}(v_0 u)(\lambda x) &= v[u(\lambda x)] \\ &= v[\lambda \cdot u(x)] \\ &= \lambda \cdot v[u(x)] \\ &= \lambda \cdot [(v_0 u)(x)]\end{aligned}$$

ou

[H] $$w(\lambda x) = \lambda \cdot w(x).$$

Donc $v_0 u$ est linéaire. Et :

La composée de deux fonctions linéaires est une fonction linéaire.

706. Propriétés de la composition des fonctions linéaires.

Associativité (1).

Soient les fonctions :

$u: \quad x \in E \longrightarrow y = u(x) \in F$

$v: \quad y \in F \longrightarrow z = v(y) = v[u(x)] = [(v_0 u)(x)] \in G$

$w: \quad z \in G \longrightarrow t = w(z) = w[(v_0 u)(x)] = [w_0 (v_0 u)](x) \in H.$

D'autre part :

$$(w_0 v)(y) = (w_0 v)[u(x)] = [(w_0 v)_0 u](x)$$

Finalement (fig. 706 *a*) :

$(\forall x)$ $$[w_0 (v_0 u)](x) = [(w_0 v)_0 u](x)$$

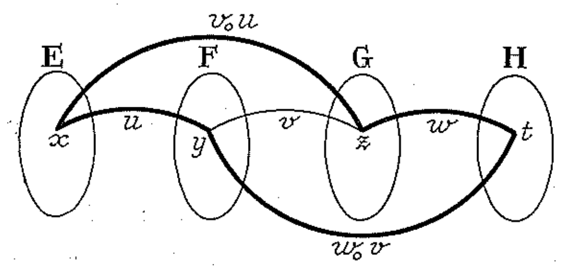


Fig. 706 a.

Autrement dit :

[A] $(\forall \mathbf{u})(\forall \mathbf{v})(\forall \mathbf{w})$ $\quad (\mathbf{w}_0 \mathbf{v})_0 \mathbf{u} = \mathbf{w}_0 (\mathbf{v}_0 \mathbf{u}).$

(1) La démonstration suivante est valable pour la composition des fonctions quelconques.

Et :

La loi de composition des fonctions est associative.

Ce résultat est évidemment valable pour la loi de composition des fonctions linéaires.

Distributivité à droite.

Soient les espaces vectoriels E, F, G sur le même corps K, et les fonctions linéaires :

u_1 : $x \in E \longrightarrow y_1 = u_1(x) \in F$

u_2 : $x \in E \longrightarrow y_2 = u_2(x) \in F$

v : $y \in F \longrightarrow z = v(y) \in G$

On a :

$$(\forall x) \quad [v_0 (u_1 + u_2)](x) = v[(u_1 + u_2)(x)] = v[u_1(x) + u_2(x)] = v[u_1(x)] + v[u_2(x)] = (v_0 u_1)(x) + (v_0 u_2)(x) = [(v_0 u_1) + (v_0 u_2)](x).$$

D'où :

$\boxed{D_D}$ $(\forall \mathbf{u}_1)(\forall \mathbf{u}_2)(\forall \mathbf{v})$] $\quad \mathbf{v}_0(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) = \mathbf{v}_0 \mathbf{u}_1 + \mathbf{v}_0 \mathbf{u}_2.$

Et :

La loi de composition des fonctions linéaires est distributive à droite pour l'addition des fonctions linéaires.

Distributivité à gauche.

Soient les espaces vectoriels E, F, G sur le même corps K, et les fonctions linéaires :

u : $x \in E \longrightarrow y = u(x) \in F$

v_1 : $y \in F \longrightarrow z_1 = v_1(y) \in G$

v_2 : $y \in F \longrightarrow z_2 = v_2(y) \in G$

On a :

$$(\forall x) \quad [(v_1 + v_2) u](x) = (v_1 + v_2)[u(x)] = (v_1 + v_2)(y) = v_1(y) + v_2(y) = v_1[u(x)] + v_2[u(x)] = (v_{1o} u)(x) + (v_{2o} u)(x) = [(v_{1o} u) + (v_{2o} u)](x).$$

D'où :

$\boxed{D_G}$ $(\forall \mathbf{u})(\forall \mathbf{v}_1)(\forall \mathbf{v}_2) \quad (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2)_o \mathbf{u} = \mathbf{v}_{1o} \mathbf{u} + \mathbf{v}_{2o} \mathbf{u}.$

Et :

La loi de composition des fonctions linéaires est distributive à gauche pour l'addition des fonctions linéaires.

707. Détermination d'une application linéaire.

Pour fixer les idées, et pour simplifier l'exposé, on considère un espace vectoriel E de dimension 2 et un espace vectoriel F de dimension 3.

E est rapporté à la base (1) $\{\vec{i}; \vec{j}\}$

F est rapporté à la base $\{\vec{u}; \vec{v}; \vec{w}\}$

Soit :

$$\vec{V} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} \in E$$

Soit u une application linéaire de E dans F. On a donc :

$$\begin{aligned} u(\vec{V}) &= u[x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j}] \\ &= u[x \cdot \vec{i}] + u[y \cdot \vec{j}] \\ &= x \cdot u(\vec{i}) + y \cdot u(\vec{j}) \end{aligned}$$

L'application linéaire u est donc définie si on donne les vecteurs $u(\vec{i})$ et $u(\vec{j})$. Autrement dit :

Donner une application linéaire équivaut à donner l'image de la base de l'espace de départ.

On donne :

$$u(\vec{i}) = a \cdot \vec{u} + b \cdot \vec{v} + c \cdot \vec{w}$$
$$u(\vec{j}) = a' \cdot \vec{u} + b' \cdot \vec{v} + c' \cdot \vec{w}$$

Le tableau des coordonnées de ce bivecteur est :

$$A = \begin{pmatrix} a & a' \\ b & b' \\ c & c' \end{pmatrix}$$

C'est la matrice de l'application linéaire u. C'est une matrice 2×3, c'est-à-dire une matrice à deux colonnes et trois lignes.

Donc :

Donner une application linéaire de E dans F équivaut à donner une matrice à deux colonnes et trois lignes.

---

(1) Pour éviter des confusions d'écriture, les vecteurs sont ici surmontés d'une flèche.

708. Calcul des coordonnées de l'image d'un vecteur.

On a :

$$u(\vec{V}) = x \cdot u(\vec{i}) + y \cdot u(\vec{j})$$
$$= x \cdot [a \cdot \vec{u} + b \cdot \vec{v} + c \cdot \vec{w}] + y [a' \cdot \vec{u} + b' \cdot \vec{v} + c' \cdot \vec{w}]$$
$$= (ax + a'y) \vec{u} + (bx + b'y) \vec{v} + (cx + c'y) \vec{w}$$

D'où :

$$\begin{cases} x' = ax + a'y \\ y' = bx + b'y \\ z' = cx + c'y \end{cases}$$

Réciproquement, étant donnés x', y', z' on déduit la matrice, puis les vecteurs $u(\vec{i})$, $u(\vec{j})$, c'est-à-dire l'application u.

Remarque.

On peut noter :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a' \\ b & b' \\ c & c' \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} ax + a'y \\ bx + b'y \\ cx + c'y \end{pmatrix}$$

◇ *Exemple 1.*

Soit l'application u de R^2 dans R^3 définie par :

$$x' = x - y$$
$$y' = 2x + y$$
$$z' = x.$$

La matrice représentative est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{cases} u(\vec{i}) = \vec{u} + 2\vec{v} + \vec{w} \\ u(\vec{j}) = -\vec{u} + \vec{v} \end{cases}$$

◇ *Exemple 2.*

Soit l'application u de C^3 dans C^2 définie par :

$$x' = 2ix - y + iz$$
$$y' = (1 + i)x - iy + 2iz$$

La matrice représentative est

$$U = \begin{pmatrix} 2i & -1 & i \\ 1+i & -i & 2i \end{pmatrix}$$

Et :

$$\begin{cases} u(\vec{i}) = 2i \cdot \vec{u} + (1+i)\vec{v} \\ u(\vec{j}) = -\vec{u} - i \cdot \vec{v} \\ u(\vec{k}) = i \cdot \vec{u} + 2i \cdot \vec{v} \end{cases}$$

◇ *Exemple 3.*

Soit l'application u de R^3 dans C^3 (x, y, z sont réels; x', y', z' sont complexes) définie par :

$$\begin{aligned} x' &= (1-i)\,x + 2\,iy - z \\ y' &= (1+i)\,x - y + iz \\ z' &= x - y. \end{aligned}$$

La matrice représentative de u est :

$$U = \begin{pmatrix} 1-i & 2i & -1 \\ 1+i & -1 & i \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Et :

$$\begin{aligned} u(\vec{i}) &= (1-i)\,\vec{u} + (1+i)\,\vec{v} + \vec{w} \\ u(\vec{j}) &= 2i \cdot \vec{u} - \vec{v} - \vec{w} \\ u(\vec{k}) &= -\vec{u} + i \cdot \vec{v} \end{aligned}$$

709. Systéme de deux équations linéaires à deux inconnues.

On se propose ici l'étude du système d'équations :

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

a, b, a', b' appartenant au corps K commutatif.

Résolution vectorielle.

Dans l'espace vectoriel K^2, on considère les vecteurs :

$$\vec{A}(a\,;\,a') \qquad \vec{B}(b\,;\,b') \qquad \vec{C}(c\,;\,c')$$

Le système proposé s'écrit alors vectoriellement :

$$x \cdot \vec{A} + y \cdot \vec{B} = \vec{C} \qquad (709;1)$$

Si $\vec{A}$ et $\vec{B}$ sont linéairement indépendants, ils constituent une base de K^2. Le vecteur $\vec{C}$ a des coordonnées uniques $(x; y)$ dans cette base (fig. 709 *a*).

Donc le système a une solution unique.

Pour calculer x et y, on opère de la façon suivante :

$$\text{Det}\left(x \cdot \vec{A} + y \cdot \vec{B}; \vec{B}\right) = \text{Det}\left(\vec{C}; \vec{B}\right)$$

ou

$$x \cdot \text{Det}\left(\vec{A}; \vec{B}\right) + y \cdot \text{Det}\left(\vec{B}; \vec{B}\right) = \text{Det}\left(\vec{C}; \vec{B}\right)$$

ou

$$x \cdot \text{Det}\left(\vec{A}; \vec{B}\right) = \text{Det}\left(\vec{C}; \vec{B}\right)$$

et

$$\mathbf{x} = \frac{\mathbf{Det}\left(\vec{C}; \vec{B}\right)}{\mathbf{Det}\left(\vec{A}; \vec{B}\right)} \qquad (709;2)$$

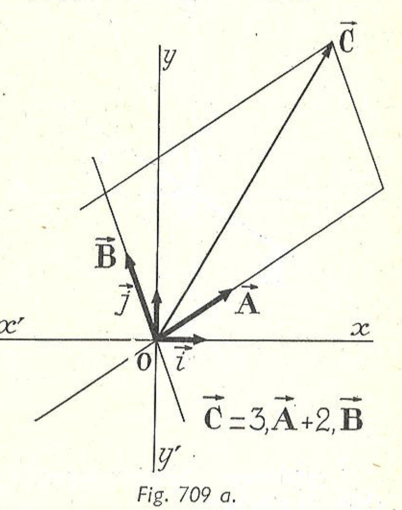


Fig. 709 *a*.

De même :

$$\text{Det}\left(\vec{A}; x \cdot \vec{A} + y \cdot \vec{B}\right) = \text{Det}\left(\vec{A}; \vec{C}\right)$$

ou

$$x \cdot \text{Det}\left(\vec{A}; \vec{A}\right) + y \cdot \text{Det}\left(\vec{A}; \vec{B}\right) = \text{Det}\left(\vec{A}; \vec{C}\right)$$

ou

$$y \cdot \text{Det}\left(\vec{A}; \vec{B}\right) = \text{Det}\left(\vec{A}; \vec{C}\right)$$

et

$$\mathbf{y} = \frac{\mathbf{Det}\left(\vec{A}; \vec{C}\right)}{\mathbf{Det}\left(\vec{A}; \vec{B}\right)} \qquad (709;3)$$

Ainsi :

Si $\text{Det}\left(\vec{A}; \vec{B}\right)$ *n'est pas nul, le système admet une solution unique donnée par les formules* (709; 2) *et* (709; 3).

$\text{Det}\left(\vec{A}, \vec{B}\right)$ est le déterminant fondamental du système; et les formules (709; 2) et (709; 3) sont les formules de Cramer.

Si $\vec{A}$ et $\vec{B}$ sont linéairement dépendants $\left(\vec{B} = \lambda \cdot \vec{A}\right)$, deux cas peuvent se produire :

$\vec{C}$ n'appartient pas à l'espace engendré par $\vec{A}$ (fig. 709 *b*); le système n'a pas de solution. Dans ce cas $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$.

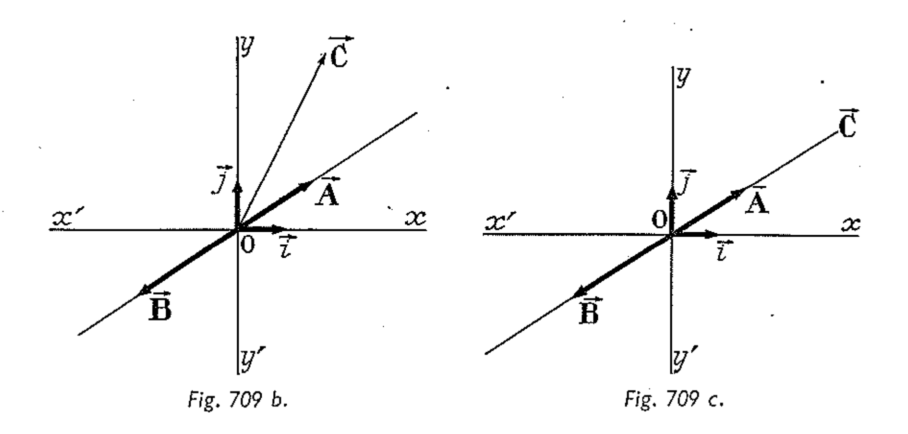


Fig. 709 b. *Fig. 709 c.*

$\vec{C}$ appartient à l'espace engendré par $\vec{A}$ (fig. 709 *c*), $\vec{C} = \alpha\ \vec{A}$. L'équation (709; 1) s'écrit :

$$x.\vec{A} + \lambda y.\vec{A} = \alpha \cdot \vec{A}$$

ou

$$x + \lambda y = \alpha$$

ou encore :

$$\begin{cases} x = \alpha - \lambda t \\ y = t \end{cases} \quad t \in K$$

Dans ce cas : $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$.

En résumé :

ab' — ba' ≠ *0 : solution unique donnée par les formules de Cramer.*

ab' — ba' = 0 : $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$ ***Pas de solution***

$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$ ***Indétermination.***

Résolution algébrique.

Le système :

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases} \quad \begin{vmatrix} b' \\ -b \end{vmatrix} \begin{matrix} -a' \\ a \end{matrix}$$

peut se résoudre par la méthode des combinaisons linéaires. En employant les multiplicateurs indiqués on obtient le système équivalent :

$$\begin{cases} (ab' - ba')\,x = cb' - bc' \\ (ab' - ba')\,y = ac' - ca' \end{cases}$$

Si ab′ — ba′ ≠ 0, on obtient les formules de Cramer :

$$x = \frac{cb' - bc'}{ab' - ba'}\,; \quad y = \frac{ac' - ca'}{ab' - ba'}.$$

Si ab′ — ba′ = 0, ou $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \lambda$, ou $a' = \lambda a$ et $b' = \lambda b$, le système s'écrit :

$$\begin{cases} ax + by = c \\ \lambda(ax + by) = c' \end{cases}$$

Si $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$, ou $c' \neq \lambda c$, le système est impossible.

Si $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$, les deux équations sont identiques; il y a indétermination.

710. Système de deux équations à trois inconnues.

On se propose ici l'étude du système d'équations :

$$\begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \end{cases}$$

$a, b, c, d, a', b', c', d'$, appartenant à un corps K commutatif.

Dans l'espace vectoriel K^2, on considère les vecteurs :

$$\vec{A}(a\,;a') \qquad \vec{B}(b\,;b') \qquad \vec{C}(c\,;c') \qquad \vec{D}(d\,;d')$$

Le système proposé s'écrit alors vectoriellement :

$$x\cdot\vec{A} + y\cdot\vec{B} + z\cdot\vec{C} = \vec{D}.$$

Dans K^2, les vecteurs $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$ sont toujours linéairement dépendants.

Si $\vec{A}$ ***et*** $\vec{B}$ ***sont linéairement indépendants,*** le système s'écrit :

$$x\cdot\vec{A} + y\cdot\vec{B} = \vec{D} - z\cdot\vec{C}$$

La méthode du numéro précédent s'applique, et on a :

$$\begin{cases} x = \dfrac{\operatorname{Det}(\vec{D} - z\vec{C} ; \vec{B})}{\operatorname{Det}(\vec{A} ; \vec{B})} = \dfrac{\operatorname{Det}(\vec{D} ; \vec{B})}{\operatorname{Det}(\vec{A} ; \vec{D})} - z \cdot \dfrac{\operatorname{Det}(\vec{C} ; \vec{B})}{\operatorname{Det}(\vec{A} ; \vec{B})} \\ y = \dfrac{\operatorname{Det}(\vec{A} ; \vec{D} - z\vec{C})}{\operatorname{Det}(\vec{A} ; \vec{B})} = \dfrac{\operatorname{Det}(\vec{A} ; \vec{D})}{\operatorname{Det}(\vec{A} ; \vec{B})} - z \cdot \dfrac{\operatorname{Det}(\vec{A} ; \vec{C})}{\operatorname{Det}(\vec{A} ; \vec{B})} \end{cases}$$

z est arbitraire. Il y a donc indétermination.

Si A et B sont linéairement dépendants, on a : $\vec{B} = \lambda \cdot \vec{A}, \vec{C} = \mu\vec{A}$, et le système s'écrit :

$$(x + \lambda y + \mu z)\,\vec{A} = \vec{D}.$$

Si $\vec{D}$ n'appartient pas à l'espace vectoriel engendré par $\vec{A}$, le système n'a pas de solution.

Si $\vec{D}$ appartient à l'espace vectoriel engendré par $\vec{A}$, $\vec{D} = \alpha \cdot \vec{A}$. L'équation s'écrit :

$$(x + \lambda y + \mu z)\,\vec{A} = \alpha \cdot \vec{A}$$

ou

$$x + \lambda y + \mu z = \alpha$$

et il y a indétermination d'ordre 2, y et z étant arbitraires.

711. Système de trois équations à trois inconnues.

On se propose ici l'étude du système d'équations :

$$\begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \\ a''x + b''y + c''z = d'' \end{cases}$$

dont les coefficients appartiennent à un corps K commutatif.

Dans l'espace vectoriel K^3 on considère les vecteurs :

$\vec{A}(a ; a' ; a'')$ $\quad \vec{B}(b ; b' ; b'')$ $\quad \vec{C}(c ; c' ; c'')$ $\quad \vec{D}(d ; d' ; d'')$

Le système proposé s'écrit alors vectoriellement :

$$x \cdot \vec{A} + y \cdot \vec{B} + z \cdot \vec{C} = \vec{D}$$

Si $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$ sont linéairement indépendants, ils constituent une base de K^3. Le vecteur $\vec{D}$ a une décomposition unique dans cette base; les coordonnées de $\vec{D}$ dans $\{\vec{A} ; \vec{B} ; \vec{C}\}$ constituent l'unique solution du système.

On calcule x de la façon suivante :

$$\text{Det}\left(x\cdot\vec{A}+y\cdot\vec{B}+z\cdot\vec{C};\ \vec{B};\ \vec{C}\right)=\text{Det}\left(\vec{D};\ \vec{B};\ \vec{C}\right)$$

ou

$$x\cdot\text{Det}\left(\vec{A};\ \vec{B};\ \vec{C}\right)+y\cdot\text{Det}\left(\vec{B};\ \vec{B};\ \vec{C}\right)+z\cdot\text{Det}\left(\vec{C};\ \vec{B};\ \vec{C}\right)=\text{Det}\left(\vec{D};\ \vec{B};\ \vec{C}\right)$$

ou

$$x\cdot\text{Det}\left(\vec{A};\ \vec{B};\ \vec{C}\right)=\text{Det}\left(\vec{D};\ \vec{B};\ \vec{C}\right)$$

et

$$\mathbf{x}=\frac{\text{Det}\left(\vec{D};\ \vec{B};\ \vec{C}\right)}{\text{Det}\left(\vec{A};\ \vec{B};\ \vec{C}\right)}$$

De même

$$\mathbf{y}=\frac{\text{Det}\left(\vec{A};\ \vec{D};\ \vec{C}\right)}{\text{Det}\left(\vec{A};\ \vec{B};\ \vec{C}\right)}$$

$$\mathbf{z}=\frac{\text{Det}\left(\vec{A};\ \vec{B};\ \vec{D}\right)}{\text{Det}\left(\vec{A};\ \vec{B};\ \vec{C}\right)}$$

Si $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$ sont linéairement dépendants, et si $\vec{A}$, $\vec{B}$ sont linéairement indépendants, les vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$ engendrent une variété linéaire de dimension 2.

Si $\vec{D}$ appartient à cette variété : il y a indétermination.

Si $\vec{D}$ n'appartient pas à cette variété : il y a impossibilité.

Si les bivecteurs $\{\vec{A};\ \vec{B}\}$, $\{\vec{B};\ \vec{C}\}$, $\{\vec{A};\ \vec{C}\}$ sont linéairement dépendants, autrement dit si $\vec{B}=\lambda\vec{A}$ et $\vec{C}=\mu\vec{A}$, le système s'écrit :

$$(x+\lambda y+\mu z)\,\vec{A}=\vec{D}.$$

Si $\vec{D}$ n'appartient pas à la variété engendrée par $\vec{A}$, il y a impossibilité.

Si $\vec{D}$ appartient à la variété engendrée par $\vec{A}$, il y a indétermination.

712. Exemples.

◇ *Exemple 1.*

Résoudre le système :

$$\begin{cases}2x-3y=12\\3x+y=7\end{cases}$$

On considère les vecteurs $\vec{A}$ (2; 3), $\vec{B}$ (— 3; 1) et $\vec{C}$ (12; 7).

On a :

$$\operatorname{Det}(\vec{A};\vec{B}) = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 9 = 11$$

$$\operatorname{Det}(\vec{C};\vec{B}) = \begin{vmatrix} 12 & -3 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} = 12 + 21 = 33$$

$$\operatorname{Det}(\vec{A};\vec{C}) = \begin{vmatrix} 2 & 12 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 14 - 36 = -22$$

D'où :

$$x = \frac{33}{11} = 3$$

$$y = -\frac{22}{11} = -2$$

La solution unique est donc (3; —2).

◇ *Exemple 2.*

Résoudre le système :

$$\begin{cases} 2x - 3y + z = 11 \\ x + 5y + 3z = -15 \\ 4x - y - 4z = 30 \end{cases}$$

On considère les vecteurs :

$\vec{A}(2;1;4)$; $\vec{B}(-3;5;-1)$; $\vec{C}(1;3;-4)$; $\vec{D}(11;-15;30)$

On a :

$$\operatorname{Det}(\vec{A};\vec{B};\vec{C}) = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 5 & 3 \\ 4 & -1 & -4 \end{vmatrix} = 103$$

$$\operatorname{Det}(\vec{D};\vec{B};\vec{C}) = \begin{vmatrix} 11 & -3 & 1 \\ -15 & 5 & 3 \\ 30 & -1 & -4 \end{vmatrix} = 412$$

$$\operatorname{Det}(\vec{A};\vec{D};\vec{C}) = \begin{vmatrix} 2 & 11 & 1 \\ 1 & -15 & 3 \\ 4 & 30 & -4 \end{vmatrix} = -206$$

$$\operatorname{Det}(\vec{A};\vec{B};\vec{D}) = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 11 \\ 1 & 5 & -15 \\ 4 & -1 & 30 \end{vmatrix} = -309$$

D'où :

$$x = \frac{412}{103} = 4$$

$$y = -\frac{206}{103} = -2$$

$$z = -\frac{309}{103} = -3$$

La solution unique est donc (4; — 2; — 3).

◇ *Exemple 3.*

Résoudre et discuter le système

$$\begin{cases} mx + y = 2 \\ x + my = 2m \end{cases}$$

Le déterminant fondamental est

$$D = \begin{vmatrix} m & 1 \\ 1 & m \end{vmatrix} = m^2 - 1$$

Si $m \neq \pm 1$, le système admet une solution unique, donnée par les formules de Cramer :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2m & m \end{vmatrix}}{D} = 0$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} m & 2 \\ 1 & 2m \end{vmatrix}}{D} = \frac{2(m^2 - 1)}{m^2 - 1} = 2$$

La solution est donc (0; 2).

Si $m = 1$, le système s'écrit :

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ x + y = 2 \end{cases}$$

Il y a indétermination : si $x = t \quad y = 2 - t$. D'où la solution générale

$$S = \{ (x; y) \,/\, x = t, \quad y = 2 - t, \quad t \in R \}$$

Si $m = -1$, le système s'écrit :

$$\begin{cases} -x + y = 2 \\ x - y = -2 \end{cases}$$

où

$$\begin{cases} x - y = -2 \\ x - y = -2 \end{cases}$$

Il y a indétermination : si $x = t$, $y = 2 + t$. D'où la solution générale

$$S = \{ (x; y) \,/\, x = t; \quad y = 2 + t; \quad t \in R \}$$

◇ *Exemple 4.*

Résoudre, dans le corps $K = Z/5$ *le système :*

$$\begin{cases} \dot{2} \cdot x + y = \dot{3} \\ x + \dot{2}y = \dot{4} \end{cases}$$

On considère les vecteurs de K^2 :

$$\vec{A}(\dot{2}; \dot{1}) \qquad \vec{B}(\dot{1}; \dot{2}) \qquad \vec{C}(\dot{3}; \dot{4})$$

On a :

$$\text{Det}(\vec{A}; \vec{B}) = \begin{vmatrix} \dot{2} & \dot{1} \\ \dot{1} & \dot{2} \end{vmatrix} = \dot{3}$$

$$\text{Det}(\vec{C}; \vec{B}) = \begin{vmatrix} \dot{3} & \dot{1} \\ \dot{4} & \dot{2} \end{vmatrix} = \dot{2}$$

$$\text{Det}(\vec{A}; \vec{C}) = \begin{vmatrix} \dot{2} & \dot{3} \\ \dot{1} & \dot{4} \end{vmatrix} = \dot{0}$$

Par suite :

$$x = \frac{\dot{2}}{\dot{3}} = \dot{4}$$

$$y = \frac{\dot{0}}{\dot{3}} = \dot{0}$$

La solution est donc $(\dot{4}; \dot{0})$.

CHAPITRE XLIX

ENDOMORPHISMES D'UN ESPACE VECTORIEL

713. Espace vectoriel $\mathcal{L}(E; E)$.

Soit un espace vectoriel E sur le corps K.

On envisage l'ensemble $\mathcal{L}(E; E)$ des applications linéaires de E dans E, c'est-à-dire l'ensemble des *endomorphismes de E*.

D'après le résultat du n° 704 :

L'ensemble $\mathcal{L}(E; E)$ des endomorphismes de E est un espace vectoriel sur le corps K.

714. Anneau $\mathcal{L}(E; E)$.

1° L'ensemble $\mathcal{L}(E; E)$ est muni d'une addition qui fait de $\mathcal{L}(E; E)$ un groupe additif commutatif. (Cf. n° 702.)

2° La loi de composition des fonctions notée $_o$ est une loi interne à $\mathcal{L}(E; E)$. On sait qu'elle possède les propriétés suivantes (cf. n° 706) :

A	$(\forall u)\ (\forall v)\ (\forall w)$	$(w_o v)_o u = w_o (v_o u)$
D_G	$(\forall u_1)\ (\forall u_2)\ (\forall v)$	$v_o (u_1 + u_2) = v_o u_1 + v_o u_2$
D_D	$(\forall u)\ (\forall v_1)\ (\forall v_2)$	$(v_1 + v_2)_o u = v_{1o} u + v_{2o} u.$

De plus, il existe une application linéaire neutre e :

e : $\quad x \in E \longrightarrow e(x) = x \in E.$

En effet :

$$(\forall x) \quad (e_o u)(x) = e[u(x)] = u(x)$$

et

$$(\forall x) \quad (u_o e)(x) = u[e(x)] = u(x).$$

D'où :

[N] $(\exists e)\ (\forall u) \qquad e_0 u = u_0 e = u.$

En conséquence :

L'ensemble $\mathcal{L}(E;\ E)$ muni de l'addition notée $+$, et de la loi de composition notée $_0$ est donc un anneau unitaire.

Cet anneau n'est pas commutatif.

715. Relation entre la loi de composition et la multiplication par un nombre.

On a :

$$(\forall x) \qquad [\alpha.(v_0 u)](x) = \alpha.[(v_0 u)(x)] = \alpha.\{v[u(x)]\} = (\alpha.v)[u(x)] = [(\alpha.v)_0 u](x)$$

Et :

$$\alpha.(v_0 u) = (\alpha.v)_0 u.$$

De même :

$$(\forall x) \qquad [v_0(\alpha u)](x) = v[(\alpha.u)(x)] = v\{\alpha.[u(x)]\} = \alpha.\{v[u(x)]\} = \alpha.[(v_0 u)(x)] = [\alpha.(v_0 u)](x)$$

Et :

$$v_0(\alpha.u) = \alpha.(v_0 u)$$

par suite :

[A″] $(\forall \alpha)\ (\forall u)\ (\forall v) \qquad \boldsymbol{\alpha \cdot (v_0 u) = (\alpha \cdot v)_0 u = v_0(\alpha \cdot u)}$

716. Algèbre $\mathcal{L}(E;E)$.

En résumé, on a introduit dans $\mathcal{L}(E;\ E)$ deux lois internes notées $+$ et $_0$, et une loi externe.

Addition. L'addition possède les propriétés [A] [N] [S] [C].

Loi de composition. La loi de composition possède les propriétés [A] [N].

Loi externe. La loi externe possède les propriétés [N′] [A′].

Relation entre les deux lois internes. On a les propriétés [D] = [Dd] et [Dg].

Relation entre l'addition et la loi externe. On a les propriétés [D′] et [D″].

Relation entre la loi de composition et la loi externe. On a la propriété [A″].

En conséquence :

$\mathcal{L}$(E; E) est l'algèbre des endomorphismes de E.

717. Étude analytique d'un endomorphisme.

Soit un espace vectoriel E, de dimension 3, rapporté à une base $\{\vec{i}; \vec{j}; \vec{k}\}$
Un endomorphisme u de E est déterminé par le trivecteur :

$$u(\vec{i}) = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$$
$$u(\vec{j}) = a'\vec{i} + b'\vec{j} + c'\vec{k} \qquad (717;1)$$
$$u(\vec{k}) = a''\vec{i} + b''\vec{j} + c''\vec{k}$$

ou par la matrice carrée 3 × 3 :

$$A = \begin{pmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{pmatrix} \qquad (717;2)$$

ou par les formules

$$\begin{cases} x' = ax + a'y + a''z \\ y' = bx + b'y + b''z \\ z' = cx + c'y + c''z \end{cases} \qquad (717;3)$$

qui donnent $\vec{V}'(x'; y'; z')$ en fonction de $\vec{V}(x; y; z)$.

718. Endomorphismes réguliers.

Un endomorphisme u est dit régulier s'il est bijectif.

Les formules (713; 3) montrent qu'à $\vec{V}(x; y; z)$ correspond un seul vecteur $\vec{V}'(x'; y'; z')$.

u sera régulier si tout vecteur $\vec{V}'$ est l'image d'un unique vecteur $\vec{V}$. Cela signifie que (x', y', z') étant donnés on doit pouvoir calculer $(x; y; z)$ de façon unique.

Si le déterminant de la matrice :

$$\text{Det}\, A = \begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix}$$

n'est pas nul, les formules (717; 3) constituent un système qui admet une solution unique donnée par les formules de Cramer (cf. nº 711) et on a :

$$\begin{cases} x = \alpha x' + \alpha' y' + \alpha'' z' \\ y = \beta x' + \beta' y' + \beta'' z' \\ z = \gamma x' + \gamma' y' + \gamma'' z' \end{cases}$$

Donc $\overset{-1}{u}$ est linéaire.

Et :

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un endomorphisme soit régulier est que le déterminant de la matrice représentative ne soit pas nul.

719. Groupe des endomorphismes réguliers.

On considère l'ensemble $\mathcal{R}$ (E; E) des endomorphismes réguliers de E, muni de la loi de composition notée $_0$.

Associativité.

La loi de composition est évidemment associative dans $\mathcal{R}$ (E; E) puisqu'elle l'est dans $\mathcal{L}$(E; E).

[A] $(\forall u)\ (\forall v)\ (\forall w) \quad (w_0 v)_0\, u = w_0\, (v_0 u).$

Existence d'un neutre.

L'application neutre e est déterminée par :

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$$

Sa matrice est

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et

$$\text{Det } E = 1$$

Donc e est régulier. Et :

[N] $(\exists e)\ (\forall u) \quad u_0 e = e_0 u = u$

L'ensemble $\mathcal{R}$ (E; E) est symétrisé.

Soit l'endomorphisme régulier u.

Par suite $\overset{-1}{u}$ est bijectif; mais $\overset{-1}{u}$ est aussi linéaire (cf. numéro précédent). Ainsi $\overset{-1}{u}$ est régulier.

Autrement dit :

[S] $(\forall u)\ (\exists\, \overset{-1}{u}) \quad u\ _0\, \overset{-1}{u} = \overset{-1}{u}_0\, u = e.$

Finalement :

L'ensemble des endomorphismes réguliers de l'espace vectoriel E muni de la loi de composition est un groupe.

CHAPITRE L

FONCTIONS NUMÉRIQUES E ET M

720. Forme normalisée d'un nombre réel.

Soit un nombre réel x.

Il existe un nombre entier rationnel c ($c \in \mathbb{Z}$) tel que

$$c \leqslant x < c + 1 \qquad (720; 1)$$

Ce nombre entier rationnel c est appelé la partie entière ou la caractéristique du nombre x.

Il existe un nombre rèel m compris entre 0 et 1 ($0 \leqslant m < 1$) tel que

$$x = c + m. \qquad (720; 2)$$

Ce nombre m est appelé la mantisse du nombre x.

c + m est la forme normalisée du nombre réel x.

Un nombre réel est donc toujours la somme de sa caractéristique et de sa mantisse.

◇ *Exemple 1.*

Soit le nombre $x = 3{,}73235$.

On a : $3 < 3{,}73235 < 4$

Donc :

$$c = 3$$

et

$$m = 0{,}73235$$

Exemple 2.

Soit le nombre $x = -3$.

On a : $-3 = x < -2$

Donc :

$$c = -3$$

et

$$m = 0$$

◇ *Exemple 3.*

Soit le nombre négatif $x = -2{,}503\,29$.

On a : $$-3 < x < -2$$

Donc :

$$c = -3$$

D'autre part x peut s'écrire :

$$x = -3 + 1 - 0{,}503\,29$$
$$= -3 + 0{,}496\,71$$

et par suite :

$$m = 0{,}496\,71$$

721. La fonction partie entière.

A un nombre réel x on peut faire correspondre sa caractéristique sa partie entière c.

On définit ainsi la fonction partie entière E :

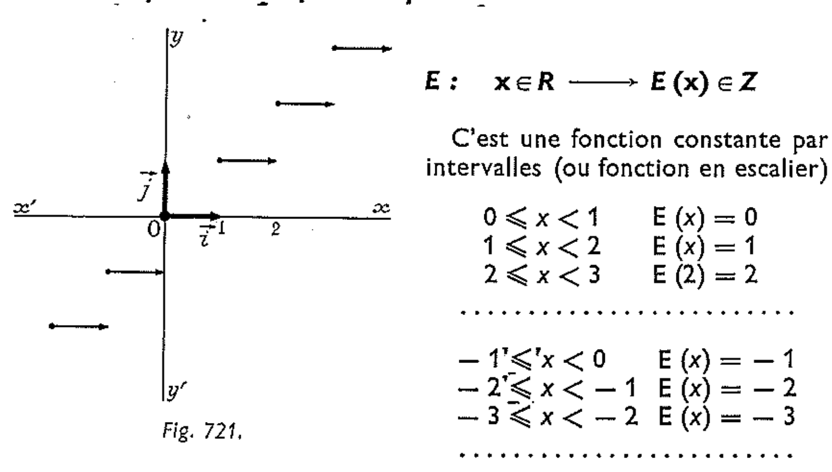


Fig. 721.

$$\mathbf{E} : \quad x \in R \longrightarrow E(x) \in Z$$

C'est une fonction constante par intervalles (ou fonction en escalier)

$0 \leqslant x < 1$	$E(x) = 0$
$1 \leqslant x < 2$	$E(x) = 1$
$2 \leqslant x < 3$	$E(2) = 2$
....	....
$-1 \leqslant x < 0$	$E(x) = -1$
$-2 \leqslant x < -1$	$E(x) = -2$
$-3 \leqslant x < -2$	$E(x) = -3$
....	....

La représentation graphique formée de segments de droites parallèles à $x'Ox$ est alors facile à construire (fig. 721).

722. La fonction mantisse.

A un nombre réel x on peut faire correspondre sa mantisse m. La mantisse satisfait à l'inégalité $0 \leqslant x < 1$, ou $x \in [0; 1[$. De $x = c + m$ on déduit $m = x - c$.

On définit ainsi la fonction mantisse M :

$$\mathbf{M} : \quad x \in \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{M}(x) \in [0; 1[$$

Si $0 \leqslant x < 1$, on a $\mathrm{M}(x) = x$.
Si $1 \leqslant x < 2$, on a $\mathrm{M}(x) = x - 1$
. . . .

La représentation graphique est formée de segments de droite (fig. 722).

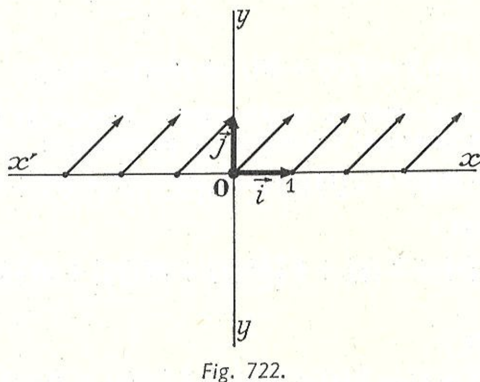


Fig. 722.

723. Écriture normalisée d'un nombre réel.

D'après ce qui précède on a :

$$(\forall x) \quad x = \mathrm{E}(x) + \mathrm{M}(x)$$

ou

$$x = c + m$$

Si la caractéristique c est positive on écrit ;

$$x = c, m$$

Si la caractéristique — c est négative, on écrit :

$$x = \bar{c}, m$$

Par exemple :

$$x = 2{,}735\,04$$

et

$$x = \bar{2},735\,04$$

$x = 2,735\,04$ signifie $x = 2 + 0,735\,04$; c'est l'écriture classique.
$x = \bar{2},735\,04$ signifie $x = -2 + 0,735\,04$; et représente le nombre $x = -1,264\,96$.

724. Addition.

Soient deux nombres réels

$$x = E(x) + M(x)$$

et

$$y = E(y) + M(y)$$

On a :

$$x + y = E(x) + E(y) + M(x) + M(y)$$

$M(x) + M(y)$ est un nombre appartenant à l'intervalle $[0; 2[$, et n'est pas toujours une mantisse; il faut donc le normaliser :

$$M(x) + M(y) = E[M(x) + M(y)] + M[M(x) + M(y)]$$

D'où finalement :

$$\boldsymbol{x + y = E(x) + E(y) + E[M(x) + M(y)] + M[M(x) + M(y)]} \qquad (724; 1)$$

Autrement dit :

$$E(x + y) = E(x) + E(y) + E[M(x) + M(y)] \qquad (724; 2)$$

et

$$M(x + y) = M[M(x) + M(y)] \qquad (724; 3)$$

◇ *Exemple 1.*

Soient les nombres $a = 2,324\,50$ et $b = -3,625\,02$. *Après les avoir normalisés, calculer* $a + b$.

On a :

$$a = \bar{2},324\,50$$
$$b = \bar{4},374\,98$$

comme formes normalisées. Par suite :

$$a + b = [2 - 4] + [0,324\,50 + 0,037\,98]$$
$$= [-2] + [0,699\,48]$$

ou

$$a + b = \bar{2},699\,48$$

◇ *Exemple 2.*

Soient les nombres $a = 4{,}726\,34$ *et* $b = -2{,}324\,24$. *Calculer* $x + y$ *en normalisant.*

On a :

$$a = 4{,}726\,34 = +4 + 0{,}726\,34$$
$$b = -2{,}324\,24 = -3 + 0{,}675\,76 = \bar{3}{,}675\,76$$

Par suite :

$$a + b = [4 - 3] + [0{,}726\,34 + 0{,}675\,76]$$
$$= [1] + [1{,}402\,10]$$

ou

$$a + b = 2{,}402\,10$$

◇ *Exemple 3.*

Soient les nombres $x = 1{,}803\,11$ *et* $y = \bar{1}{,}213\,74$. *Calculer* $x + y$ *après avoir normalisés les deux nombres.*

On a :

$$x = 1{,}803\,11 = 1 + 0{,}803\,11$$
$$y = \bar{1}{,}213\,74 = -2 + 0{,}786\,26 = \bar{2}{,}786\,26.$$

D'où :

$$x + y = [1 - 2] + [0{,}803\,11 + 0{,}786\,26]$$
$$= [-1] + [1{,}589\,37]$$

ou $$x + y = 0{,}589\,37.$$

725. Opposé d'un nombre réel.

Soit le nombre

$$x = E(x) + M(x).$$

Donc :

$$-x = -E(x) - M(x)$$
$$= [-E(x) - 1] + [1 - M(x)].$$

Or :

$$-E(x) - 1 \in Z$$

et

$$1 - M(x) \in [0; 1[$$

Par suite :

$$\boldsymbol{E(-x) = -E(x) - 1 = -[E(x) + 1]} \qquad (725\,;\,1)$$

et

$$\boldsymbol{M(-x) = 1 - M(x)} \qquad (725\,;\,2)$$

726. Soustraction.

Soient les nombres

$$x = E(x) + M(x)$$
$$y = E(y) + M(y).$$

Par suite :

$$x - y = E(x) - E(y) + M(x) - M(y)$$
$$E(x) - E(y) \in Z \quad \text{et} \quad M(x) - M(y) \in]-1\,;\,+1[.$$

Donc :

$$\boldsymbol{x - y = E(x) - E(y) + E[M(x) - M(y)] + M[M(x) - M(y)]} \qquad (726\,;\,1)$$

Autrement dit :

$$E(x - y) = E(x) - E(y) + E[M(x) - M(y)] \qquad (726\,;\,2)$$

et

$$M(x - y) = M[M(x) - M(y)] \qquad (726\,;\,3)$$

◇ *Exemple 1.*

Soient les nombres a $= \bar{2},403\ 55$ *et* b $= 1,443\ 06$. *Calculer* a $-$ b.

On a :

$$a - b = (-3 + 1,403\ 55) - (1 + 0,443\ 06)$$
$$= -4 + 0,960\ 49$$
$$= \bar{4},960\ 49.$$

◇ *Exemple 2.*

Soient les nombres a $= \bar{4},006\ 43$; b $= \bar{1},908\ 81$; c $= \bar{1},879\ 87$. *Calculer* a $-$ b $-$ c.

On a :

$$a - b - c = [-4 + 1 + 1] + [0,006\ 43 - 0,908\ 81 - 0,879\ 87]$$
$$= -4 + 2,006\ 43 - 0,908\ 81 - 0,879\ 87)$$
$$= -4 + 0,217\ 75$$

ou $a - b - c = \bar{4},217\ 75.$

727. Multiplication d'un réel normalisé par un nombre réel.

Soient le nombre réel normalisé

$$x = E(x) + M(x)$$

et le nombre réel λ.

On a : $\lambda x = \lambda \cdot E(x) + \lambda\, M(x)$

$$= E[\lambda \cdot E(x) + \lambda \cdot M(x)] + M[\lambda \cdot E(x) + \lambda \cdot M(x)] \quad (727,1)$$

728. Multiplication d'un réel normalisé par un entier rationnel.

Cette formule (727; 1) est sans intérêt pratique. En effet dans la majeure partie des cas le nombre λ est un entier rationnel.

Dans ce cas on a :

$$\lambda x = \lambda \cdot E(x) + \lambda \cdot M(x)$$
$$= \lambda \cdot E(x) + E[\lambda \cdot M(x)] + M[\lambda \cdot M(x)]$$

◇ *Exemple 1.*

Soient le nombre normalisé $x = 2{,}403\,27$ *et* $\lambda = 3$. *Calculer* λx.

On a :

$$\lambda x = 3\,[2 + 0{,}403\,27]$$
$$= [6] + [1{,}209\,81]$$
$$= [7] + [0{,}209\,81]$$

et

$$\lambda x = 7{,}209\,81.$$

Ce n'est autre que la multiplication ordinaire.

◇ *Exemple 2.*

Soient $x = \bar{2}{,}303\,42$ *et* $\lambda = -2$. *Calculer* λx.

On a :

$$\lambda x = (-2) \cdot [-2 + 0{,}303\,42]$$
$$= [4] + [-0{,}606\,84]$$
$$= [4] + [-1 + 0{,}393\,16]$$
$$= [3] + [0{,}393\,16]$$

et

$$\lambda x = 3{,}393\,16.$$

◇ *Exemple 3.*

Soient $x = \bar{1},903\,08$ et $\lambda = 4$. *Calculer* λx.

On a :

$$\lambda x = 4\cdot[-1 + 0,903\,08]$$
$$= [-4] + 3,612\,32]$$
$$= [-4 + 3] + [0,612\,32]$$

et

$$\lambda x = \bar{1},612\,32.$$

729. Division d'un réel normalisé par un entier relatif.

Dans la pratique la division d'un réel normalisé par un entier relatif se rencontre assez souvent.

Soient un nombre réel normalisé $x = E(x) + M(x)$ et un entier rationnel λ. On peut supposer λ positif.

Si $E(x)$ *est un multiple de* λ, on a immédiatement :

$$\frac{x}{\lambda} = \frac{E(x)}{\lambda} + \frac{M(x)}{\lambda}$$

$$\frac{E(x)}{\lambda} \in Z \quad \text{et} \quad 0 \leqslant \frac{M(x)}{\lambda} < 1.$$

Donc ici :

$$E\left(\frac{x}{\lambda}\right) = \frac{E(x)}{\lambda} \quad \text{et} \quad M\left(\frac{x}{\lambda}\right) = \frac{M(x)}{\lambda}$$

Si $E(x)$ *est positif*, on fait la division habituelle.

Si $E(x)$ *est négatif*, on considère le multiple de λ immédiatement inférieur à $E(x)$: $k < E(x) < k + 1$.

On peut écrire alors :

$$x = k + [E(x) - k + M(x)]$$

avec $k \in Z$ et $0 \leqslant E(x) + M(x) - k < \lambda$ car on a : $0 \leqslant x - k < \lambda$.

Finalement :

$$\frac{x}{\lambda} = \left[\frac{k}{\lambda}\right] + \left[\frac{E(x) + M(x) - k}{\lambda}\right]$$

◇ *Exemple 1.*

Soit $x = 3,122\,52$. *Calculer* $\frac{x}{3}$.

Immédiatement :

$$\frac{x}{3} = 1{,}040\,84$$

◇ *Exemple 2.*

Soit x = 4,252 45. *Calculer* $\frac{x}{5}$.

Immédiatement :

$$\frac{x}{5} = 0{,}850\,49$$

◇ *Exemple 3.*

Soit x = $\bar{3}$,443 35. *Calculer* $\frac{x}{5}$.

On a :

$$x = -3 + 0{,}443\,35$$
$$= -5 + 2{,}443\,35$$

Et :

$$\frac{x}{5} = -1 + 0{,}488\,67$$

ou

$$\frac{x}{5} = \bar{1}{,}488\,67$$

CHAPITRE LI

COURBES ET SURFACES

730. Courbes planes paramétrées.

Soient un corps K commutatif (ou une partie A de K : $A \subset K$), et les deux fonctions :

$$f: \quad t \in A \longrightarrow x = f(t) \in K$$
$$g: \quad t \in A \longrightarrow y = g(t) \in K.$$

On appelle courbe l'ensemble

$$C = \{(x; y) \mid x = f(t); \quad y = g(t); \quad t \in A\}$$

On peut représenter graphiquement cet ensemble C des couples (x; y) dans le plan K^2. Cette représentation graphique est aussi appelée courbe C.

t est le paramètre de la courbe. x = f(t) et y = g(t) sont les équations paramétriques de la courbe C.

La représentation graphique C est l'image de la droite K (ou de $A \subset K$) dans le plan K^2 par l'application φ :

$$\varphi : \qquad t \in A \longrightarrow \varphi(x; y) = (x; y) = [f(t); g(t)] \in K^2.$$

◇ *Exemple 1.*

Les équations

$$\begin{cases} x = t + 1 \\ y = 1 - t \end{cases}$$

sont les équations paramétriques de la droite (D) d'équation implicite $x + y = 2$ (cf. n° 555).

◇ *Exemple 2.*

Soit le corps $K = Z/5$. On considère les fonctions :

$$f: \quad t \in K \longrightarrow x = t + \dot{1}.$$
$$g: \quad t \in K \longrightarrow y = t^2.$$

Étudier la courbe C ayant pour équations paramétriques :

$$\begin{cases} x = t + \dot{1} \\ y = t^2 \end{cases}$$

On construit facilement le tableau suivant :

t	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$	$\dot{3}$	$\dot{4}$
$x = t + \dot{1}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$	$\dot{3}$	$\dot{4}$	$\dot{0}$
$y = t^2$	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{4}$	$\dot{4}$	$\dot{1}$

Donc :

$$C\{(\dot{1};\dot{0});(\dot{2};\dot{1});(\dot{3};\dot{4});(\dot{4};\dot{4});(\dot{0};\dot{1})\}$$

La représentation graphique est la suivante (fig. 730 *a*) :

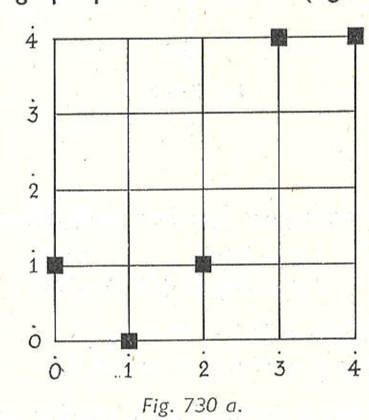


Fig. 730 a.

◇ *Exemple 3.*

On considère les deux fonctions numériques

f : $t \in R \longrightarrow x = f(t) = E(t)$

g : $t \in R \longrightarrow y = g(t) = M(t)$

Étudier la courbe C d'équation

$$\begin{cases} x = E(t) \\ y = M(t) \end{cases}$$

Si $t \in [0; 1[$, on a :

$x = 0$

$y = t$, avec $t \in [0; 1[$ ou $y \in [0; 1[$

Si $t \in [1;2[$, on a :

$$x = 1$$
$$y = t - 1 \text{ avec } t \in [1;2[\text{ ou } y \in [0;1[$$

et ainsi de suite.

La représentation graphique de la courbe C est la suivante (fig. 730 *b*) :

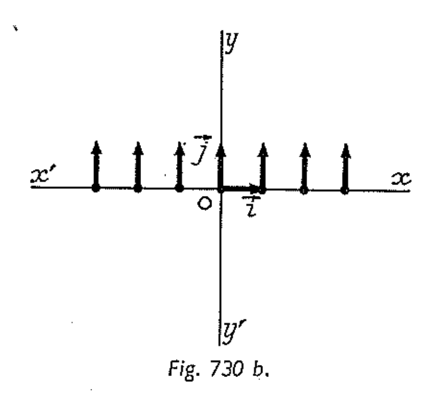


Fig. 730 b.

◇ *Exemple 4.*

Étudier la courbe C ayant pour équations paramétriques :

$$\begin{cases} x = E(t) & t \in R \\ y = \text{Sup}\,(t+1\,;1-t) \end{cases}$$

Si $t \leqslant 0$, on a : $\text{Sup}\,(t+1\,;1-t) = 1-t$.
Si $t \geqslant 0$, on a : $\text{Sup}\,(t+1\,;1-t) = t+1$.

Pour $t \geqslant 0$, on obtient la partie C_1 de la courbe; pour $t \leqslant 0$ on obtient la partie C_2; et

$$C = C_1 \cup C_2.$$

Étude de C_1.

Si $t \in [0;1[$ on a :

$$x = 0$$
$$y = t + 1 \text{ ou } y \in [1;2[$$

Si $t \in [1;2[$ on a :

$$x = 1$$
$$y = t + 1 \text{ ou } y \in [2;3[$$

et ainsi de suite.

Étude de C_2.

Si $t \in [-1; 0[$ on a :

$$x = -1$$
$$y = 1 - t \text{ ou } y \in]1; 2]$$

Si $t \in [-2; -1[$ on a :

$$x = -2$$
$$y = 1 - t \text{ ou } y \in]2; 3]$$

et ainsi de suite.

Finalement, la représentation graphique de la courbe C est la suivante : (fig. 730 c)

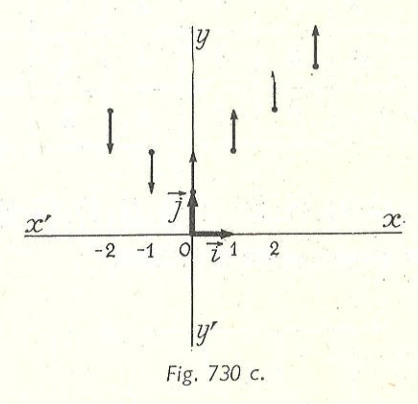


Fig. 730 c.

731. Courbes paramétrées dans l'espace.

De même, une courbe C peut être donnée dans l'espace K^3 par trois équations paramétriques :

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \\ z = h(t) \end{cases}$$

En dehors de l'hélice circulaire, étudiée plus loin, ces courbes ne sont pas envisagées dans ce cours.

732. Courbes planes définies par une équation explicite.

Une courbe plane C peut être définie par une fonction

f : $\mathbf{x} \in K \longrightarrow \mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \in K$

La courbe C est la représentation graphique du graphe de la fonction f.

En effet on a :

$$C \begin{cases} x = t \\ y = f(t) \end{cases}$$

◇ *Exemple 1.*

On considère le corps K = Z/5. Soit la fonction

$$f: \quad x \in K \longrightarrow y = x^2 + x \in K$$

Étudier la courbe C d'équation explicite $y = x^2 + x$.

On construit facilement le tableau suivant :

x	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$	$\dot{3}$	$\dot{4}$
x^2	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{4}$	$\dot{4}$	$\dot{1}$
$y = x^2 + x$	$\dot{0}$	$\dot{2}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$	$\dot{0}$

D'où :

$$C = \{(\dot{0};\dot{0});(\dot{1};\dot{2});(\dot{2};\dot{1});(\dot{3};\dot{2});(\dot{4};\dot{0})\}$$

La représentation graphique est la suivante :

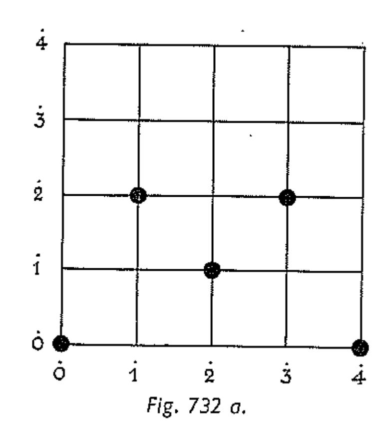


Fig. 732 a.

◇ *Exemple 2.*

Les représentations graphiques des fonctions E et M (cf. nos 721 et 722) sont des courbes d'équations respectives :

$$y = E(x)$$
$$y = M(x)$$

◇ *Exemple 3.*

Étudier la courbe C d'équation explicite $y = x + E(x)$.

Si $x \in [0; 1[$, on a $E(x) = 0$, d'où $y = x$.

Si $x \in [1; 2[$, on a $E(x) = 1$, d'où $y = x + 1$.

Si $x \in [2; 3[$, on a $E(x) = 2$, d'où $y = x + 2$.

. . . .

Si $x \in [-1; 0[$, on a $E(x) = -1$, d'où $y = x - 1$.

. . . .

De façon générale, si $x \in [p; p+1[$, $p \in Z$, on a $y = x + p$.

La courbe C est représentée sur la figure suivante (fig. 732 *b*) :

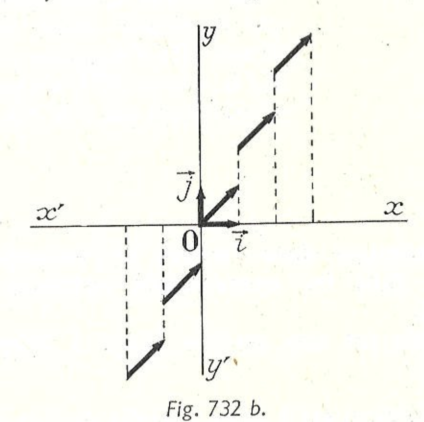


Fig. 732 b.

733. Courbes planes définies par une équation implicite.

Dans le plan K^2, on considère les couples $(x; y)$ satisfaisant à une relation $F(x; y) = 0$. La courbe C est l'ensemble de ces couples :

$$C = \{(x; y) / (x; y) \in K^2; F(x; y) = 0\}$$

La représentation graphique est aussi appelée la courbe C donnée par l'équation implicite $F(x; y) = 0$.

◇ *Exemple 1.*

Étude de la courbe ayant pour équation implicite $ux + vy + r = 0$.

La courbe d'équation $ux + vy + r = 0$ est une droite (cf. n° 556).

◇ *Exemple 2.*

Étude de la courbe ayant pour équation implicite $x^2 + y^2 = 1$.

La courbe d'équation $x^2 + y^2 = 1$ est le cercle de centre O et de rayon $R = 1$.

◇ *Exemple 3.*

Étude de la courbe ayant pour équation implicite $E(y - x) = 0$.

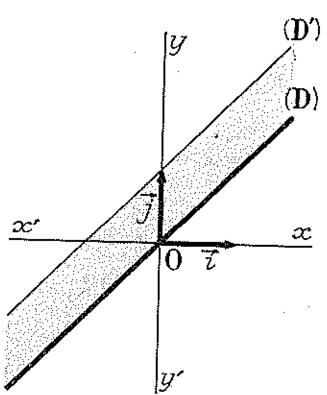


Fig. 733 a.

L'équation $E(y - x) = 0$ équivaut à $y - x \in [0; 1[$

Soit $t \in [0, 1[$; on a alors :

$$y - x = t \quad \text{avec} \quad t \in [0; 1[$$

ou

$$y = x + t \quad \text{avec} \quad t \in [0; 1[$$

La courbe C est donc représentée ici par l'intérieur d'une bande (D; D'); la droite (D) d'équation $y = x$ appartient à C; la droite (D') d'équation $y = x + 1$ n'appartient pas à C (fig. 733 *a*).

734. Surfaces.

On peut envisager dans l'espace R^3 l'ensemble S des points M(x; y; z) dont les coordonnées satisfont à la relation F(x; y; z) = 0.

Cet ensemble est une surface réelle S d'équation implicite F(x; y; z) = 0.

L'étude de ces surfaces est à peine abordée dans ce cours.

◇ *Exemple 1.*

$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ est l'équation d'une sphère de centre O et de rayon R.

◇ *Exemple 2.*

Dans le plan xOy on considère la courbe C d'équation $F(x; y) = 0$.

On considère la surface cylindrique (cf. n° 570) formée par l'ensemble S des droites parallèles à $z'Oz$ et rencontrant la courbe C. *C est la directrice de la surface.*

L'équation de cette surface cylindrique est :

$$(\forall z) \quad F(x; y) = 0.$$

Si la courbe C est un cercle, dans l'espace métrique R^3, S est *une surface cylindrique circulaire.*

Son équation est :

$$(\forall z) \quad x^2 + y^2 = R^2.$$

Si l'espace métrique R^3 est rapporté à un repère orthonormé, S est *une surface cylindrique de révolution.*

735. Représentation graphique d'une équation à deux inconnues.

Soit l'équation :

$$f(x; y) = 0.$$

C'est l'équation d'une courbe C.

Donc :

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un point $M(\alpha; \beta)$ appartienne à la courbe C d'équation $f(x; y) = 0$ est que l'on ait $f(\alpha; \beta) = 0$.

Et aussi :

Une condition nécessaire et suffisante pour que (α, β) soit une solution particulière de l'équation $f(x; y) = 0$ est que le point $M(\alpha; \beta)$ appartienne à la courbe C d'équation $f(x; y) = 0$.

◇ *Exemple 1.*

Les solutions de l'équation

$$x - y + 1 = 0$$

sont représentées par les points de la droite D d'équation $x - y + 1 = 0$.

La figure 735 *a* donne la représentation graphique des solutions réelles de cette équation.

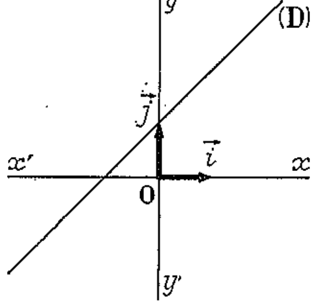


Fig. 735 a.

◇ *Exemple 2.*

Les solutions réelles de l'équation $x^2 + y^2 = 1$ sont représentées par les points du cercle de centre O et de rayon $R = 1$.

◇ *Exemple 3.*

Les solutions réelles de l'équation $E(y - x) = 0$ sont représentées par les points de la courbe C étudiée au n° 733, exemple 3 (fig. 733 *a*).

736. Représentation graphique d'un système à deux inconnues.

Soit un système de deux équations à deux inconnues :

$$\begin{cases} f(x;y) = 0 \\ g(x;y) = 0 \end{cases}$$

Généralement les inconnues x et y sont réelles.

Soient C_1 et C_2 les courbes ayant pour équations implicites $f(x;y) = 0$ et $g(x;y) = 0$.

Une condition nécessaire et suffisante pour que $(\alpha;\beta)$ soit solution du système

$$\begin{cases} \mathbf{f(x;y) = 0} \\ \mathbf{g(x;y) = 0} \end{cases}$$

est que le point $M(\alpha;\beta)$ appartienne à l'intersection $C_1 \cap C_2$ des deux courbes C_1 et C_2 ayant pour équations $f(x;y) = 0$ et $g(x;y) = 0$.

◇ *Exemple 1.*

Soit le système :

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

de deux équations linéaires à coefficients réels.

$ax + by = c$ et $a'x + b'y = c'$ sont les équations de deux droites D et D'.

Si $\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$ *ou* $ab' - ba' \neq 0$, les deux droites D et D' se coupent en un point dont les coordonnées constituent la solution du système.

Si $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$ *ou* $ab' - ba' = 0$, les deux droites D et D' sont parallèles.

Si $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c'}{c}$: $D \cap D' = \varnothing$, et le système n'a pas de solution.

Si $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$: $D = D'$, et tous les points de D représentent les solutions du système.

◇ *Exemple 2.*

Résoudre le système à deux inconnues réelles :

$$\begin{cases} E(y - x) = 0 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

On considère la courbe C d'équation $E(y - x)$ étudiée au n° 733, exemple 3, et la droite D d'équation $x + y = 1$.

$C \cap D$ représente les solutions du système (fig. 736 *a*).

Algébriquement, soit $t \in [0; 1[$; le système donné équivaut au système :

$$\begin{cases} y - x = t & t \in [0;1[\\ x + y = 1 \end{cases}$$

On en déduit facilement :

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}(1 - t) & t \in [0;1[\\ y = \frac{1}{2}(t + 1) \end{cases}$$

Ce sont là les équations du segment $C \cap D = AB$, avec $A\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ et $B(0; 1)$.

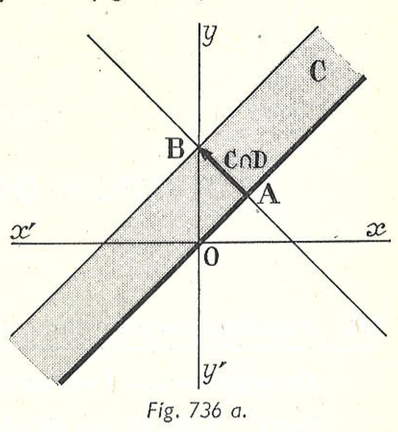


Fig. 736 a.

Le point A appartient à $C \cap D$, B n'appartient pas à $C \cap D$.

737. Représentation graphique d'une équation à une inconnue réelle.

On considère l'équation :

$$f(x) = g(x) \qquad (737; 1)$$

à laquelle on associe les courbes C_1 et C_2 ayant respectivement pour équations explicites $y = f(x)$ et $y = g(x)$.

Résoudre l'équation f (x) = g (x), c'est chercher les abscisses des points de l'intersection $C_1 \cap C_2$ des courbes C_1 et C_2 d'équations y = f (x) et y = g (x).

On dit aussi que (737; 1) est l'équation aux abscisses des points communs aux courbes C_1 et C_2.

Remarque. — Résoudre l'équation $f(x) = 0$, c'est chercher les abscisses des points communs à la courbe C d'équation $y = f(x)$ et à l'axe $x'Ox$.

CHAPITRE LII

DIVISION DES FONCTIONS

738. Fonction inverse d'une fonction.

On suppose que F est un corps commutatif.

Soit f $\in \mathcal{F}(E; F)$; on définit la fonction $g = \frac{1}{f}$ par

$$g: \quad x \in E \longrightarrow g(x) = \frac{1}{f(x)} \in F.$$

L'ensemble de définition E* de g n'est pas toujours E puisque g n'est pas définie pour les solutions de l'équation $f(x) = 0$.

On a alors :

$$(\forall x)\ (x \in E^*)\ (f \times g)\ (x) = f(x) \times g(x) = f(x) \times \frac{1}{f(x)} = 1.$$

De même :

$$(\forall x)\ (x \in E^*) \quad (g \times f)\ (x) = 1$$

Autrement dit, dans E* :

$$g \times f = f \times g = 1$$

On note :

$$g = \frac{1}{f} = f^{-1}$$

◇ *Exemple 1.*

Soit l'application $f : x \in R \longrightarrow f(x) = x - 1 \in R$.

La fonction g inverse de l'application f est :

$$g = f^{-1} : \quad x \in R \longrightarrow g(x) = \frac{1}{x-1}.$$

L'ensemble de définition E* de g est $E^* = R - \{1\}$.

◇ *Exemple 2.*

Soit l'application f de Z/6 dans Z/6 :

$$f: \qquad x \in Z/6 \longrightarrow f(x) = (x - \dot{1})(x - \dot{2}) \in Z/6$$

La fonction inverse $g = f^{-1}$ est

$$g = f^{-1}: \quad x \in Z/6 \longrightarrow g(x) = \frac{1}{(x - \dot{1})(x - \dot{2})} \in Z/6.$$

L'équation $f(x) = 0$ admet la solution générale $S = \{\dot{1}; \dot{2}; \dot{4}; \dot{5}\}$

Or $f(\dot{0}) = f(\dot{3}) = \dot{2}$. Dans l'anneau Z/6, l'élément $\dot{2}$ n'est pas inversible. Donc $g(\dot{0})$ et $g(\dot{3})$ n'existent pas. Autrement dit la fonction n'est définie pour aucune valeur de Z/6 et il n'y a pas de fonction *inverse de la fonction f donnée.*

739. Remarque.

Il est important de distinguer nettement :

la correspondance réciproque de l'application f ; elle se note $\overset{-1}{f}$

et

la fonction inverse de l'application f ; elle se note f^{-1}

◇ *Exemple.*

Dans l'exemple 2 du nº 738 précédent f^{-1} n'existe pas, mais la correspondance réciproque existe :

$$\overset{-1}{f}: \qquad \dot{0} \longrightarrow \overset{-1}{f}(\dot{0}) = \{\dot{1}; \dot{2}; \dot{4}; \dot{5}\}$$
$$\dot{2} \longrightarrow \overset{-1}{f}(\dot{2}) = \{\dot{0}; \dot{3}\}$$

740. Division des applications.

On suppose que F est un corps commutatif.
Soient $f \in \mathcal{F}(E; F)$ et $g \in \mathcal{F}(E; F)$; on définit la fonction $q = \frac{f}{g}$ par :

$$q = \frac{f}{g}: \qquad x \in E \longrightarrow q(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \in F$$

L'ensemble E* de définition de $\frac{f}{g}$ n'est pas toujours E puisque $\frac{f}{g}$ n'est pas définie pour les solutions de l'équation $g(x) = 0$.

◇ *Exemple.*

Soient les applications :

f: $x \in R \longrightarrow f(x) = x - 1 \in R$

et

g: $x \in R \longrightarrow g(x) = x + 2 \in R.$

On définit $q = \frac{f}{g}$ par :

$q = \frac{f}{g}$: $z \in R \longrightarrow q(x) = \frac{x-1}{x+2} \in R.$

Ici l'ensemble de définition est $E^* = R - \{-2\}$.

741. A propos de l'ensemble de définition d'une fonction-quotient.

1° La division dans un corps commutatif (cf. nos 251; 302; 333) est définie ainsi :

***Soient** $\alpha \in K$ **et** $\beta \in K^*$ ($K^* = K - \{0\}$).*

Trouver un élément de K, x** $\in K$**, tel que** $\alpha = \beta . x$ **s'appelle diviser** α **par** β**.

La division par β n'est donc définie que pour $\beta \neq 0$. Dans ces conditions le quotient x est unique.

C'est ce résultat qui a permis de dire que l'ensemble de définition de la fonction $\frac{f}{g}$ ne contient pas les solutions de l'équation $g(x) = 0$.

Il permet aussi d'affirmer que $\frac{f}{g}$ est une fonction et non une correspondance.

2° On pourrait définir une division générale par :

***Soient** $\alpha \in K$ **et** $\beta \in K$.*

Trouver les éléments de K, x** $\in K$**, tel que** $\alpha = \beta \cdot x$ **s'appelle diviser** α **par** β**.

Si $\beta \in K^*$ on retrouve la définition précédente.

Si $\beta = 0$ et $\alpha \neq 0$, on doit avoir $\alpha = 0 \cdot x$, ce qui est impossible.

Si $\beta = 0$ et $\alpha = 0$, on doit avoir $0 = 0 \cdot x$, ce qui est vérifié pour tous les éléments de K.

Dans ce dernier cas ($\alpha = \beta = 0$), il n'y a plus unicité du quotient; et pour les éléments de K, solutions de $g(x) = 0$, on a $q(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = K$.

$q = \frac{f}{g}$ n'est plus fonctionnelle; ce qui est gênant.

Aussi on est amené à conserver la définition classique de la division, et si f (x) = g (x) = 0 pour une valeur de x on prolonge la fonction $q = \frac{f}{g}$ de façon que q reste fonctionnelle.

742. Puissance et itération.

On suppose que F est un anneau commutatif.

Soient l'application f :

$f: \quad x \in E \longrightarrow f(x) \in F$

On peut envisager les *applications puissances*

$f^2: \quad x \in E \longrightarrow f^2(x) = [f(x)]^2 \in F$

$f^3: \quad x \in E \longrightarrow f^3(x) = [f(x)]^3 \in F$

. . . .

On peut aussi envisager les *fonctions itérées.* :

$\overset{2}{f}: \quad x \in E \longrightarrow f[f(x)] = \overset{2}{f}(x) \in E$

$\overset{3}{f}: \quad x \in E \longrightarrow f\{f[f(x)]\} = \overset{3}{f}(x) \in F$

. . . .

◇ *Exemple.*

Soit la fonction f :

$f: \quad x \in Z/4 \longrightarrow f(x) = x - \dot{1} \in Z/4.$

1° On a :

$f^2 \quad x \in Z/4 \longrightarrow f^2(x) = (x - \dot{1})^2 \in Z/4$

$f^3 \quad x \in Z/4 \longrightarrow f^3(x) = (x - \dot{1})^3 \in Z/4$

D'où le tableau :

x	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$	$\dot{3}$
$f(x)$	$\dot{3}$	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$
$[f(x)]^2$	$\dot{1}$	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{0}$
$[f(x)]^3$	$\dot{3}$	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{0}$
$[f(x)]^4$	$\dot{1}$	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{0}$
...	...	...	...	...

Si $p > 0$, on a :

$$f^{2p} = f^2 \quad \text{et} \quad f^{2p+1} = f^3$$

2° $\overset{2}{f} = f_0 f$ est une application car elle est définie pour les valeurs $\dot{3}; \dot{0}; \dot{1}; \dot{2}$; de $f(x)$; c'est donc :

x	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$	$\dot{3}$
$\overset{2}{f}(x)$	$\dot{2}$	$\dot{3}$	$\dot{0}$	$\dot{1}$

$\overset{3}{f}$ est encore une application.

x	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$	$\dot{3}$
$\overset{3}{f}(x)$	$\dot{1}$	$\dot{2}$	$\dot{3}$	$\dot{0}$

Cet exemple montre que $\overset{2}{f} \neq f^2, f^3 \neq \overset{3}{f}$...

743. Fonction rationnelle d'une variable réelle.

Soient deux fonctions polynomiales :

A : $x \in R \longrightarrow A(x) \in R$

B : $x \in R \longrightarrow B(x) \in R$

· On considère la fonction-quotient :

$$f : \quad x \in R \longrightarrow f(x) = \frac{A(x)}{B(x)} \in R$$

f est une fonction rationnelle.

f est définie dans R sauf pour les zéros de la fonction polynomiale B (x).

◇ *Exemple.*

La fonction $x \longrightarrow \dfrac{2x}{x-1}$ est définie dans $R - \{1\}$

La fonction $x \longrightarrow \dfrac{x+1}{x^2-3x+2}$ est définie dans $R - \{1;2\}$

La fonction $x \longrightarrow \dfrac{x-1}{x^2-3x+2}$ est définie dans $R - \{1;2\}$

744. Prolongement algébrique d'une fonction rationnelle.

Soit par exemple la fonction

$$f : \quad x \in R \longrightarrow f(x) = \frac{x-1}{x^2-3x+2} \in R$$

Elle est définie dans R $-$ { 1; 2 }.

On pose : $A(x) = x - 1$ et $B(x) = x^2 - 3x + 2$

Pour $x = 1$, on a : $A(1) = 0$ et $B(1) = 0$ (cf nº 741). On se propose de prolonger la fonction f pour $x = 1$.

A la fonction $x \longrightarrow A(x)$, on associe le polynôme formel

$$(-1; 1; 0; 0; \ldots) = -1 + u;$$

et à la fonction $x \longrightarrow B(x)$, le polynôme formel

$$(2; -3; 1; 0; \ldots) = 2 - 3u + u^2.$$

A la fonction f est alors associée la fraction formelle de polynômes

$$\frac{(-1; 1; 0; 0; \ldots)}{(2; -3; 1; 0; 0, \ldots)} = \frac{-1 + u}{2 - 3u + u^2}$$

Or on a :

$$\frac{-1 + u}{2 - 3u + u^2} = \frac{-1 + u}{(-1 + u)(-2 + u)}$$

On peut simplifier cette fraction par le polynôme $-1 + u$ qui n'est pas le polynôme nul, et

$$\frac{-1 + u}{(-1 + u)(-2 + u)} = \frac{1}{-2 + u}$$

A cette forme simplifiée est associée la fonction :

$$g : \qquad x \in R \longrightarrow \frac{1}{x - 2} \in R$$

Cette fonction g est définie dans R $-$ { 2 }.

Si $x \in R - \{1; 2\}$ on a : $f(x) = g(x)$

Si $x = 1$ on a : $g(1) = -1$

La fonction g est donc un prolongement de la fonction f : c'est le prolongement algébrique.

745. Fonctions rationnelles de deux variables.

Soient deux fonctions polynomiales :

A : $(x; y) \in R^2 \longrightarrow A(x; y) \in R$

B : $(x; y) \in R^2 \longrightarrow B(x; y) \in R.$

On considère la fonction-quotient :

$$f : \qquad (x; y) \in R^2 \longrightarrow f(x; y) = \frac{A(x; y)}{B(x; y)} \in R$$

f est une fonction rationnelle des variables réelles x et y.

Elle est définie dans R^2 sauf pour les solutions de l'équation $B(x; y) = 0$.

746. Formes canoniques de quelques fonctions rationnelles.

1° Soit la fonction

$$f: \qquad x \in R \longrightarrow f(x) = \frac{ax+b}{a'x+b'} \in R;$$

appelée fonction homographique.

Le changement de variable $x = X + \lambda$ donne :

$$f(x) = \frac{ax+b}{a'x+b'} = \frac{a(X+\lambda)+b}{a'(X+\lambda)+b'}$$
$$= \frac{aX + a\lambda + b}{a'X + a'\lambda + b'}.$$

En prenant $\lambda = -\frac{b'}{a'}$, on a :

$$f(x) = \frac{ax+b}{a'x+b'} = \frac{aX - \frac{ab'}{a'} + b}{a'X}$$
$$= \frac{\frac{a}{a'}X - \frac{ab'-ba'}{a'^2}}{X}$$
$$= \frac{a}{a'} - \frac{ab'-ba'}{a'^2 X}$$
$$= A + \frac{B}{X}$$

avec $A = \frac{a}{a'}$ et $B = -\frac{ab'-ba'}{a'^2}$.

C'est la forme canonique de la fonction homographique.

2° Soit la fonction

$$f: \qquad x \in R \longrightarrow f(x) = \frac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'}.$$

avec $a \neq 0$.

En divisant le numérateur par le dénominateur la fonction prend la forme

$$f(x) = A + \frac{BX + C}{X^2 + D} \qquad \text{si } a' \neq 0$$

ou

$$f(x) = AX + B + \frac{C}{X} \qquad \text{si } a' = 0$$

747. Proportions.

Une fraction $\frac{A}{B}$ est encore appelée un rapport, le rapport de A à B.

La notation $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ $(B \neq 0; D \neq 0)$ signifie que les fractions A et C sont équivalentes et par suite on a :

$$AD = BC$$

Donc :

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D} \Leftrightarrow AD = BC \qquad (747;1)$$

$$(B \neq 0; D \neq 0)$$

On dit aussi que A, B, C, D donnés dans l'ordre forment une proportion. A, B, C, D en sont les termes; B et C sont les moyens, A et D les extrêmes.

Du résultat (747; 1) on déduit :

Dans toute proportion on peut intervertir les moyens (ou les extrêmes) sous la condition de non nullité des termes.

On dit qu'un nombre ou un polynôme X est quatrième proportionnelle aux nombres ou polynômes A, B, C donnés dans l'ordre si on a :

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{X} \qquad (747;2)$$

De cette relation on tire :

$$X = \frac{B \cdot C}{A} \qquad (747;3)$$

On dit qu'un nombre ou un polynôme X est moyenne proportionnelle (ou moyenne géométrique) entre deux nombres ou deux polynômes A et B si on a :

$$\frac{A}{X} = \frac{X}{B} \qquad (747;4)$$

De cette relation on tire :

$$X^2 = AB \qquad (747;5)$$

Du résultat (747; 1), on déduit :

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D} \Leftrightarrow \frac{A \pm B}{B} = \frac{C \pm D}{D} \qquad (747;6)$$

748. Suite de rapports égaux.

On considère une suite de rapports égaux :

$$\frac{A'}{A} = \frac{B'}{B} = \frac{C'}{C} = k.$$

Les fractions sont équivalentes ($A \neq 0$; $B \neq 0$; $C \neq 0$).

On a immédiatement :

$$A' = k \cdot A$$
$$B' = k \cdot B$$
$$C' = k \cdot C$$

En multipliant les égalités respectivement par les nombres α, β, γ on obtient :

$$\alpha A' = k \cdot \alpha A$$
$$\beta B' = k \cdot \beta B$$
$$\gamma C' = k \cdot \gamma C$$

D'où par addition :

$$\alpha A' + \beta B' + \gamma C' = k\,(\alpha A + \beta B + \gamma C)$$

et encore, si $\alpha A + \beta B + \gamma C \neq 0$:

$$k = \frac{\alpha A' + \beta B' + \gamma C'}{\alpha A + \beta B + \gamma C}.$$

Finalement on a :

$$\frac{A'}{A} = \frac{B'}{B} = \frac{C'}{C} = \frac{\alpha A' + \beta B' + \gamma C'}{\alpha A + \beta B + \gamma C}. \qquad (748;1)$$

D'où l'énoncé :

Étant donnée une suite de rapports égaux, on forme un rapport égal à chacun d'eux en faisant le rapport d'une combinaison linéaire des numérateurs et de la même combinaison linéaire des dénominateurs.

En particulier on a :

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D} = \frac{A+C}{B+D} = \frac{A-C}{B-D}$$

749. Relation homographique.

On dit que les variables x et y sont liées par une relation homographique si on a :

$$Axy + Bx + Cy + D = 0. \qquad (749;1)$$

Si A = 0 la relation (749; 1) se réduit à la relation affine :

$$Bx + Cy + D = 0.$$

Si A ≠ 0 la relation (749; 1) se met sous la forme :

$$\left(x + \frac{C}{A}\right)\left(y + \frac{B}{A}\right) + \frac{AD - BC}{A^2} = 0. \qquad (749;2)$$

Lorsque AD — BC = 0 la relation homographique est dite *singulière*. On suppose dans la suite A ≠ 0 et AD — BC ≠ 0.

La relation (749; 1) est du premier degré par rapport à x et du premier degré par rapport à y. De cette relation on tire :

$$y = -\frac{Bx + D}{Ax + C}$$

et

$$x = -\frac{Cy + D}{Ay + B}$$

Ainsi à une valeur de x différente de $x = -\frac{C}{A}$ correspond une valeur unique de y; et à une valeur de y différente de $y_0 = -\frac{B}{A}$ correspond une valeur unique de x.

Les valeurs $x_0 = -\frac{C}{A}$ *et* $y_0 = -\frac{B}{A}$ *sont les valeurs focales de* x *et de* y.

Remarque 1. — Les fonctions homographiques réciproques

$$y = -\frac{Bx + D}{Ax + C} \quad \text{et} \quad x = -\frac{Cy + D}{Ay + B}$$

ont le même déterminant

$$\delta = \begin{vmatrix} -B & -D \\ A & C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -C & -D \\ A & B \end{vmatrix}$$
$$= AD - BC$$

Aussi δ = AD — BC est appelé le *déterminant de la relation homographique* (749; 1).

Remarque 2. — La relation $y = \frac{ax + b}{a'x + b'}$ peut s'écrire

$$a'xy - ax + b'y - b = 0.$$

Mais ces relations ne sont équivalentes que si leur déterminant commun $\delta = ab' - ba'$ n'est pas nul.

Ainsi :

$$y = \frac{2(x-1)}{x-1} \text{ est équivalent à } y = 2 \text{ pour tout } x.$$

Mais :

$$y(x-1) - 2(x-1) = 0 \qquad \text{ou} \qquad (y-2)(x-1) = 0$$

est équivalent à :

$$\begin{cases} x = 1 & \text{pour tout } y \\ \text{et} & \\ y = 2 & \text{pour tout } x \end{cases}$$

Autrement dit :

Les deux relations $y = \frac{2(x-1)}{x-1}$ et $y(x-1) = 2(x-1)$ ne sont pas équivalentes.

CHAPITRE LIII

FONCTIONS IRRATIONNELLES

750. Racine n^ieme d'un nombre relatif.

Un nombre x ∈ R est une racine n^ième du nombre a ∈ R si on a :

$$\mathbf{x^n = a.}$$

Le nombre n ∈ N est l'indice de la racine.

1° *Racine d'indice pair* (n = 2p)

Un nombre a ∈ R^n *a deux racines d'indice* n = 2p *opposées. On les note :*

$$x_1 = \sqrt[2p]{a} \qquad \text{et} \qquad x_2 = -\sqrt[2p]{a}$$

Un nombre $a \in R^-$ n'a pas de racine d'indice $n = 2p$, car une puissance d'exposant pair n'est jamais négative.

Dans le cas d'une racine carrée (d'indice 2) on supprime l'indice. On écrit $\sqrt{a}$.

◇ *Exemple.*

Si $a = 4$ on a deux racines carrées :

$$x_1 = 2 \text{ et } x_2 = -2.$$

Si $a = -4$, il n'y a pas de racine carrée dans le corps R.

2° *Racine d'indice impair* (n = 2 p + 1)

Un nombre a ∈ R *a une seule racine réelle d'indice impair. On la note quelquefois :*

$$x = \sqrt[2p+1]{a}$$

Cette racine a le même signe que le nombre a :

$$x = (\text{signe de } a) \sqrt[2p+1]{|a|}$$

◇ *Exemple.*

Si $a = 27$, on a la racine cubique : $x = 3$

Si $a = -27$, on a la racine cubique : $x = -3$.

751. Fonction racine carrée.

Etant donnée une fonction A(x). A un nombre* x $\in$ R *on peut faire correspondre le nombre* f(x) $= \sqrt{A(x)} \in R^+$. *On définit ainsi une fonction* f, *et on a :

f : $$x \in R \longrightarrow f(x) = \sqrt{A(x)} \in R^+$$

Cette fonction n'est définie que pour l'ensemble des valeurs x $\in$ R *pour lesquelles on a* A(x) $\geqslant$ 0, *et qui n'annulent pas le dénominateur éventuel de* A(x).

La fonction A(x) *est le radicande.*

◇ *Exemple.*

La fonction $x \longrightarrow f(x) = \sqrt{x}$ est définie lorsque x est positif, ou nul, c'est-à-dire dans l'intervalle [0; + ∞] ou dans R^+.

La fonction $x \longrightarrow f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ est définie lorsque x est positif c'est-à-dire dans l'intervalle]0; + ∞] ou dans $R^+ - \{0\}$.

752. Produit de fonctions racines carrées.

Si u et v sont des fonctions positives dans un intervalle $(\alpha; \beta)$ on a :

$$\sqrt{u} \cdot \sqrt{v} = \sqrt{uv}$$

et

$$\frac{\sqrt{u}}{\sqrt{v}} = \sqrt{\frac{u}{v}}$$

En effet, en élevant au carré on obtient :

$$u \cdot v = u \cdot v$$

et

$$\frac{u}{v} = \frac{u}{v}$$

◇ *Exemple 1.*

On a :

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{6}$$

et :

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{2}{5}}.$$

Mais on ne peut écrire, dans le corps R :

$$\sqrt{-2} \cdot \sqrt{-3} = \sqrt{6}$$

◇ *Exemple 2.*

Les deux fonctions $u = x$ et $v = x - 1$ sont simultanément positives dans l'intervalle $]1; +\infty]$. Par suite on peut écrire :

$$\sqrt{x} \cdot \sqrt{x-1} = \sqrt{x^2 - x}$$

et

$$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-1}} = \sqrt{\frac{x}{x-1}}.$$

Mais il faut insister sur le fait que ces égalités ne sont exactes que pour $x > 1$.

753. Remarques.

1° *La fonction $\sqrt{u}$ est essentiellement positive.*

Par suite si u est un carré, $u = v^2$, on doit écrire :

$$\sqrt{v^2} = |v|$$

◇ *Exemple.*

$$\sqrt{(-2)^2} = |-2| = 2$$

$$\sqrt{x^2} = |x|$$

$$\sqrt{(x-1)^2} = |x-1|$$

2° Inversement, on doit aussi écrire :

$$\mathbf{v} = \textbf{\textit{(signe de v)}}.\ \sqrt{\mathbf{v}^2}$$

◇ *Exemple 1.*

$$2 = \sqrt{4} \qquad -2 = -\sqrt{(-2)^2}$$

◇ *Exemple 2.*

$$x = \sqrt{x^2} \qquad \text{si } x > 0$$

$$x = -\sqrt{x^2} \qquad \text{si } x < 0$$

◇ *Exemple 3.*

$$x\sqrt{x+1} = \sqrt{x^2(x+1)} \qquad \text{si } x > 0$$

$$x\sqrt{x+1} = -\sqrt{x^2(x+1)} \qquad \text{si } -1 < x < 0$$

754. Binômes conjugués par rapport à une variable.

***Les binômes* a + bx *et* a — bx *sont dits conjugués par rapport à la variable* x.**

La somme de deux binômes conjugués est $2a$*; elle est indépendante de* x.
Le produit de deux binômes conjugués est $a^2 - b^2x^2$*; il ne dépend que de* x^2.

Soient, par exemple :

$$u = a + b\sqrt{P(x)}$$
$$u' = a - b\sqrt{P(x)}$$

avec $P(x) > 0$. On a :

$$u + u' = 2a$$
$$uu' = a^2 - b^2 . P(x)$$

Ce résultat, valable pour les valeurs de x telles que $P(x) \in R^+$, est remarquable car alors que les deux binômes sont irrationnels, leur somme et leur produit sont rationnels.

Ce résultat est utilisé pour rendre rationnel le dénominateur d'une fraction.

◇ *Exemple.*

Soit la fraction $\dfrac{2}{\sqrt{5} - \sqrt{3}}$.

On a :

$$\frac{2}{\sqrt{5} - \sqrt{3}} = \frac{2(\sqrt{5} + \sqrt{3})}{(\sqrt{5} - \sqrt{3})(\sqrt{5} + \sqrt{3})} = \frac{2(\sqrt{5} + \sqrt{3})}{2} = \sqrt{5} + \sqrt{3}$$

755. Fonction rationnelle d'un binôme.

On envisage ici le binôme $u = a + b\sqrt{m}$ avec $m \in R^+$, a et $b \in R$, et une fonction rationnelle $F(U)$

$F(u)$ se ramène à un binôme $A + B\sqrt{m}$.

De plus si $u' = a - b\sqrt{m}$, $F(u')$ se ramène à un binôme $A - B\sqrt{m}$ conjugué de $F(u)$. Cette remarque simplifie bien des calculs.

◇ *Exemple.*

Etant donnés la fonction $f(x) = x^2 - 2x + 3$ et le nombre $u = 2 - \sqrt{2}$, calculer $f(u)$.

On a :

$$\begin{aligned} f(u) &= (2 - \sqrt{2})^2 - 2(2 - \sqrt{2}) + 3 \\ &= 4 - 4\sqrt{2} + 2 - 4 + 2\sqrt{2} + 3 \\ &= 5 - 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

De plus, si $u' = 2 + \sqrt{2}$, on a, sans calcul :

$$f(u') = 5 + 2\sqrt{2}.$$

756. Remarque préliminaire.

Dans les numéros suivants les lettres a, b, c représentent des nombres réels positifs, les lettres m, n, p, q, des nombres entiers positifs :

$$a, b, c \in \mathrm{R}^+$$
$$m, n, p, q \in \mathrm{N}$$

757. Formules sur les radicaux d'indice *n*.

On a :

$$\sqrt[n]{abc} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \cdot \sqrt[n]{c} \qquad (757\,;1)$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \qquad (757\,;2)$$

$$(\sqrt[n]{a})^p = \sqrt[n]{a^p} \qquad (757\,;3)$$

$$a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b} \qquad (757\,;4)$$

Ces formules se démontrent en les élevant à la puissance n.

On a encore :

$$\sqrt[n]{\sqrt[p]{a}} = \sqrt[np]{a} \qquad (757\,;5)$$

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[np]{a^{mp}} \qquad (757\,;6)$$

Ces formules se démontrent en les élevant à la puissance np.

758. Calculs sur les radicaux d'indice *n*.

Les calculs sur les radicaux utilisent les formules précédentes. Quelques exemples mettent en évidence la technique de ces calculs.

◇ *Exemple 1.*

Simplifier les radicaux $\sqrt{12}$ et $\sqrt[3]{54}$.

On a :

$$\sqrt{12} = \sqrt{4 \times 3} = 2\sqrt{3}$$
$$\sqrt[3]{54} = \sqrt[3]{27 \times 2} = 3\sqrt[3]{2}.$$

◇ *Exemple 2.*

Simplifier le nombre $a = \dfrac{\sqrt[3]{18}}{\sqrt{3}}$.

On a :

$$\sqrt[3]{18} = \sqrt[6]{18^2} = \sqrt[6]{9^2 \times 2^2} = \sqrt[6]{3^4 \times 2^2}$$
$$\sqrt{3} = \sqrt[6]{3^3}$$

D'où :

$$a = \frac{\sqrt[6]{3^4 \times 2^2}}{\sqrt[6]{3^3}} = \sqrt[6]{\frac{3^4 \times 2^2}{3^3}} = \sqrt[6]{3 \times 2^2}$$

et finalement :

$$a = \sqrt[6]{12}.$$

◇ *Exemple 3.*

Calculer la somme $2\sqrt{3} - 7\sqrt{3} + 10\sqrt{3}$.

On a :

$$2\sqrt{3} - 7\sqrt{3} + 10\sqrt{3} = (2 - 7 + 10)\sqrt{3}$$
$$= 5\sqrt{3}$$

759. Équation $\sqrt{A(x)} = B(x)$.

Soit l'équation

$$\sqrt{A(x)} = B(x) \qquad (759;1)$$

$A(x)$ et $B(x)$ étant des fonctions de la variable réelle x.

En élevant au carré on obtient l'équation

$$A(x) = [B(x)]^2 \qquad (759;2)$$

Une solution de l'équation (759; 1) est évidemment une solution de l'équation (759; 2). Mais une solution de l'équation (759; 2) n'est pas obligatoirement une solution de l'équation (759; 1), car l'équation (759; 2) équivaut à l'ensemble des deux équations

$$\sqrt{A(x)} = B(x) \qquad (759;1)$$

et

$$\sqrt{A(x)} = -B(x) \qquad (759;1')$$

Comme $\sqrt{A(x)}$ est une fonction numérique positive, on exclut l'équation (759; 1') en posant la condition $B(x) \geqslant 0$.

Finalement :

$$\sqrt{A(x)} = B(x) \Leftrightarrow \begin{cases} A(x) = [B(x)]^2 \\ B(x) \geqslant 0 \end{cases}$$

◇ *Exemple 1.*

Résoudre l'équation :

$$x + \sqrt{x^2 - 2} = 2$$

On isole le radical dans le premier membre. Il vient

$$\sqrt{x^2 - 2} = 2 - x \qquad (759;3)$$

En élevant au carré, on a :

$$x^2 - 2 = 4 - 4x + x^2$$

ou :

$$4x = 6$$

et :

$$x = \frac{3}{2}$$

Cette solution convient, car pour $x = \frac{3}{2}$ le second membre de l'équation (759; 3) est positif.

◇ *Exemple 2.*

Résoudre l'équation :

$$2 = x + \sqrt{x^2 - 12}$$

On isole le radical dans le second membre. Il vient :

$$2 - x = \sqrt{x^2 - 12} \qquad (759;4)$$

En élevant au carré, on a :

$$4 - 4x + x^2 = x^2 - 12$$

D'où :

$$x = 4$$

Cette solution est à rejeter, car pour $x = 4$ le premier membre de l'équation (759; 4) est négatif.

CHAPITRE LIV

SIGNE DES FONCTIONS NUMÉRIQUES

760. Signe d'une fonction numérique.

Soit une fonction numérique f, c'est-à-dire un élément de $\mathcal{F}(E; R)$

f: $x \in E \longrightarrow f(x) \in R$

On désigne :

— par E_0 l'ensemble des zéros de $f(x)$, c'est-à-dire l'ensemble des éléments x de E dont l'image est $f(x) = 0$;

— par E_1 l'ensemble des éléments de E dont l'image $f(x)$ est positive :

— par E_2 l'ensemble des éléments de E dont l'image $f(x)$ est négative.

Ces sous-ensembles E_0, E_1, E_2 sont disjoints et sont une partition de E

$$E \doteq E_0 \cup E_1 \cup E_2.$$

Etudier le signe de f(x) suivant l'élément x de E revient à déterminer les sous-ensembles E_0, E_1, E_2.

◇ *Exemple.*

Étudier le signe de E (x).

Si $x \in [0; 1[$, alors $f(x) = 0$

Si $x \leqslant 1$, alors $f(x) > 0$

Si $x < 0$, alors $f(x) < 0$

Donc ici :

$$E_0 = [0 ; 1 [$$
$$E_1 = [1 ; \rightarrow [= \{ x/x \geqslant 1 \}$$
$$E_2 =] \leftarrow ; 0 [= \{ x/x < 0 \}$$

Remarque.

Souvent l'ensemble E est le corps R; f est une fonction numérique d'une variable réelle.

Quelquefois l'ensemble E est l'espace vectoriel R^2; f est une fonction numérique de deux variables réelles.

761. Signe de f(x) = ax + b.

Soit la fonction du premier depré :

$$f: \qquad x \in R \longrightarrow f(x) = ax + b \in R \qquad (a \neq 0)$$

On a :

$$f(x) = ax + b$$
$$= a\left[x + \frac{b}{a}\right]$$

Si $x = -\frac{b}{a}$, alors $f(x) = 0$. Donc :

$$E_0 = \left\{-\frac{b}{a}\right\}$$

Si $x > -\frac{b}{a}$, alors le crochet $\left[x + \frac{b}{a}\right]$ est positif, et $f(x)$ a le signe du coefficient a.

Si $x < -\frac{b}{a}$, alors le crochet $\left[x + \frac{b}{a}\right]$ est négatif, et $f(x)$ a le signe contraire du coefficient a.

Et on peut énoncer :

***La fonction polynomiale du premier degré* $\mathbf{x \to f(x) = ax + b}$**

— *est nulle pour son zéro* $\mathbf{x = -\frac{b}{a}}$;

— *est du signe de* a *pour les valeurs supérieures à son zéro;*

— *est du signe de* — a *pour les valeurs inférieures à son zéro.*

On peut résumer cet énoncé par le tableau suivant :

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
signe de $f(x) = ax + b$	signe de $-a$	0	signe de a

762. Signe de $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Soit la fonction polynomiale du second degré :

$$f: \qquad x \in \mathrm{R} \longrightarrow f(x) = ax^2 + bx + c \in \mathrm{R} \qquad (a \neq 0)$$

Si Δ est négatif, on a (cf. nº 680) :

$$f(x) = au^2 - \frac{\Delta}{4a}$$

$$= a\,[u^2 + \mathrm{K}^2]$$

avec $\mathrm{K}^2 = -\dfrac{\Delta}{4a^2}$.

Le crochet étant positif, la fonction $f(x)$ est du signe du coefficient a.

Et :

Si la fonction $\mathbf{x \rightarrow f(x) = ax^2 + bx + c}$ n'a pas de zéro ($\Delta < 0$), alors, quel que soit x, elle a le signe du coefficient a.

D'où le tableau

$\Delta > 0$	x	$-\infty$	$+\infty$
	signe de $ax^2 + bx + c$	signe de a	

Si Δ est nul, on a :

$$f(x) = au^2$$

$$= a\,(x - x')^2 \qquad (762;\,2)$$

avec $x' = -\dfrac{b}{2a}$.

Et :

Si la fonction $\mathbf{x \rightarrow f(x) = ax^2 + bx + c}$ a un zéro double ($\Delta = 0$), alors elle est du signe du coefficient a pour toute valeur de x autre que le zéro double $\mathbf{x' = x'' = -\dfrac{b}{2a}}$.

Doù le tableau

$\Delta = 0$

x	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$		$+\infty$
signe de $ax^2 + bx + c$		signe de a	0	signe de a	

Si Δ est positif, $f(x)$ a deux zéros réels distincts x' et x''; et on a :

$$f(x) = a(x - x')(x - x'') \qquad (762;\ 3)$$

En supposant $x' < x''$, le signe de $f(x)$ est donné par la méthode du nº 669, à l'aide du tableau suivant.

x	$-\infty$		x'		x''		$+\infty$
signe de $x - x'$		$-$	0	$+$		$+$	
signe de $x - x''$		$-$		$-$	0	$+$	
signe de $(x - x')(x - x'')$		$+$	0	$-$	0	$+$	
signe de $f(x)$		signe de a	0	signe de $-a$	0	signe de a	

Et :

Si la fonction $x \to f(x) = ax^2 + bx + c$ a deux zéros distincts ($\Delta > 0$), alors elle est du signe du coefficient a pour toutes les valeurs de x extérieures à l'intervalle fermé des racines et du signe contraire du coefficient a pour toutes les valeurs de x intérieures à l'intervalle ouvert des racines.

D'où le tableau

$\Delta > 0$

x	$-\infty$		x'		x''		$+\infty$
signe de $ax^2 + bx + c$		signe de a	0	signe de $-a$	0	signe de a	

◇ *Exemple 1.*

Étudier le signe du trinôme $f(x) = -2x^2 + 7x - 13$.

Le discriminant de ce trinôme est :

$$\begin{aligned} \Delta &= 49 - 104 \\ &= -55. \end{aligned}$$

Il est négatif; donc le trinôme a le signe du coefficient de x^2.

Autrement dit :

Quel que soit x, le trinôme $f(x) = -2x^2 + 7x - 13$ est négatif.

◇ *Exemple 2.*

Signe du trinôme $f(x) = 2x^2 + 5x - 18$.

Le discriminant est :

$$\begin{aligned} \Delta &= 25 + 144 \\ &= 169. \end{aligned}$$

Il est positif; le trinôme a donc deux racines distinctes :

$$x = \frac{-5 \pm 13}{4}$$

c'est-à dire :

$$x' = -\frac{9}{2} \qquad \text{et} \qquad x'' = 2.$$

La règle précédente permet de construire immédiatement le tableau suivant :

x	$-\infty$		$-\frac{9}{2}$		2		$-\infty$
signe de $2x^2 + 5x - 18$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Ou :

$$\text{Si } x = -\frac{9}{2} \text{ ou } x = 2, \text{ alors } f(x) = 0$$

$$\text{Si } x \in \left]-\frac{9}{2} ; 2\right[, \qquad \text{alors } f(x) < 0$$

$$\text{Si } x \notin \left[-\frac{9}{2} ; 2\right], \qquad \text{alors } f(x) > 0.$$

◇ *Exemple 3.*

Signe de $f(x) = -3x^2 - 10x$.

Le polynôme $f(x)$ s'écrit :

$$-3x^2 - 10x = x(-3x - 10)$$

Il admet les racines $x' = -\frac{10}{3}$ et $x'' = 0$.

Le tableau suivant donne le signe de $f(x)$.

x	$-\infty$		$-\frac{10}{3}$		0		$+\infty$
signe de $-3x^2 - 10x$		$-$	0	$+$	0	$-$	

763. Fonction d'un point.

On envisage la fonction polynôme $f(x; y)$ des deux variables x et y :

$$f: \quad (x; y) \in R^2 \longrightarrow u = f(x; y) \in R.$$

Or $(x; y)$ sont les coordonnées d'un point M du plan. Ainsi à tout point M $(x; y)$ du plan est associé un nombre réel $u = f(x; y)$. On peut donc dire que *u est fonction du point M* et écrire :

$$u = f(M)$$

Comme à chaque point M du plan est associé un nombre, on dit qu'on a défini *un champ de nombres réels*, ou *un champ scalaire*.

Les points, pour lesquels la fonction $f(x; y)$ a la même valeur constituent une courbe appelée *courbe de niveau* (ou ligne de niveau).

◇ *Exemple 1.*

On donne :

$$f(x; y) = 2x - y + 1.$$

Au point A (1; 1) est associé le nombre $f(1; 1) = 2$. A l'origine O des axes est associé le nombre $f(0; 0) = 1$.

Les courbes de niveau sont les droites

$$2x - y + 1 = \lambda.$$

Ces droites forment un ensemble de droites parallèles (fig. 763 *a*)

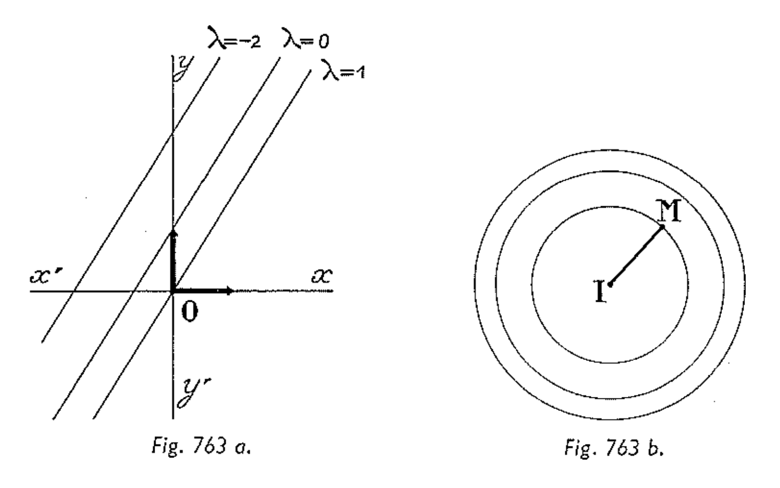


Fig. 763 a. *Fig. 763 b.*

◇ *Exemple 2.*

Soit un point fixe I. A tout point M du plan on associe la distance IM. On a donc défini une fonction de point :

$$f(\text{M}) = d(\text{IM}).$$

Les courbes de niveau sont les cercles de centre I (fig. 763 *b*).

764. Signe d'une fonction de deux variables réelles.

Soit la fonction :

$$f: \quad (x; y) \in \text{R}^2 \longrightarrow f(x; y) \in \text{R}.$$

Étudier le signe de cette fonction revient à expliciter la partition $\text{E} = \text{E}_0 \cup \text{E}_1 \cup \text{E}_2$ du plan $\text{E} = \text{R}^2$.

La courbe E_0 d'équation $f(x; y) = 0$ est appelée la séparatrice. Elle permet généralement de déterminer facilement les ensembles E_1 et E_2.

◇ *Exemple 1.*

Étudier le signe de la fonction $f(x; y) = 2x - y + 1$.

La séparatrice est la droite (D) d'équation $2x - y + 1 = 0$ Elle partage le plan en deux demi-plans (fig. 764 *a*).

A l'origine O des axes on a $f(0; 0) = 1$. Le demi-plan contenant l'origine est le demi-plan positif; l'autre est le demi-plan négatif.

◇ *Exemple 2.*

Étudier le signe de la fonction : $f(x; y) = x^2 + y^2 - 4$.

La séparatrice est le cercle (C) d'équation $x^2 + y^2 = 4$, de centre O et de rayon 2. Il partage le plan en deux domaines (fig. 764 *b*).

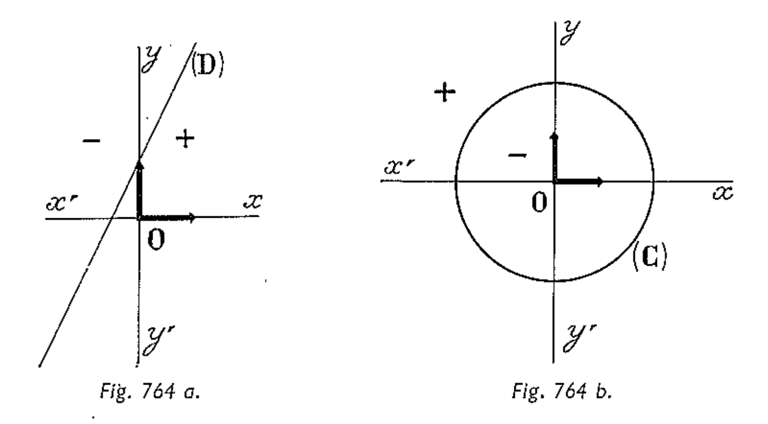


Fig. 764 a. *Fig. 764 b.*

A l'origine O des axes on a $f(0; 0) = -4$. L'intérieur du cercle est le domaine négatif. L'extérieur du cercle est le domaine positif.

765. Signe d'une fonction-produit ou d'une fonction quotient.

On étudie le signe de chacun des facteurs, et on en déduit le signe du produit.

◇ *Exemple 1.*

Étudier, suivant les valeurs de x, *le signe de la fonction :*

$$u = (x - 2)(-24x^2 + 29x + 4).$$

La fonction s'annule pour $x = 2$ (racine du binôme) et pour $x = \frac{4}{3}$ et $x = -\frac{1}{8}$ (racines du trinôme).

On étudie le signe de chacun des facteurs. La règle des signes de la multiplication permet ensuite de trouver le signe de u.

Il est avantageux d'utiliser le tableau suivant :

x	$-\infty$	$-\frac{1}{8}$		$\frac{4}{3}$		2	$+\infty$
signe de $x - 2$	$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$
signe de $-24x^2 + 29x + 4$	$-$	0	$+$	0	$-$	|	$-$
signe de u	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

La dernière ligne du tableau donne la solution du problème proposé.

Exemple 2.

Étudier le signe de la fonction :

$$u = \frac{-2x^2 + 3x - 1}{(x - 2)(x + 1)}$$

Le numérateur s'annule pour $x = 1$ et $x = \frac{1}{2}$; le dénominateur pour $x = 2$ et $x = -1$. On étudie les signes du numérateur et du dénominateur (le dénominateur est considéré comme un trinôme du second degré décomposé en facteurs).

D'où le tableau

x	$-\infty$	-1		$\frac{1}{2}$		1		2	$+\infty$
signe de $-2x^2 + 3x - 1$	$-$	|	$-$	0	$+$	0	$-$	|	$-$
signe de $(x - 2)(x + 1)$	$+$	0	$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$
signe de u	$-$	||	$+$	0	$-$	0	$-$	||	$-$

La dernière ligne du tableau donne la solution du problème proposé.

◇ *Exemple 3.*

Étudier le signe de la fonction :

$$f(x; y) = (x - y + 1)(x^2 + y^2 - 4).$$

La séparatrice se compose de la droite (D) d'équation $x - y + 1 = 0$ et du cercle (C) d'équation

$$x^2 + y^2 - 4 = 0$$

(fig. 764 c). Le plan est partagé par (D) et (C) en quatre domaines, désignés par α, β, γ, δ, sur la figure.

$x - y + 1$ est positif dans le demi-plan contenant l'origine (domaines α et δ), et négatif dans l'autre demi-plan (domaines β et γ).

$x^2 + y^2 - 4$ est négatif à l'intérieur du cercle (domaines α et β), positif à l'extérieur du cercle (domaines γ et δ).

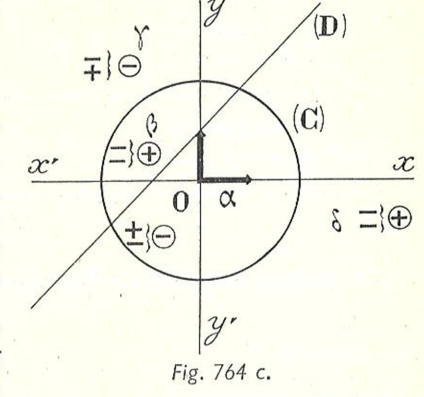


Fig. 764 c.

Dans chaque région le signe de chaque facteur a été indiqué. On en déduit le signe du produit, donc de $f(x; y)$. Sur la figure, ce signe est entouré.

En résumé :

Dans α et γ, $f(x; y)$ est négatif;
dans β et δ, $f(x; y)$ est positif.

766. Inéquations.

Soit l'inéquation :

$$f(x) > 0$$

avec :

f : $\quad x \in E \longrightarrow f(x) \in R$

L'étude du signe de $f(x)$ permet d'expliciter la solution E_1 de cette inéquation.

◇ *Exemple 1.*

Résoudre l'inéquation :

$$2x^2 + x - 3 > 0.$$

Le trinôme $f(x) = 2x^2 + x - 3$ admet pour racines $x' = -\frac{3}{2}$ et $x'' = 1$.

De l'étude de son signe on déduit la résolution de l'inéquation proposée.

x	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$		1	$+\infty$
signe de $2x^2 + x - 3$	$+$	0	$-$	0	$+$
Inéquation $2x^2 + x - 3 > 0$	V		//////		V

L'inéquation est donc vérifiée pour $x < -\frac{3}{2}$ ou $x > 1$.

◇ *Exemple 2.*

Résoudre l'inéquation :

$$2x^2 - x + 3 < 0.$$

Le trinôme $2x^2 - x + 3$ n'a pas de racine. Pour toutes les valeurs x, il est du signe de son premier coefficient, donc positif. Par suite l'inéquation n'admet aucune solution.

◇ *Exemple 3.*

Résoudre l'inéquation :

$$x(x - 4) < 0.$$

Le trinôme incomplet $x(x - 4)$ admet pour zéros $x = 0$ et $x = 4$. De l'étude de son signe on déduit la résolution de l'inéquation :

x	$-\infty$	0		4	$+\infty$
signe de $x(x - 4)$	$+$	0	$-$	0	$+$
Inéquation $x(x - 4) < 0$	//////		V		//////

◇ *Exemple 4.*

Résoudre l'inéquation

$$(x-1)(x+2)(x^2+2x-8) < 0.$$

Le premier membre admet les zéros : $x = 1$; $x = -2$; $x = 2$; $x = -4$.

On étudie le signe du premier membre et on en déduit la résolution de l'inéquation, à l'aide du tableau suivant :

x	$-\infty$		-4		-2		1		2		$-\infty$
signe de $(x-1)(x+2)$		+	|	+	0	−	0	+	|	+	
signe de x^2+2x-8		+	0	−	|	−	|	−	0	+	
signe du 1er membre		+	0	−	0	+	0	−	0	+	
Inéquation			|	V	|		|	V	|		

L'inéquation est vérifiée pour $-4 < x < -2$ et $1 < x < 2$.

◇ *Exemple 5.*

Résoudre l'inéquation :

$$x - 1 > \frac{3}{x+1}.$$

L'inéquation s'écrit :

$$x - 1 - \frac{3}{x+1} > 0$$

ou

$$\frac{x^2-4}{x+1} > 0.$$

D'où le tableau suivant :

x	$-\infty$	-2		-1		2	$+\infty$
signe de x^2-4	$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$
signe de $x+1$	$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$
signe du 1[er] membre	$-$	0	$+$	‖	$-$	0	$+$
Inéquation	//////	|	V	‖	//////	|	V

L'inéquation est donc vérifiée pour $-2 < x < -1$ et $x > 2$.

◇ *Exemple 6.*

Résoudre l'inéquation :

$$2x - y + 1 < 0.$$

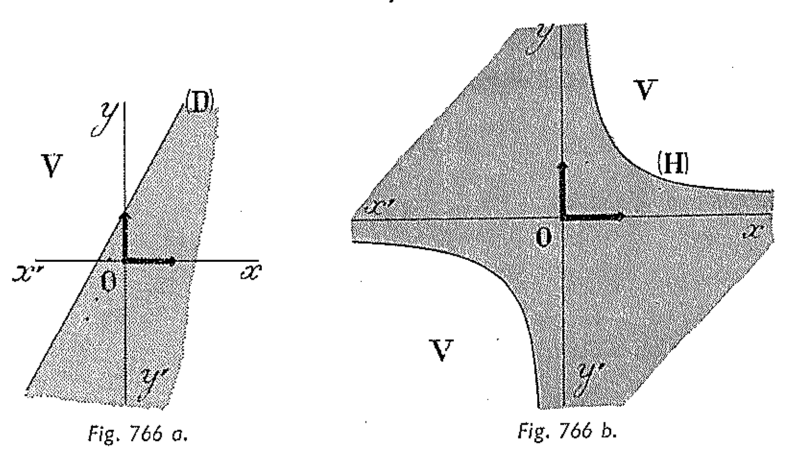


Fig. 766 a. Fig. 766 b.

La droite (D) d'équation $2x - y + 1 = 0$ partage le plan en deux demi-plans. Le demi-plan négatif est solution de l'inéquation proposée (fig. 766 *a*).

◇ *Exemple 7.*

Résoudre l'inéquation :

$$xy - 1 > 0.$$

La séparatrice est l'hyperbole équilatère (H) d'équation $xy - 1 = 0$ ou $y = \frac{1}{x}$ (fig. 766 *b*). Le domaine contenant l'origine est le domaine négatif. Les deux autres domaines sont solutions de l'inéquation.

◇ *Exemple 8.*

Résoudre l'inéquation :

$$(y - x^2)(x + y - 2) > 0.$$

La séparatrice est formée de la parabole (P) d'équation $y = x^2$, et de la droite (D) d'équation $x + y - 2 = 0$ (fig. 766*c*).

On étudie le signe du polynôme $(y - x^2)(x + y - 2)$. Les domaines positifs sont solutions de l'inéquation.

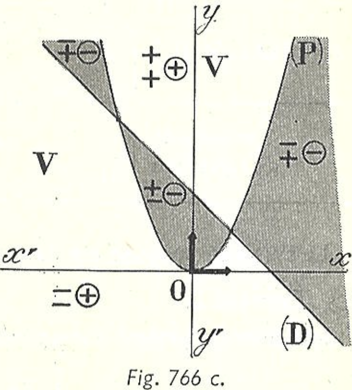


Fig. 766 c.

767. Systèmes d'inéquations.

Pour résoudre un système d'inéquations simultanées, on résout séparément chaque inéquation ; la solution du système est l'intersection des ensembles-solutions des inéquations composant le système.

◇ *Exemple 1.*

Résoudre le système :

$$\begin{cases} \dfrac{2x-1}{1-x} < 0 & (I_1) \\ 2 - x - x^2 > 0 & (I_2) \end{cases}$$

L'inéquation (I_1) est vérifiée pour $x < \frac{1}{2}$ et $x > 1$.

L'inéquation (I_2) est vérifiée pour $-2 < x < 1$.

On obtient facilement l'intersection des ensembles-solutions grâce au tableau suivant :

x	$-\infty$ — -2	-2 — $\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$ — 1	1 — $+\infty$
solutions de (I_1)	V	V		V
solutions de (I_2)		V	V	
solutions du système		V		

Le système proposé est donc vérifié pour $-2 < x < \frac{1}{2}$.

◇ *Exemple 2.*

Résoudre le système d'inéquations simultanées :

$$\begin{cases} 2x + \dfrac{3}{2} < 3 - x & (I_1) \\ \dfrac{3x-1}{2} > x - 1, & (I_2) \end{cases}$$

L'inéquation (I_1) est vérifiée pour $x < \frac{1}{2}$. L'inéquation (I_2) est vérifiée pour $x > -1$.

Les solutions du système s'obtiennent facilement par l'emploi du tableau suivant :

x	$-\infty$ — -1	-1 — $\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$ — $-\infty$
solutions de (I_1)	V	V	
solutions de (I_2)		V	V
solutions du système		V	

Le système est vérifié dans l'intervalle $\left(-1 ; \frac{1}{2}\right)$.

◇ *Exemple 3.*

Résoudre le système :

$$\begin{cases} \dfrac{x+2}{1-x} > 0 & (I_1) \\ -2x^2 + 3x - 1 < 0. & (I_2) \end{cases}$$

(I_1) est vérifiée pour $-2 < x < 1$;

(I_2) est vérifiée pour $x < \frac{1}{2}$ et $x > 1$.

Les solutions du système s'obtiennent grâce au tableau suivant :

x	$-\infty$ — -2	-2 — $\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$ — 1	1 — $+\infty$
solutions de (I_1)		V	V	
solutions de (I_2)	V	V		V
solutions du système		V		

Le système proposé est donc vérifié pour $-2 < x < \frac{1}{2}$.

768. Interprétation analytique du signe d'une fonction numérique d'une variable réelle.

Soit la fonction

$$f: \quad x \in R \longrightarrow f(x) \in R.$$

On trace la courbe C ayant pour équation $y = f(x)$.

Les points situés au-dessus de l'axe x'Ox correspondent aux valeurs positives de f(x); les abscisses de ces points sont donc les valeurs de x pour lesquels la fonction est positive.

Les points situés au-dessous de l'axe x'Ox correspondent aux

valeurs négatives de f(x), les abscisses de ces points sont donc les valeurs de x pour lesquels la fonction est négative.

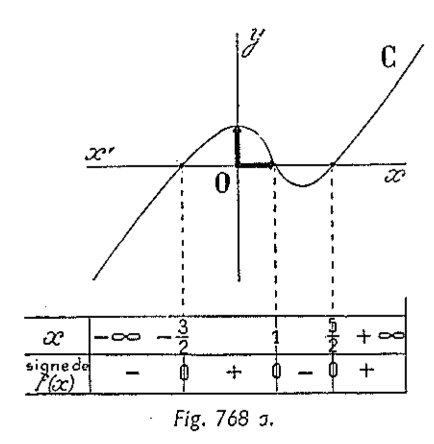


Fig. 768 a.

L'examen de la courbe permet d'obtenir le signe de $f(x)$ (fig. 768 *a*).

769. Interprétation analytique d'une inéquation à une inconnue.

1° Soit l'inéquation : $f(x) > 0$.

On trace la courbe C d'équation $y = f(x)$.

Les solutions de l'inéquation $f(x) > 0$ sont les abscisses des points de la courbe C situés au-dessus de l'axe $x'Ox$ (fig. 769 *a*).

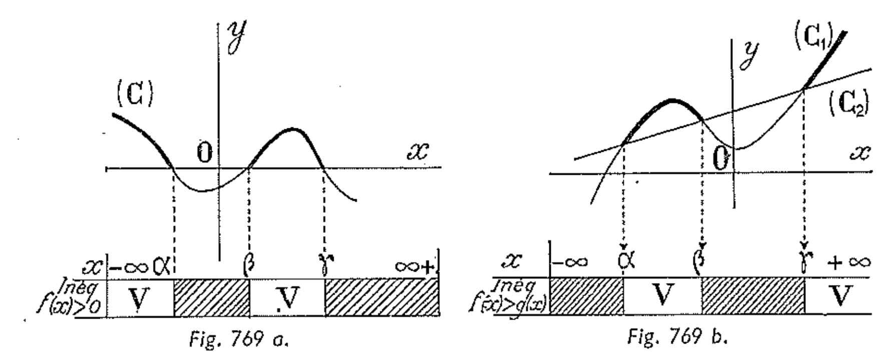


Fig. 769 a. *Fig. 769 b.*

2° Soit l'inéquation : $f(x) > g(x)$.

On trace les courbes C_1 et C_2 d'équations respectives $y = f(x)$ et $y = g(x)$.

Les solutions de l'inéquation $f(x) > g(x)$ sont les abscisses des points de la courbe C_1 qui sont situés au-dessus de la courbe C_2 (fig. 769 *b*).

CHAPITRE LV

FONCTIONS SYMÉTRIQUES

770. Fonction symétrique de deux variables.

Une fonction f(u; v), est dite symétrique par rapport aux deux variables u et v si elle ne change pas lorqu'on remplace u par v, et v par u.

◇ *Exemples :*

$$u + v \qquad uv \qquad u^2 + v^2 \qquad u^3 + v^3$$

$$(u - v)^2 \qquad \frac{1}{u} + \frac{1}{v}$$

771. Propriété fondamentale des fonctions symétriques.

On démontre que toute fonction symétrique rationnelle en u et v peut s'exprimer rationnellement en fonction de $S = u + v$ et $P = uv$, qu'on appelle les fonctions symétriques élémentaires.

On admettra ici ce résultat et on le vérifiera directement sur quelques exemples (1).

◇ *Exemple 1.*

Calcul de $u^2 + v^2$.

On a :

$$u^2 + v^2 = (u + v)^2 - 2\,uv$$

ou :

$$u^2 + v^2 = S^2 - 2\,P. \qquad (771; 1)$$

◇ *Exemple 2.*

Calcul de $u^3 + v^3$.

(1) Il est utile de connaître les formules (771 ; 1) et (771 ; 2) de mémoire.

On a :

$$u^3 + v^3 = (u + v)^3 - 3\,u^2v - 3\,uv^2$$
$$= (u + v)^3 - 3\,uv\,(u + v)$$

ou :

$$u^3 + v^3 = S^3 - 3\,PS. \qquad (771;2)$$

◇ *Exemple 3.*

Calcul de $(u - v)^2$.

On a :

$$(u - v)^2 = u^2 + v^2 - 2\,uv$$
$$= (u + v)^2 - 4\,uv$$

ou :

$$(u - v)^2 = S^2 - 4\,P. \qquad (771;3)$$

◇ *Exemple 4.*

Calcul de $\frac{1}{u} + \frac{1}{v}$.

On a :

$$\frac{1}{u} + \frac{1}{v} = \frac{u + v}{uv}.$$

ou :

$$\frac{1}{u} + \frac{1}{v} = \frac{S}{P} \qquad (771;4)$$

◇ *Exemple 5.*

Calcul de $(\alpha - 1)^2 + (\beta - 1)^2$ *en fonction de* $S = \alpha + \beta$ et $P = \alpha\beta$.

On a :

$$(\alpha - 1)^2 + (\beta - 1)^2 = \alpha^2 - 2\,\alpha + 1 + \beta^2 - 2\,\beta + 1$$
$$= (\alpha^2 + \beta^2) - 2\,(\alpha + \beta) + 2$$
$$= S^2 - 2\,P - 2\,S + 2.$$

◇ *Exemple 6.*

Calcul de $\frac{x}{2\,x - 3} + \frac{y}{2\,y - 3}$ *en fonction de* $S = x + y$ et $P = xy$.

On a :

$$\frac{x}{2x-3}+\frac{y}{2y-3}=\frac{2xy-3x+2xy-3y}{(2x-3)(2y-3)}$$
$$=\frac{4xy-3(x+y)}{4xy-6(x+y)+9}$$
$$=\frac{4P-3S}{4P-6S+9}$$

772. Somme et produit des racines d'une équation du second degré.

Soit l'équation : $ax^2+bx+c=0$.

Que les racines soient distinctes ou égales ($\Delta = b^2-4ac \geqslant 0$), elles sont données par les formules :

$$x'=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \qquad x''=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

D'où on déduit :

$$x'+x''=\frac{-b+\sqrt{\Delta}-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=-\frac{2b}{2a}=-\frac{b}{a}$$

et :

$$x'x''=\frac{[-b+\sqrt{\Delta}][-b-\sqrt{\Delta}]}{4a^2}=\frac{(-b)^2-(\sqrt{\Delta})^2}{4a^2}$$
$$=\frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2}=\frac{4ac}{4a^2}=\frac{c}{a}$$

On a donc :

$$S=x'+x''=-\frac{b}{a} \qquad (772;1)$$

$$P=x'x''=\frac{c}{a} \qquad (772;2)$$

Et on peut énoncer :

Lorsque l'équation $\mathbf{ax^2+bx+c=0}$ a deux racines $\mathbf{x'}$ et $\mathbf{x''}$, distinctes ou égales, leur somme est égale à $-\frac{\mathbf{b}}{\mathbf{a}}$ et leur produit est égal à $\frac{\mathbf{c}}{\mathbf{a}}$.

773. Fonctions symétriques des racines.

Pour calculer la valeur d'une fonct on symétrique $f(x'; x'')$ des racines d'une équation du second degré, au lieu de remplacer x' et x'' respectivement par $\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$, on a avantage à l'exprimer préalablement en fonction de S et P et à remplacer ensuite S et P par $-\frac{b}{a}$ et $\frac{c}{a}$.

Il faut toutefois s'assurer de l'existence des racines de l'équation, car les nombres $-\frac{b}{a}$ et $\frac{c}{a}$ existent même lorsque l'équation n'a pas de racine.

◇ *Exemple 1.*

x' et x'' étant les racines de l'équation

$$3x^2 - 7x + 1 = 0,$$

calculer la valeur numérique de l'expression $x'^2 + x''^2$.

L'équation $3x^2 - 7x + 1 = 0$ a pour discriminant

$$\Delta = 49 - 12 = 37.$$

Elle a donc deux racines distinctes x' et x'' dont la somme et le produit sont respectivement

$$S = \frac{7}{3} \quad \text{et} \quad P = \frac{1}{3}$$

Or :

$$x'^2 + x''^2 = S^2 - 2P = \frac{49}{9} - \frac{2}{3}$$

c'est-à-dire finalement :

$$x'^2 + x''^2 = \frac{43}{9}.$$

◇ *Exemple 2.*

Soient x' et x'' les racines de l'équation $x^2 + 6x + 6 = 0$. *Calculer le nombre*

$$A = \frac{4x'^2 - 3x'x'' + 4x''^2}{x'^2x'' + x'x''^2}.$$

Le discriminant réduit de l'équation est $\Delta' = 9 - 6 = 3$. L'équation

a donc deux racines distinctes x' et x'' dont la somme et le produit sont respectivement :

$$S = -6 \quad \text{et} \quad P = 6.$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} 4x'^2 - 3x'x'' + 4x''^2 &= 4(x'^2 + x''^2) - 3x'x'' \\ &= 4(S^2 - 2P) - 3P \\ &= 4S^2 - 11P \\ &= 4 \times 36 - 11 \times 6 \\ &= 78 \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} x'^2x'' + x'x''^2 &= x'x''(x' + x'') \\ &= x'x''(x' + x'') \\ &= PS \\ &= -36 \end{aligned}$$

Finalement :

$$A = -\frac{78}{36}$$

ou

$$A = -\frac{13}{6}.$$

774. Problème fondamental.

On se propose de résoudre le problème suivant :

Calculer deux nombres connaissant leur somme et leur produit.

Si S et P désignent les valeurs données de la somme et du produit des deux nombres cherchés, la résolution revient à celle du système suivant :

$$\begin{cases} x + y = S \\ xy = P \end{cases} \qquad (774;1)$$

$(x = \alpha; y = \beta)$ étant une solution on a :

$$\alpha + \beta = S$$
$$\alpha\beta = P$$

D'autre part α et β sont racines de l'équation-produit :

$$(u - \alpha)(u - \beta) = 0,$$

d'inconnue u, ou :

$$u^2 - (\alpha + \beta)u + \alpha\beta = 0$$

c'est-à-dire avec l'hypothèse faite :

$$u^2 - Su + P = 0. \qquad (774; 2)$$

Donc : toute solution du système (774; 1) est formée des racines de l'équation (774; 2).

On obtiendra toutes les solutions du problème en résolvant l'équation (774; 2) et en accouplant les racines dans n'importe quel ordre.

Le discriminant de l'équation (774; 2) est $\Delta = S^2 - 4P$.

Si $\Delta < 0$, le problème n'a pas de solution.

Si $\Delta = 0$, le problème a une solution unique $x = y = \frac{S}{2}$.

Si $\Delta > 0$, le problème a deux solutions symétriques $(x = u'; y = u'')$ et $(x = u''; y = u')$.

◇ *Exemple 1.*

Calculer les nombres x *et* y *sachant que*

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ xy = -10 \end{cases}$$

Ces nombres sont les deux racines, si elles existent, de l'équation

$$u^2 - 3u - 10 = 0.$$

Cette équation admet pour racines $u' = -2$ et $u'' = 5$. Le problème posé a deux solutions symétriques.

$$\begin{cases} x = -2 \\ y = 5 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x - 5 \\ y = -2 \end{cases}$$

◇ *Exemple 2.*

Calculer x *et* y *sachant que*

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ xy = 1 \end{cases}$$

Les nombres x et y sont les racines, si elles existent, de l'équation

$$u^2 - u + 1 = 0.$$

Le discriminant de cette équation étant négatif, les nombres x et y n'existent pas dans le corps R, mais existent dans le corps C.

◇ *Exemple 3.*

Calculer les nombres x *et* y *sachant que :*

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ xy = 4 \end{cases}$$

Les nombres x et y sont les racines, si elles existent, de l'équation :

$$u^2 - 4u + 4 = 0.$$

Or cette équation admet une racine double $u' = u'' = 2$. Le problème posé a donc une solution :

$$x = y = 2.$$

775. Deux problèmes d'extremum.

1° En supposant que la somme S de deux nombres réels est constante et que le produit P est variable, la condition

$$S^2 - 4P \geqslant 0$$

s'écrit :

$$P \leqslant \frac{S^2}{4} \qquad (775;1)$$

Cela montre que le maximum du produit P est $\frac{S^2}{4}$. Comme alors

$$S^2 - 4P = 0,$$

$S^2 - 4P = 0$, les deux nombres sont égaux.

Et :

Le produit de deux nombres réels variables, assujettis à la condition d'avoir une somme constante donnée, est maximum lorsque ces deux nombres sont égaux.

2° En supposant maintenant que les deux nombres sont positifs et leur produit P constant, leur somme S étant variable, la condition

$$S^2 - 4P \geqslant 0$$

s'écrit :

$$S \geqslant 2\sqrt{P} \qquad (775;2)$$

Cela montre que le minimum de la somme S est $2\sqrt{P}$. Comme alors $S^2 - 4P = 0$, les deux nombres sont égaux.

Et :

La somme de deux nombres positifs, assujettis à la condition d'avoir un produit constant donné, est minimum lorsque ces deux nombres sont égaux.

776. Système d'équations symétriques.

Soit un système d'équations rationnelles symétriques.

$$\begin{cases} f(x;y) = 0 & (776;1) \\ g(x;y) = 0 & (776;2) \end{cases}$$

Les équations (776; 1) et (776; 2) étant symétriques, peuvent s'exprimer en fonction de S et P. On obtient un second système dont les inconnues sont S et P :

$$\begin{cases} F(S;P) = 0 & (776;3) \\ G(S;P) = 0 & (776;4) \end{cases}$$

En résolvant ce nouveau système on est ramené au problème fondamental.

◇ *Exemple.*

Résoudre le système :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ xy = 12 \end{cases}$$

Le nouveau système est :

$$\begin{cases} S^2 - 2P = 25 \\ P = 12 \end{cases}$$

D'où on tire les solutions ($S = 7$; $P = 12$) et ($S = -7$; $P = 12$).

On est alors amené à résoudre les deux systèmes fondamentaux

$$\text{(I)} \begin{cases} x + y = 7 \\ xy = 12 \end{cases} \qquad \text{(II)} \begin{cases} x + y = -7 \\ xy = 12 \end{cases}$$

(I) se ramène à l'équation $u^2 - 7u + 12 = 0$ dont les solutions sont $u' = 3$, $u'' = 4$.

(II) se ramène à l'équation $u^2 + 7u + 12 = 0$ dont les solutions sont $u' = -3$ et $u'' = -4$.

Le système proposé admet donc les quatre solutions :

($x = 3$; $y = 4$) ($x = 4$; $y = 3$)
($x = -3$; $y = -4$) ($x = -4$; $y = -3$).

777. Relation involutive.

Deux variables x et y sont liées involutivement si on a :

$$A\,xy + B(x + y) + D = 0.$$

C'est là une relation homographique symétrique par rapport à x et y. Les valeurs focales sont $x_0 = -\frac{B}{A}$ et $y_0 = -\frac{B}{A}$; elles sont donc égales.

778. Transformation d'une équation du second degré.

Transformer une équation du second degré c'est résoudre le problème suivant :

Une équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$ qui a deux racines x' et x'' étant donnée, former une équation du second degré ayant pour racines

$$X' = \varphi(x'; x'') \quad \text{et} \quad X'' = \varphi(x''; x')$$

φ étant une fonction donnée.

La somme Σ et le produit Π des racines de l'équation cherchée sont :

$$\Sigma = X' + X'' = \varphi(x'; x'') + \varphi(x''; x') \qquad (778; 1)$$
$$\Pi = X'X'' = \varphi(x'; x'')\ \varphi(x''; x') \qquad (778; 2)$$

Σ et Π sont des fonctions symétriques de x' et x''; il est donc possible de les calculer en fonction de $S = -\frac{b}{a}$ et $P = \frac{c}{a}$, c'est-à-dire en fonction des coefficients a, b, c de l'équation donnée.

L'équation cherchée est alors :

$$X^2 - \Sigma X + \Pi = 0. \qquad (778; 3)$$

◇ *Exemple 1.*

Soit l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ *ayant deux racines* x' *et* x''. *Former l'équation admettant pour racines* $X' = x' + h$ *et* $X'' = x'' + h$.

En appliquant la méthode générale précédente, on obtient :

$$\begin{aligned}\Sigma &= X' + X'' \\ &= x' + x'' + 2h \\ &= -\frac{b}{a} + 2h \\ &= \frac{2ah - b}{a}.\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\Pi &= X'X'' \\ &= (x' + h)(x'' + h) \\ &= x'x'' + h(x' + x'') + h^2 \\ &= \frac{c}{a} - \frac{hb}{a} + h^2 \\ &= \frac{ah^2 - bh + c}{a}.\end{aligned}$$

L'équation cherchée est donc :

$$X^2 - \frac{2ah - b}{a}X + \frac{ah^2 - bh + c}{a} = 0$$

ou

$$aX^2 - (2ah - b)X + ah^2 - bh + c = 0.$$

◇ *Exemple 2.*

Soit l'équation $ax^2 + bx + c = 0$, *ayant deux racines* x' *et* x''. *Former l'équation admettant pour racines* $X' = \frac{1}{x'}$ *et* $X'' = \frac{1}{x''}$.

On a :

$$\begin{aligned}\Sigma &= X' + X'' \\ &= \frac{1}{x'} + \frac{1}{x''} \\ &= \frac{x' + x''}{x'x''} \\ &= -\frac{b}{c}\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\Pi &= X'X'' \\ &= \frac{1}{x'x''} \\ &= \frac{a}{c}.\end{aligned}$$

L'équation cherchée est

$$X^2 + \frac{b}{c}X + \frac{a}{c} = 0$$

c'est-à-dire :

$$cX^2 + bX + a = 0$$

Elle est connue sous le nom d'*équation aux inverses.*

779. Relation entre les racines d'une équation paramétrique.

1° Soit une équation du second degré paramétrique, c'est-à-dire une équation dont les coefficients a, b, c sont des fonctions d'un paramètre m :

$$a(m) \cdot x^2 + b(m) \cdot x + c(m) = 0.$$

La somme et le produit des racines sont :

$$S = -\frac{b(m)}{a(m)} \qquad \text{et} \qquad P = \frac{c(m)}{a(m)}$$

En éliminant m entre S et P, on obtient la relation :

$$\varphi(S; P) = 0 \qquad (779; 1)$$

entre la somme et le produit des racines.

En remplaçant S et P respectivement par $x' + x''$ et $x'x''$ la relation précédente s'écrit :

$$\psi(x'; x'') = 0. \qquad (779; 2)$$

Elle lie les racines de l'équation donnée.

2° Un cas particulièrement intéressant et fréquent est celui où les coefficients a, b, c sont des fonctions affines(1) de m :

$$a = \alpha m + \alpha'$$
$$b = \beta m + \beta'$$
$$c = \gamma m + \gamma'$$

D'où :

$$S = -\frac{\beta m + \beta'}{\alpha m + \alpha'} \qquad \text{et} \qquad P = \frac{\gamma m + \gamma'}{\alpha m + \alpha'}$$

En explicitant m, il vient aisément :

$$m = -\frac{\alpha' S + \beta'}{\alpha S + \beta}$$

et

$$m = -\frac{\alpha' P - \gamma'}{\alpha P - \gamma}.$$

L'élimination de m est alors immédiate :

$$\frac{\alpha' S + \beta'}{\alpha S + \beta} = \frac{\alpha' P - \gamma'}{\alpha P - \gamma}$$

---

(1) C'est-à-dire polynomiales du 1er degré.

ou :

$$(\alpha\beta' - \beta\alpha')\,P + (\alpha\gamma' - \gamma\alpha')\,S + \beta\gamma' - \gamma\beta' = 0 \qquad (779;3)$$

c'est-à-dire :

$$(\alpha\beta' - \beta\alpha')\,x'x'' + (\alpha\gamma' - \gamma\alpha')\,(x' + x'') + \beta\gamma' - \gamma\beta' = 0 \qquad (779;4)$$

D'où l'énoncé :

Si les coefficients d'une équation du second degré sont des fonctions affines d'un paramètre, les racines de cette équation sont liées par une relation involutive.

◇ *Exemple.*

Soit l'équation :

$$x^2 - 2\,(m + 1)\,x + 2\,m + 3 = 0.$$

Former la relation indépendante de m *qui existe entre les racines de cette équation.*

Le discriminant réduit est :

$$\Delta' = (m + 1)^2 - (2\,m + 3)$$
$$= m^2 - 2.$$

L'équation admet des racines si $m \notin]-\sqrt{2}\,;\,+\sqrt{2}[$

Moyennant cette condition :

$$S = 2\,(m + 1) = 2\,m + 2$$

et

$$P = 2\,m + 3.$$

D'où :

$$P - S = 1.$$

La relation involutive cherchée est donc :

$$x'x'' - (x' + x'') - 1 = 0.$$

780. Condition imposée aux racines d'une équation paramétrique.

Une équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$ étant donnée, ayant des racines et dont les coefficients sont des fonctions d'un paramètre m, une condition $\varphi\,(x'\,;\,x'') = 0$ est imposée aux racines.

Le problème consiste à déterminer les valeurs du paramètre, s'il en existe, pour lesquelles la condition est vérifiée.

La méthode générale d'étude de ce problème consiste à envisager le système d'équations :

$$\begin{cases} x' + x'' = -\dfrac{b(m)}{a(m)} \\ x'x'' = \dfrac{c(m)}{a(m)} \\ \varphi(x'\,;x'') = 0 \end{cases}$$

qui détermine m, x' et x''.

Pratiquement il y a intérêt à distinguer les deux cas suivants :
$\varphi(x'\,;x'')$ n'est pas symétrique en x' et x'' : Exemple 1.
$\varphi(x'\,;x'')$ est symétrique en x' et x'' : Exemple 2.

◇ *Exemple 1.*

Soit l'équation :

$$x^2 - 2(m+1)x + 2m + 3 = 0.$$

Déterminer les valeurs de m *pour lesquelles l'équation a l'une de ses racines qui est triple de l'autre.*

La méthode générale précédente conduit au système :

$$\begin{cases} x' + x'' = 2(m+1) & (1) \\ x'x'' = 2m+3 & (2) \\ x'' = 3x' & (3) \end{cases}$$

Les équations (1) et (3) permettent de calculer x' et x'' en fonction de m :

$$\begin{cases} x' = \dfrac{(m+1)}{2} & (4) \\ x'' = \dfrac{3(m+1)}{2} & (5) \end{cases}$$

En substituant dans (2) :

$$\frac{3(m+1)^2}{4} = 2m + 3$$

ou

$$3m^2 - 2m - 9 = 0$$

Les racines de cette équation sont

$$\begin{cases} m = \dfrac{1 + 2\sqrt{7}}{3} \\ m = \dfrac{1 - 2\sqrt{7}}{3} \end{cases}$$

Les formules (4) et (5) permettent alors de calculer x' et x''.

◇ *Exemple 2.*

Soit l'équation :

$$x^2 - 2(m + 1)x + m^2 + 2m = 0.$$

Déterminer les valeurs de m pour lesquelles les racines satisfont à la condition :

$$x'^2 + x''^2 = 10$$

La méthode générale conduit au système :

$$\begin{cases} x' + x'' = 2(m + 1) & (1) \\ x'x'' = m^2 + 2m & (2) \\ x'^2 + x''^2 = 10 & (3) \end{cases}$$

La condition (3) est symétrique en x' et x'' ; elle s'écrit :

$$S^2 - 2P = 10$$

c'est-à-dire en tenant compte des équations (1) et (2)

$$4(m + 1)^2 - 2(m^2 + 2m) = 10$$

ou, après division par 2,

$$m^2 + 2m - 3 = 0.$$

Les racines de cette équation sont $m = 1$ et $m = -3$.

Mais dans la résolution de ce problème on n'a utilisé que la somme S et le produit P ; il est donc indispensable de vérifier l'existence des racines de l'équation donnée pour les valeurs trouvées $m = 1$ et $m = -3$.

Or :

$$\begin{aligned} \Delta' &= (m + 1)^2 - (m^2 + 2m) \\ &= 1. \end{aligned}$$

Il y a des racines quel que soit m.

Les solutions du problème sont finalement $m = 1$ et $m = -3$.

CHAPITRE LVI

NOMBRES ET RACINES D'UNE ÉQUATION

---

781. Existence et signe des racines.

Le problème à résoudre est le suivant :

Reconnaître, sans résoudre une équation du second degré

$$ax^2 + bx + c = 0$$

si elle a des racines et quels sont leurs signes lorsqu'elle en a.

On s'assure de l'existence des racines à l'aide du discriminant

$$\Delta = b^2 - 4\,ac$$

de l'équation.

Si Δ est négatif, l'équation n'a pas de racine.

Si Δ est nul, l'équation a une racine double égale à $-\frac{b}{2a} = \frac{S}{2}$, dont le signe est celui de la somme $S = -\frac{b}{a}$.

Si Δ *est positif*, il y a deux racines distinctes. Pour étudier le signe relatif de ces racines, il faut alors examiner le signe du produit $P = \frac{c}{a}$ des deux racines.

Si P est négatif, les deux racines sont de signes contraires.

Si P est nul, c est nul aussi; il y a deux racines, l'une est nulle, l'autre est égale à $S = -\frac{b}{a}$ [1].

Si P est positif, les deux racines sont toutes deux négatives, ou

---

(1) Dans ce cas les deux racines ne peuvent être nulles à la fois; b serait nul et par suite Δ aussi; ce qui est impossible dans ce cas, car on a posé $\Delta > 0$ comme condition première.

deux positives. Il faut examiner le signe de la somme des deux racines

$$S = -\frac{b}{a}.$$

Si S est négatif, les deux racines sont négatives.
Si S est positif, les deux racines sont positives.

782. Remarques.

1° Dans le cas $P < 0$, les deux racines sont de signes contraires ($x' < 0 < x''$).

Si on examine $S = -\frac{b}{a}$, on a :

$S > 0$, la racine positive a la plus grande valeur absolue : $|x''| > |x'|$.
$S < 0$, la racine négative a la plus grande valeur absolue : $|x''| < |x'|$.
$S = 0$, les deux racines sont opposées.

2° Dans le cas $\Delta > 0$ et $P < 0$, la somme S des racines ne peut être nulle; si elle l'était, les deux racines seraient opposées, ce qui n'est pas possible, leur produit étant positif.

3° Dans la pratique, on remarque d'abord les signes de a et c.
Si a et c ont des signes contraires, il y a deux racines distinctes; le produit $P = \frac{c}{a}$ est négatif, donc les deux racines sont de signes contraires.
Par suite :

$P < 0$ est une condition nécessaire et suffisante pour qu'une équation du second degré ait deux racines de signes contraires.

783. Exemples.

◇ *Exemple 1.*

Existence et signe des racines de l'équation :

$$-2x^2 + 3x + 7 = 0.$$

Les coefficients a et c étant de signes contraires, il y a des *racines de signes contraires* (cf. n° 782; 3°).

◇ *Exemple 2.*

Existence et signe des racines de l'équation :

$$2x^2 - 7x + 1 = 0.$$

Le discriminant est $\Delta = 49 - 8 = 41$; il y a donc deux racines distinctes.

Le produit des racines est $P = \frac{1}{2}$; les deux racines sont de même signe.

La somme des racines, $S = \frac{7}{2}$, étant positive, *les deux racines sont positives.*

◇ *Exemple 3.*

Existence et signe des racines, suivant les valeurs du paramètre m, *de l'équation :*

$$mx^2 + 2(m - 1)x + m - 3 = 0.$$

Si $m = 0$, l'équation se réduit à l'équation du premier degré

$$-2x - 3 = 0$$

qui admet la racine négative $-\frac{3}{2}$.

Pour les autres valeurs de m, $(m \neq 0)$, l'équation est du second degré. L'existence des racines dépendant du signe du discriminant Δ', et le signe relatif des racines dépendant du signe du produit P, on étudie d'abord ces deux quantités :

$$\Delta' = (m - 1)^2 - m(m - 3)$$
$$= m + 1$$

et

$$P = \frac{m - 3}{m}.$$

Le tableau suivant donne le signe de Δ' et de P.

m	$-\infty$		-1		0		3		$+\infty$
signe Δ'			0	+		+		+	
signe de P				+	‖	−	0	+	

On en déduit la discussion suivante :

Intervalle $(-\infty\,;\,-1)$. Δ' étant négatif, l'équation n'a pas de racine.

Intervalle $(-1\,;\,0)$. Δ' étant positif, *l'équation a deux racines distinctes.* P étant positif, ces deux racines sont de même signe.

Pour préciser il faut étudier la somme $S = \dfrac{2(1-m)}{m}$. Le signe de S est donné par le tableau suivant :

m	$-\infty$	-1		0		1		$+\infty$
signe de S	(hachuré)	|	$-$	||	$+$	0	$-$	

Dans l'intervalle étudié S est négatif. *L'équation a deux racines négatives.*

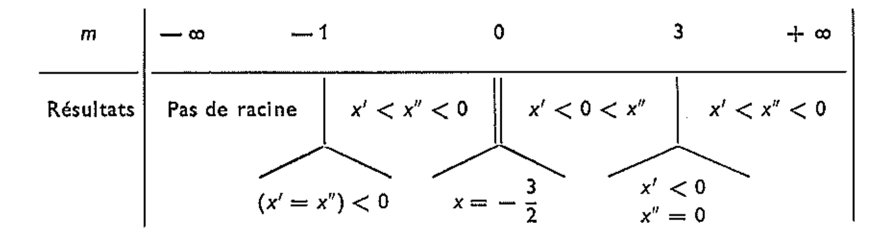
Intervalle $(0\,;\,3)$. P étant négatif, *l'équation a deux racines de signes contraires.*

Intervalle $(3\,;\,+\infty)$. Δ' étant positif, l'équation a deux racines distinctes. P étant positif, ces deux racines sont de même signe. Leur somme S est négative. Donc : *l'équation a deux racines négatives.*

Borne $m = -1$. Δ' est nul; l'équation admet une racine double égale à $\frac{S}{2}$. Pour $m = -1$ la somme est négative, donc *l'équation admet une racine double négative.*

Borne $m = 3$. Δ' est positif; l'équation admet deux racines distinctes. P étant nul, l'une des racines est nulle, l'autre est égale à la somme qui est négative. *L'équation a une racine négative et une racine nulle.*

La discussion est résumée dans le tableau suivant :



m	$-\infty$	-1		0		3		$+\infty$
Résultats	Pas de racine	$(x' = x'') < 0$	$x' < x'' < 0$	$x = -\frac{3}{2}$	$x' < 0 < x''$	$x' < 0$, $x'' = 0$	$x' < x'' < 0$	

784. Comparaison d'un nombre et des racines.

La comparaison des racines d'une équation du second degré *dans le corps R* :

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad (784;\,1)$$

et d'un nombre donné α est souvent difficile car dans l'expression des racines figure, en général, un radical. La méthode de comparaison suivante permet d'éviter les difficultés, et de plus, assure la comparaison simultanée du nombre α et des deux racines de l'équation.

On sait que la comparaison de deux nombres x et α se fait en étudiant le signe de leur différence $x - \alpha$.

On pose donc :

$$x - \alpha = X \qquad \text{ou} \qquad x = \alpha + X.$$

En substituant à x l'expression $\alpha + X$, l'équation (784; 1) devient, tous calculs faits :

$$aX^2 + (2\,a\alpha + b)\,X + a\alpha^2 + b\alpha + c = 0$$

ou en posant $a\alpha^2 + b\alpha + c = f(\alpha)$:

$$aX^2 + (2\,a\alpha + b)\,X + f(\alpha) = 0. \qquad (784;\,2)$$

Par suite, la comparaison du nombre α aux racines de l'équation (784; 1) revient à comparer 0 aux racines de l'équation (784; 2), c'est-à-dire à étudier le signe des racines de cette équation (784; 2).

On est ainsi amené à étudier le signe du discriminant Δ de l'équation (784; 1) et le signe de $\frac{f(\alpha)}{a}$ ou plus simplement de $a \cdot f(\alpha)$.

D'où le tableau suivant donnant la solution du problème.

$\Delta < 0$. L'équation (784; 1) n'a pas de racine.

$\Delta = 0$. L'équation (784; 1) a une racine double $x' = x'' = -\frac{b}{2\,a}$, que l'on compare directement à α.

$\Delta > 0$. L'équation (784; 1) admet deux racines distinctes x' et x'', donc l'équation (784; 2) admet aussi deux racines distinctes :

$$X' = x' - \alpha \quad \text{et} \quad X'' = x'' - \alpha.$$

Si $af(\alpha) < 0$, les racines X' et X'' sont de signes contraires. Les inégalités $X' < 0$ et $X'' > 0$ entraînent $x' < \alpha$ et $x'' > \alpha$. Autrement dit : α est compris entre les racines.

Si $af(\alpha) = 0$ (c'est-à-dire $f(\alpha) = 0$ si $a \neq 0$), α est racine de l'équation (784; 1) et on regarde si c'est la plus grande ou la plus petite en comparant α à $\frac{S}{2}$.

Si $af(\alpha) > 0$, les racines X' et X'' sont de même signe, donc on a

$$x' < \alpha \quad \text{et} \quad x'' < \alpha$$

ou :

$$x' > \alpha \quad \text{et} \quad x'' > \alpha.$$

Autrement dit : α est extérieur à l'intervalle des racines.

Il faut alors, pour lever l'indétermination, comparer α à un nombre simple compris entre les racines $\left(\text{généralement on prend } k = -\frac{b}{2a} = \frac{S}{2}\right)$.

Si $\alpha < k$, on a le classement $\alpha < x' < x''$.
Si $\alpha > k$, on a le classement $x' < x'' < \alpha$.

785. Remarque.

De ce qui précède on déduit :

Une condition nécessaire et suffisante pour que l'équation

$$\mathbf{ax^2 + bx + c = 0}$$

ait deux racines distinctes telles que le nombre α soit compris entre les racines est $af(\alpha) < 0$.

En effet pour que l'équation (784; 2) ait deux racines de signes contraires, il faut et il suffit que $af(\alpha) < 0$.

786. Exemples.

◇ *Exemple 1.*

Comparer le nombre $\alpha = 1$ et les racines de l'équation :

$$x^2 - 3x + 1 = 0.$$

On a :

$$f(\alpha) = f(1) = -1.$$

Donc $af(\alpha) = -1$. L'équation a des racines distinctes et -1 est intérieur à l'intervalle des racines :

$$x' < -1 < x''.$$

◇ *Exemple 2.*

Comparer le nombre $\alpha = 4$ et les racines de l'équation :

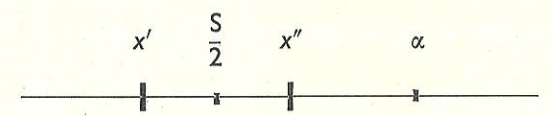
$$2x^2 - 7x + 1 = 0.$$

Le discriminant est $\Delta = 49 - 8 = 41$; l'équation admet deux racines distinctes x' et x''. D'autre part $f(\alpha) = f(4) = 5$; par suite $a\, f(\alpha) = 10$ est positif et $\alpha = 4$ est extérieur à l'intervalle des racines.

On compare α à la demi-somme des racines : $\frac{S}{2} = -\frac{b}{2a} = \frac{7}{4}$. Comme 4 est supérieur à la demi-somme des racines on a le classement :

$$x' < x'' < \alpha.$$

Il est souvent utile de s'aider du graphique suivant :



◇ *Exemple 3.*

Comparer le nombre $\alpha = -1$ *et les racines de l'équation :*

$$3\,x^2 - 7\,x - 1 = 0.$$

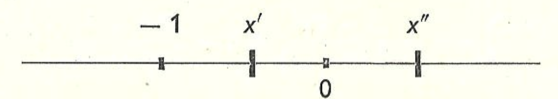
Les cœfficients a et c étant de signes contraires l'équation a deux racines de signes contraires ($x' < 0 < x''$).

D'autre part $f(-1) = 9$; $a f(\alpha) = 27$; $a f(\alpha)$ étant positif, $\alpha = -1$ est extérieur à l'intervalle des racines.

On compare alors α à 0 qui est ici compris entre les racines. On a donc le classement suivant :

$$-1 < x' < x''.$$

Le graphique à utiliser est le suivant :



◇ *Exemple 4.*

Discuter, d'après les valeurs du paramètre m, *la position des racines de l'équation :*

$$(\mathrm{m} - 1)\,\mathrm{x}^2 + (2\,\mathrm{m} - 3)\,\mathrm{x} + \mathrm{m} + 1 = 0$$

et du nombre $\alpha = -2$.

Pour $m = 1$, l'équation est du premier degré :

$$-x + 2 = 0$$

et admet la racine simple $x = 2$.

Pour les autres valeurs de *m* l'équation est du second degré.

L'existence des racines dépendant du signe du discriminant Δ, et la position relative de α et de l'intervalle des racines dépendant du signe de $af(\alpha)$, on étudie d'abord ces deux quantités.

$$\Delta = (2m-3)^2 - 4(m-1)(m+1)$$
$$= -12m + 13$$

et : $$f(\alpha) = f(-2) = 4(m-1) - 2(2m-3) + m + 1$$
$$= m + 3$$
$$af(\alpha) = (m-1)(m+3).$$

Le tableau suivant donne le signe de Δ et de $af(\alpha)$:

m	$-\infty$	-3		1		$\frac{13}{12}$	$+\infty$
signe de Δ	$+$	|	$+$	‖	$+$	0	(hachuré)
signe de $af(\alpha)$	$+$	0	$-$	‖	$+$		(hachuré)

Comme Δ et $af(\alpha)$ peuvent être positifs en même temps, il sera nécessaire de comparer α à la demi-somme des racines $\frac{S}{2}$. On étudie donc le signe de $\frac{S}{2} - \alpha$. On a :

$$\frac{S}{2} - \alpha = \frac{3-2m}{2(m-1)} + 2 = \frac{2m-1}{2(m-1)}.$$

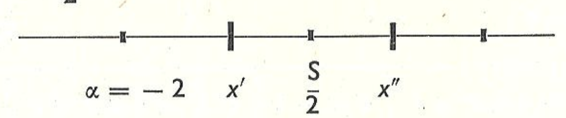
Le signe de $\frac{S}{2} - \alpha$ est donné par le tableau suivant :

m	$-\infty$	$\frac{1}{2}$		1	$+\infty$
signe de $\frac{S}{2} - \alpha$	$+$	0	$-$	‖	$+$

On déduit la discussion suivante :

Intervalle $(-\infty; -3)$. Δ est positif, l'équation a deux racines distinctes ; $af(\alpha)$ est positif : α est extérieur à l'intervalle des racines.

$\frac{S}{2} - \alpha$ positif; $\frac{S}{2} > \alpha$ donc α est inférieur aux deux racines :



Intervalle $(-3; 1)$. $af(\alpha)$ est négatif; l'équation a deux racines distinctes, et α est compris entre les racines :

$x' \quad \alpha = -2 \quad x''$

Intervalle $\left(1; \frac{13}{12}\right)$. Δ est positif; l'équation a deux racines distinctes; $af(\alpha)$ est positif : α est extérieur à l'intervalle des racines.
$\frac{S}{2} - \alpha$ est positif; $\frac{S}{2} > \alpha$, donc α est inférieur aux deux racines.

$\alpha = -2 \quad x' \quad \frac{S}{2} \quad x''$

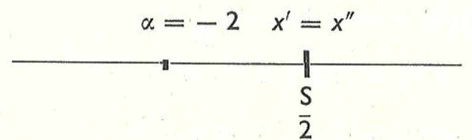
Intervalle $\left(\frac{13}{12}; +\infty\right)$. Δ est négatif; l'équation n'a pas de racine.

Borne $m = -3$. Δ est positif, l'équation a deux racines distinctes, $f(\alpha) = 0$; α est une des racines.

Comme $\frac{S}{2} - \alpha$ est positif, $\frac{S}{2} < \alpha$ et $x' = \alpha$.

$x' = -2 \quad \frac{S}{2} \quad x''$

Borne $m = \frac{13}{12}$. Δ est nul, l'équation a une racine double $x' = x'' = \frac{S}{2}$.
Comme $\frac{S}{2} - \alpha$ est positif, $\frac{S}{2} > \alpha$, et $\alpha = -2$ est inférieur à la racine double.



La discussion est résumée dans le tableau suivant :

m	$-\infty$		-3		1		$\frac{13}{12}$		$+\infty$
Résultats		$-2 < x' < x''$		$x' < -2 < x''$		$-2 < x' < x''$		0 racine	
			$(x' = -2) < x''$		$(-2) < (x = 2)$		$-2 < (x' = x'')$		

787. Comparaison de deux nombres et des racines.

On utilise la même méthode que pour la comparaison d'un nombre aux racines.

◇ *Exemple.*

Comparer les nombres $\alpha = -1$ et $\beta = 1$ *aux racines de l'équation :*

$$(2\,m - 1)\,x^2 - 2\,(m + 4)\,x + 5\,m + 2 = 0$$

Pour $m = \frac{1}{2}$ l'équation est du premier degré :

$$-9\,x + \frac{9}{2} = 0$$

et admet la racine simple $x = \frac{1}{2}$.

Pour toutes les autres valeurs de **m** l'équation est du second degré.

L'existence des racines dépendant du signe du discriminant Δ' et la position des nombres α et β par rapport aux racines dépendant des signes de $a f(\alpha)$ et $a f(\beta)$, on étudie d'abord ces trois quantités :

$$\Delta' = (m + 4)^2 - (2\,m - 1)\,(5\,m + 2)$$
$$= 9\,(-m^2 + m + 2)$$

Δ' s'annule pour $m = -1$ et $m = 2$.

$$f(\alpha) = f(-1) = 9\,(m + 1)$$

et

$$a f(\alpha) = 9\,(2\,m - 1)\,(m + 1)$$

$a f(\alpha)$ s'annule pour $m = -1$ et $m = \frac{1}{2}$.

$$f(\beta) = f(1) = 5\,m - 7$$

et

$$a f(\beta) = (2\,m - 1)\,(4\,m - 7).$$

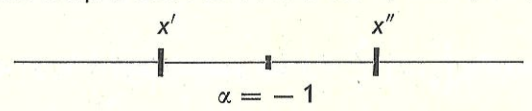
Le tableau suivant donne les signes de Δ', $af(\alpha)$ et $af(\beta)$.

m	$-\infty$		-1		$\frac{1}{2}$		$\frac{7}{5}$		2		$+\infty$
signe de Δ'		$-$	0	$+$	‖	$+$		$+$	0	$-$	
signe de $af(\alpha)$			0	$-$	0	$+$		$+$			
signe de $af(\beta)$				$+$	0	$-$	0	$+$			

La discussion suivante résulte alors aisément du tableau précédent.

Intervalles $(-\infty\,;-1)$ *et* $(2\,;+\infty)$; Δ' est négatif; l'équation n'a pas de racine.

Intervalle $\left(-1\,;\frac{1}{2}\right)$; $af(\alpha)$ est négatif; l'équation a deux racines distinctes et $\alpha = -1$ est compris entre les racines : $x' < -1 < x''$:

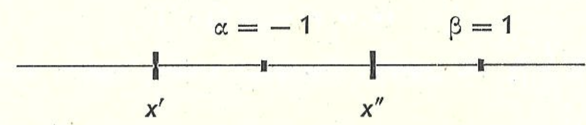


$af(\beta)$ est positif : β est extérieur à l'intervalle des racines; $\beta = 1$ est supérieur au nombre $\alpha = -1$ compris entre les racines, donc β est supérieur aux deux racines.

Finalement :

$$x' < (\alpha = -1) < x'' < (\beta = 1)$$

ou



Intervalle $\left(\frac{1}{2}\,;\frac{7}{5}\right)$. $af(\beta)$ est négatif : l'équation a deux racines distinctes et $\beta = 1$ est compris entre les racines : $x' < 1 < x''$.

$af(\alpha)$ est positif : $\alpha = -1$ est extérieur à l'intervalle des racines; $\alpha = -1$ est inférieur au nombre $\beta = 1$ compris entre les racines, donc α est inférieur aux deux racines :

$$-1 < x' < 1 < x''$$

Intervalle $\left(\frac{7}{5}; 2\right)$. Δ est positif : l'équation a deux racines distinctes.

$af(\alpha)$ et $af(\beta)$ étant positifs, α et β sont extérieurs à l'intervalle des racines.

On étudie le signe de $\frac{S}{2} - \beta$ pour comparer β à $\frac{S}{2}$:

$$\frac{S}{2} - \beta = \frac{m+4}{2m-1} - 1$$
$$= \frac{5-m}{2m-1}.$$

Le signe de $\frac{S}{2} - \beta$ est donné par le tableau suivant :

m	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		5		$+\infty$
signe de $\frac{S}{2} - \beta$		$-$	‖ 0 ‖	$+$	0	$-$	

Dans l'intervalle $\left(\frac{7}{5}; 2\right)$, $\frac{S}{2} - \beta$ est positif donc $1 < x' < x''$.

Le nombre $\alpha = -1$ se classe alors automatiquement (1) et :

$$-1 < 1 < x' < x''$$

Borne m $= -1$. Δ' est nul; l'équation a une racine double $x' = x'' = \frac{S}{2}$.
D'autre part, $f(\alpha) = f(-1) = 0$, donc -1 est racine. D'où le classement

$$(x' = x'' = -1) < 1$$

Borne m $= \frac{7}{5}$. Δ' est positif : l'équation a deux racines distinctes.

---

(1) Lorsque $\alpha < x' < x'' < \beta$, il est indispensable d'étudier le signe de $\frac{S}{2} - \alpha$ et le signe de $\frac{S}{2} - \beta$.

Pour le classement $\alpha < \beta < x' < x''$, seul le signe de $\frac{S}{2} - \beta$ suffit.

Pour le classement $x' < x'' < \alpha < \beta$, seul le signe de $\frac{S}{2} - \alpha$ suffit.

$f(\beta)$ est nul : $\beta = 1$ est l'une des racines. Pour $m = \frac{7}{5}$, $\frac{S}{2} - \beta$ est positif donc $\frac{S}{2} > \beta$ et par suite $(x' = 1) < x''$.

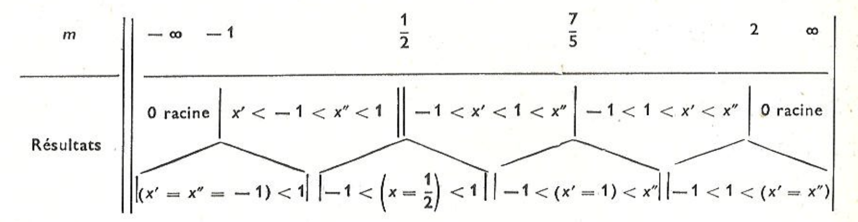
Le classement de $\alpha = -1$ est alors évident :

$$-1 < (x' = 1) < x''$$

Borne m $= 2$; Δ' est nul : l'équation a une racine double $x' = x'' = \frac{S}{2} = 2$.

D'où : $$-1 < 1 < (x' = x'' = 2)$$

La discussion est résumée dans le tableau suivant :



m	$-\infty$ … -1	-1	-1 … $\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$ … $\frac{7}{5}$	$\frac{7}{5}$	$\frac{7}{5}$ … 2	2	2 … ∞
Résultats	0 racine	$(x' = x'' = -1) < 1$	$x' < -1 < x'' < 1$	$-1 < \left(x = \frac{1}{2}\right) < 1$	$-1 < x' < 1 < x''$	$-1 < (x' = 1) < x''$	$-1 < 1 < x' < x''$	$-1 < 1 < (x' = x'')$	0 racine

788. Conditions de classement d'un nombre.

Soit une équation du second degré dans le corps R.
Trouver les relations auxquelles doivent satifaire les coefficients pour qu'un nombre et les racines, lorsqu'elles existent, soient dans un ordre donné.

Si $ax^2 + bx + c = 0$ est l'équation donnée admettant les racines x' et x'' $(x' < x'')$ et si α est le nombre donné, la solution du problème posé est donnée par le tableau suivant :

Classement imposé	Condition nécessaire et suffisante pour obtenir ce classement
$x' < \alpha < x''$	$af(\alpha) < 0$
$\alpha < x' < x''$	$\Delta > 0$ $af(\alpha) > 0$ $\frac{S}{2} > \alpha$
$x' < x'' < \alpha$	$\Delta > 0$ $af(\alpha) > 0$ $\frac{S}{2} < \alpha$

◇ *Exemple 1.*

Étant donné l'équation

$$(2\,m - 1)\,x^2 - (3\,m + 2)\,x + m + 3 = 0$$

trouver les valeurs du paramètre m *pour lesquelles l'équation a des racines comprenant le nombre* $\alpha = 2$.

La condition est :

$$af(\alpha) < 0$$

c'est-à-dire :

$$(2\,m - 1)\,(3\,m - 5) < 0.$$

Elle est vérifiée pour $\frac{1}{2} < m < \frac{5}{3}$.

◇ *Exemple 2.*

L'équation

$$(2\,m + 1)\,x^2 - 4\,x - 2\,m + 4 = 0$$

étant donnée, pour quelles valeurs de m *a-t-on le classement* $x' \leqslant x'' < 1$.

La condition imposée se traduit par le système :

$$\begin{cases} \Delta' \geqslant 0 \\ af(\alpha) > 0 \\ \dfrac{S}{2} < 1 \end{cases}$$

c'est-à-dire :

$$\begin{cases} m\,(2\,m - 3) > 0 \\ 2\,m + 1 > 0 \\ \dfrac{1 - 2\,m}{2\,m + 1} < 0 \end{cases}$$

Ce système d'inéquations simultanées admet comme solution les nombres de l'intervalle $\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$.

789. Conditions de classement de deux nombres.

Soit une équation du second degré.

Trouver les relations auxquelles doivent satisfaire les coefficients pour que deux nombres et les racines, lorsqu'elles existent, soient dans un ordre donné.

Si $ax^2 + bx + c = 0$ l'équation est donnée admettant les racines x' et x'' ($x' < x''$) et si α et β sont les nombres donnés ($\alpha < \beta$), la solution du problème posé est donnée par le tableau suivant :

Classement imposé	Condition nécessaire et suffisante pour obtenir ce classement		
$x' < \alpha < x'' < \beta$	$af(\alpha) < 0$		$af(\beta) > 0$
$\alpha < x' < \beta < x''$	$af(\alpha) > 0$		$af(\beta) < 0$
L'un quelconque des deux classements précédents	$f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0$		
$x' < \alpha < \beta < x''$	$af(\alpha) < 0$		$af(\beta) < 0$
$\alpha < x' < x'' < \beta$	$\Delta > 0$	$af(\alpha) > 0$ $\frac{S}{2} > \alpha$	$af(\beta) > 0$ $\frac{S}{2} < \beta$

◇ *Exemple 1.*

Déterminer m *pour que l'équation*

$$(2m - 1)x^2 - (m + 3)x + m - 2 = 0$$

ait une racine et une seule entre les nombres -1 et 1.

Le classement imposé est :

$$-1 < x' < 1 < x'' \quad \text{ou} \quad x' < -1 < x'' < 1$$

et la condition pour l'obtenir est :

$$f(-1) \cdot f(1) < 0$$

c'est-à-dire

$$m(m - 3) < 0.$$

Cette inéquation est vérifiée pour $0 < m < 3$.

◇ *Exemple 2.*

— *Choisir* m *pour que les racines de l'équation*

$$(m+1)x^2 - 2(m-2)x + m = 0$$

soient comprises toutes les deux entre — 2 *et* 1.

Le classement imposé est $-2 < x' < x'' < 1$. La condition pour l'obtenir se traduit par le système :

$$\begin{cases} \Delta' > 0 \\ af(\alpha) > 0 \\ \dfrac{S}{2} > \alpha \\ af(\beta) > 0 \\ \dfrac{S}{2} < \beta \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} 4 - 5m > 0 \\ (m+1)(9m-4) > 0 \\ \dfrac{m-2}{m+1} > -2 \\ m+1 > 0 \\ \dfrac{m-2}{m+1} < 1 \end{cases}$$

Ce système est vérifié pour $\frac{4}{9} < m < \frac{4}{5}$.

EXERCICES ET PROBLÈMES SUR LE LIVRE V.

Fonctions. Équations.

594. Étudier la fonction f :

f : $x \in N \longrightarrow 8 \wedge x \in N$

$\wedge$ désignant l'opération P.G.C.D.

595. Étudier la fonction f :

f : $x \in I \longrightarrow 8 \vee x \in N$

si $I = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8,\}$ et $\vee$ est le symbole de l'opération P.P.C.M.

596 Étudier la fonction :

$$f : \quad x \in I \longrightarrow f(x) = \text{Sup}(x-1; x^2-1) \in Z$$

avec $I = \{0; 1; ...; 10\}$

597. Étudier la fonction :

$$f : \quad x \in I \longrightarrow f(x) = \text{Inf}[2x^2+1] \in N$$

avec $I = \{1; 2; ...; 12\}$. Donner le graphe et la représentation graphique de f.

598. Résoudre dans $I = \{1; 2;...; 20\}$ l'équation

$$8 \vee x + 2 \wedge x = 10$$

599. Résoudre dans N, l'équation

$$\text{Sup}(x^2; x+1) = \text{Inf}(4x^2; 3x)$$

600. Soient les fonctions

$$f : \quad x \in Z/6 \longrightarrow f(x) = \dot{2} \cdot x^2 + \dot{3} \in Z/6$$

$$g : \quad x \in Z/6 \longrightarrow g(x) = x^3 - \dot{4} \in Z/6.$$

Étudier la fonction $f+g$.

601. On donne les fonctions f et g, ayant $A = \{0; 1; 2;...; 10\}$ comme ensemble de départ

$$f : \quad x \in A \longrightarrow f(x) = \text{Sup}(2x^2; 3x-1)$$

$$g : \quad x \in A \longrightarrow g(x) = x + 2 \wedge x$$

Étudier les fonctions $f+g$ et $f-g$.

602. Soient les fonctions

$$f : \quad x \in Z/5 \longrightarrow f(x) = x^2 + \dot{1} \in Z/6$$

$$g : \quad x \in Z/5 \longrightarrow g(x) = 2x^2 - \dot{4} \in Z/6$$

Étudier les fonctions $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$.

603. Étudier la fonction

$$f : \quad x \in Z/6 \longrightarrow f(x) = (x-\dot{2})(x-\dot{3}) \in Z/6$$

Résoudre l'équation :

$$(x-\dot{2})(x-\dot{3}) = \dot{0}.$$

604. Résoudre, dans le corps Z/5, l'équation

$$(\dot{2}x - \dot{1})(\dot{2}x - \dot{3}) = \dot{0}.$$

605. Résoudre, dans l'anneau Z/8, l'équation

$$x^3 - \dot{3}x + \dot{2} = \dot{0}$$

606. On donne les ensembles $I = \{1; 2; 3; 4; 5\}$ et $J = \{1; 2; 3; 4\}$.

1° Étudier la fonction f :

$$(x; y) \in I \times J \longrightarrow f(x; y) = \text{Sup}(x; y) \in N$$

2° Étudier la fonction g :

$$g : \quad (x; y) \in I \times J \longrightarrow g(x; y) = x \vee y \in N$$

3° Étudier les fonctions $f+g$, $f-g$ et $f \cdot g$. Quelle remarque peut-on faire au sujet de l'ensemble de définition de la fonction $f-g$?

607. Résoudre dans l'ensemble $E = I \times J$, $I = \{1; 2; 3; 4; 5\}$, $J = \{1; 2; 3\}$, l'équation

$$\text{Sup}\,(2\,x; y^2) + xy = m$$

m étant un paramètre appartenant à N. Discuter.

Fonctions polynomiales.

608. Soit le polynôme F à coefficients dans $K = Z/5$. Étudier la fonction polynomiale associée.

609. Étudier la fonction polynomiale

$$f: \quad x \in Z/8 \longrightarrow f(x) = x^2 - \dot{3}\,x + \dot{5}.$$

610. Résoudre, dans $Z/5$, les équations

a) $x^2 - \dot{4}\,x + \dot{3} = \dot{0}$

b) $\dot{3}\,x - \dot{4} = \dot{0}$

611. Résoudre, dans l'anneau $Z/6$, les équations

a) $\dot{3}\,x^2 - \dot{2}\,x - \dot{1} = \dot{0}$

b) $\dot{4}\,x^2 - x + \dot{3} = \dot{3}\,(x + \dot{1})$

612. Soit $K = Z/3$. Résoudre, dans K^2, l'équation

$$x^2 . y^2 - \dot{2}\,x - \dot{2}\,y = \dot{0}$$

613. Soit l'anneau $A = Z/5$. Résoudre, dans A^2, l'équation

$$x^2 + \dot{2}\,y^2 - x - \dot{2}\,y = \dot{1}$$

614. Résoudre, dans R, les équations suivantes :

$x^2 - x - 2 = 0$ $\qquad a^2 - 3\,x + \frac{9}{4} = 0.$

$-t^2 + 3\,t + 2 = 0$ $\qquad -2\,t^2 + t + 6 = 0.$

$2m^2 - 3\,m + 5 = 0$ $\qquad 3\,m^2 + 7\,m - 3 = 0.$

$3\,y^2 - 4\,y - 15 = 0$ $\qquad -3\,u^2 - u + 2 = 0.$

615. Résoudre dans le corps R :

$2\,u^2 - u - 1 = 0$ $\qquad 4\,z^2 + 36\,z + 81 = 0.$

$x^2 - 7\,Rx + 6\,R^2 = 0$ $\qquad x^2 - x - m\,(m + 1) = 0.$

$x^2 - Rx - 12\,R^2 = 0$ $\qquad x^2 - (m + 5)\,x + 5\,m = 0.$

616. Résoudre dans le corps des réels :

$x^2 - 4\,mx + 3\,m^2 = 0$ $\qquad mx^2 - (m + 1)\,x + 1 = 0.$

$x^2 + 7\,mx - 44\,m^2 = 0$ $\qquad (m^2 - 1)\,x^2 - 2\,mx + 1 = 0.$

$-4\,x^2 + 9\,\lambda\,x - 2\,\lambda^2 = 0$ $\qquad ax^2 + (a^2 - 1)\,x - a = 0.$

617. Calculez les puissances suivantes :

1° $\left(\frac{3}{4}\,x - \frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\,x\right)^2$ $\qquad \left(\frac{2}{5}\,a - \frac{1}{a}\right)^2 - \left(\frac{4}{5}\,a - \frac{5}{6}\right)^2.$

2° $(x - 1)^3$ $\qquad (x + 2)^3$ $\qquad (2\,x + 1)^3.$

3° $(1 - 3x)^3$ $\qquad (2 - 3x)^3$ $\qquad \left(x - \frac{1}{2}\right)^3.$

4° $(1 - 0{,}2\,a)^3$ $\qquad (3{,}5 - a)^3$ $\qquad \left(\frac{5}{2} - \frac{2}{5}\,x\right)^3.$

618. Calculer les puissances suivantes.

1° $(x+1)^4$ $(a+1)^5$ $(a+1)^6$.
2° $(2x-1)^4$ $(3t-2)^5$ $(4-t)^6$.
3° $\left(x-\frac{1}{2}\right)^4$ $(2t-1)^5$ $(x+1)^9$.

619. Effectuer les calculs suivants :

1° $(x^2+x+1)^2$ $(a^2-a-1)^2$.
2° $(x^2-x-2)^2$ $(4x^2-x+3)^2$
3° $(a^2+a-1)(a^2-a+1)$ $(x^2+3x-2)(x^2-3x+2)$.
4° $(a^3+a^2+a+1)(a^3-a^2+a-1)$.
5° $(x+1)(x^2-x+1)-(x-1)(x^2+x+1)$.

620. Effectuer les calculs suivants :

$(a+2)(a-2)(a^2-2a+4)(a^2+2a+4)$.
$(x+1)^3-(x-1)^3-(x^3-1)-(x-1)(x^2+x+1)$.
$(x+1)^4+(x^4+1)-2(x^2+x+1)^2$.
$[(x-1)^2-2(x+1)]^2-(3x-1)^2$.
$[(1+x)^3+2(1+x)^2+4(1+x)+8]-[3x(x+1)+4x+7]$.
$(8-a^6)(8+a^6)-(4-a^4)[2(2+a^2)+a^4][4-a^2(2-a^2)]$.

621. Factoriser, dans R, et éventuellement dans C :

1° $3x^2+10x+3$ $12x^2+7x-12$ $21x^2+19x-12$
2° $30x^2-43x+15$ $7x^2+50x+7$ $33x^2+118x-11$
3° x^4-2x^2+1 a^4-8a^2+16 a^5-18a^3+81a
4° $2x^3-12x^2+18x$ $x^4-x^3-6x^2$ u^4+2u^2-24
5° $4a^4-4a^2+3$ $7x^6-48x^3-7$ $33m^4-118m^2-11$.

622. Décomposer en facteurs les fonctions polynômes suivantes :

1° $8x^3+36x^2+22x+99$ $6+13x-13x^4-6x^3$
2° $27a^3+18a^2-3a-2$ $6-5x-25x^2+20x^3+4x^4$
3° $15x^4-2x^3-16x^2+2x+1$ $8a^4-16a^3-26a^2+4a+6$
4° $6x^4-17x^3+17x^2-7x+1$ $1+a-7a^2-a^3+6a^4$
5° $x^4+3x^5-16x-48$ $x^4+x^3-x^2-x$

623. Effectuer les produits.

$$(x+a)(x+b)(x+c)$$
$$(x+2a)(x+2b)(x+2c)$$

624. Effectuer le produit :

$$(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)$$

625. Quel est le coefficient de x^3 dans le produit :

$$(x+a_1)(x+a_2)(x+a_3)(x+a_4)(x+a_5)\ ?$$

626. Quel est le coefficient de x^2, de x^3 dans $(x+a)^5$?

627. Quel est le coefficient de x^2 dans

$$(1+3x)^9,\ (1-2x)^7,\ (x+2)^6,\ (x-5)^8\ ?$$

628. Calculer :

$$(1+x)^n+(1-x)^n$$
$$(1+x)^n-(1-x)^n$$

629. Calculer $(1{,}0015)^{10}$ avec 6 décimales.

630. Simplifier :

$$(a+b)^3 - 3b(a+b)^2 + 3b^2(a+b) - b^3.$$

631. Simplifier :

$$(x-1)^4 + 4(x-1)^3 + 6(x-1)^2 + 4(x-1) + 1.$$

632. Simplifier :

$$x^n(x-n)^n + C_n^1 x^{n-1}(x-1)^{n-1}(x+1) + \cdots + C_n^p x^{n-p}(x-1)^{n-p}(x+1)^p + \cdots + (x+1)^n.$$

633. Montrer que :

1° $C_n^0 + 2C_n^1 + 3C_n^2 \cdot x^2 + \cdots + (n+1)C_n^n x^n = (1+x)^n + nx(x+1)^{n-1}.)$

2° $C_n^0 + 2C_n^1 + 3C_n^2 + \cdots + (n+1)C_n^n = (n+2)\cdot 2^{n+1}.$

634. Etablir :

$$(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + \cdots + (C_n^n)^2 = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$$

$$C_n^0 \cdot C_n^1 + C_n^1 \cdot C_n^2 + \cdots + C_n^{n-1} \cdot C_n^n = \frac{(2n)!}{[(n-1)!]^2}.$$

635. Prouver que :

$$(1 + C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^n)^2 = 1 + C_{2n}^1 + C_{2n}^2 + \cdots + C_{2n}^{2n}.$$

636. Prouver que :

$$C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + \cdots + n \cdot C_n^n = n \cdot 2^{n-1}$$

$$C_n^1 - 2C_n^2 + 3C_n^3 + \cdots + (-1)^{n-1}, n \cdot C_n^n = 0.$$

637. Quelle est la valeur de :

$$C_n^0 - 2C_n^1 + 3 \cdot C_n^2 + \cdots + (-1)^n (n+1) C_n^n.$$

638. Résoudre l'équation :

$$x^3 - 6x^2 + 3x + 10 = 0,$$

sachant que les racines sont en progression arithmétique.

639. Résoudre l'équation :

$$2x^3 - 21x^2 + 42x - 16 = 0,$$

sachant que les racines sont en progression géométrique.

640. Résoudre l'équation :

$$x^3 - 11x^2 + 37x - 35 = 0$$

sachant que l'une des solutions est $3 + \sqrt{2}$.

641. Soit l'équation :

$$x^4 - 10x^3 + 26x^2 - 10x + 1 = 0.$$

Résoudre cette équation, sachant que $2 - \sqrt{3}$ est l'une des solutions.

642. Utiliser le changement d'inconnue $y = x + \frac{1}{x}$ pour résoudre l'équation

$$x^4 - 5x^3 - 12x^2 - 5x + 1 = 0.$$

643. Résoudre l'équation réciproque

$$x^4 - 2x^3 - 6x^2 - 2x + 1 = 0.$$

644. En utilisant le changement d'inconnue $y = x + a + b + c$, résoudre l'équation

$$(x + b + c)(x + c + a)(x + a + b) + abc = 0.$$

645. Calculer les racines carrées des nombres complexes suivants :

i	$3 + 4i$	$12i - 5$	$-6 + 8i$
$7 - 24i$	$2i\sqrt{2} - 1$	$1 - 2i\sqrt{6}$	$15 - 10i$

646. Résoudre, dans C, les équations suivantes :
1° $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$
2° $x^4 + 6x^2 + 25 = 0$
3° $16x^4 + 24x^2 + 25 = 0$.

647. Résoudre, dans C :
1° $3x^4 - 4x^3 + 4x - 3 = 0$
2° $x^4 + 10x^2 + 169 = 0$
3° $4x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 4x + 4 = 0$.

648. Résoudre les équations suivantes :
1° $x^2 + (3 - 2i)x - 6i = 0$
2° $(1 + i)x^2 - 4x + 4 = 0$
3° $x^2 - (6 + i)x + 7 + 9i = 0$.

649. On donne les fonctions :

$f: \quad x \longrightarrow f(x) = 1 - C_n^2 x^2 + C_n^4 x^4 + \dots + (-1)^p C_n^{2p} x^{2p} + \dots$

$g: \quad x \longrightarrow g(x) = C_n^1 x - C_n^3 x^3 + \dots + (-1)^p . C_n^{2p+1} x^{2p+1} + \dots$

Calculer $[f(x)]^2 + [g(x)]^2$ en utilisant les fonctions $f + ig$ et $f - ig$.

Applications linéaires.

Résoudre les systèmes suivants :

650. $$\begin{cases} \dfrac{x-1}{2} + \dfrac{1-x}{5} - \dfrac{\frac{y}{2} - 1}{4} = \dfrac{\frac{5}{2}x - 1}{10} \\ \dfrac{1-x}{6} - \dfrac{2x - \frac{3}{2}y}{10} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{3x}{8}. \end{cases}$$

651. $$\begin{cases} \dfrac{x+2y}{2} - \dfrac{x-2y}{3} = 8 \\ \dfrac{x+2y}{3} = 11 - \dfrac{x-2y}{4}. \end{cases}$$

652. $$\begin{cases} 3x - 4y + 2z = 7 \\ -2x + y + 3z = 6 \\ 4x - 3y + 5z = 7. \end{cases}$$

653. $$\begin{cases} x - 4y + 3z = -2 \\ x + 3y + 2z = -13 \\ x - 9y - 5z = 2. \end{cases}$$

Résoudre et discuter les systèmes suivants.

654. $$\begin{cases} 2(m-2)x + 3my = m - 3 \\ (2m+1)x + (3m-1)y = m. \end{cases}$$

655. $\begin{cases} (m+1)x-(m-1)y=(m+1)(m-1)^2 \\ (m-1)x-(m+1)y=(m-1)(m+1)^2. \end{cases}$

656. $\begin{cases} x-y+(m-1)z=0 \\ x-(m-1)y+z=0 \\ x+my+z=0. \end{cases}$

657. $\begin{cases} (m+1)x+y+z=m+1 \\ x+(m+1)y+z=m+3 \\ x+y+(m+1)z+2m+4=0. \end{cases}$

658. $\begin{cases} x+\lambda y+y=2\lambda \\ x+y+\lambda z=0 \\ (\lambda+1)x+\lambda y+z=\lambda. \end{cases}$

659. $\begin{cases} 9x+my-z=4 \\ 4mx-2y+(m-1)z=m \\ 5x+(2m-1)y-3z=3(m+2). \end{cases}$

660. $\begin{cases} x+y+\lambda z=1 \\ x+\lambda y+z=\lambda \\ x-y+z=3. \end{cases}$

661. $\begin{cases} 3z-4y=1 \\ 4x-2z=2 \\ 2y-3x=3-\lambda. \end{cases}$

662. $\begin{cases} mx+y+z=m \\ mx+my+z=1 \\ x+my+mz=1 \\ x+y+mz=m. \end{cases}$

On suppose que a et b sont les coordonnées d'un point M $(a; b)$ du plan. Discuter selon la position de M dans le plan les systèmes suivants :

663. $\begin{cases} x=b \\ ax+3by=ab+3b \\ ax-3by=ab \end{cases}$

664. $\begin{cases} ax+by+z=1 \\ x+aby+z=b \\ x+by+az=1. \end{cases}$

665. $\begin{cases} x+y+z=a+b \\ x-y=2b \\ 2(a-b)x-(a+b)y+(a+b)z=0. \end{cases}$

666. Résoudre le système :

$$\begin{cases} x+2y+3z=0 \\ 2x+3y+4z=0 \\ 3x+4y+5z=0. \end{cases}$$

Déterminer le paramètre pour que les formes linéaires suivantes soient linéairement dépendantes :

667. $\begin{cases} A=(4-m)x-(m+1)y \\ B=6x-(3m+1)y. \end{cases}$

668. $\begin{cases} A=(3m+2)x-my \\ B=(m-4)x+(1-m)y \end{cases}$

669. $\begin{cases} A = mx + 5y + 4z \\ B = 5x + my + 3z \\ C = x + y + z. \end{cases}$

670. Étudier la dépendance des formes linéaires suivantes :

$$\begin{array}{ll} f & (x; y; z) \in R^3 \longrightarrow f(x; y; z) = x + y + z \in R \\ g & (x; y; z) \in R^3 \longrightarrow g(x; y; z) = x - y + z \in R \\ h & (x; y; z) \in R^3 \longrightarrow h(x; y; z) = 4x + 2y + z \in R \end{array}$$

671. Une application linéaire a pour matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Donner les coordonnées $(x'; y'; z')$ de l'image du vecteur $(x; y; z)$.

672. Une application linéaire est définie par les formules

$$x' = 3x - y$$
$$y' = 5x - 2y$$

Quelle est l'image du vecteur A (2; 1); du vecteur B (− 1; − 3)?
Quelle est la matrice de cette application?

673. Soit une application linéaire u définie par les formules

$$u : \begin{cases} x' = -\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}y \\ y' = 3x + y. \end{cases}$$

Quelle est l'image de la base canonique $\mathcal{B}_0 = (i; j)$ avec $i(1; 0)$ et $j(0; 1)$?
Quelle est la matrice A de u? Calculer Det (u).

674. Une application linéaire u a pour matrice

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Donner les coordonnées du vecteur u (V) si V a pour coordonnées $(x; y; z)$. Calculer Det U.

675. Une application linéaire a pour formules :

$$\begin{cases} x' = x + y + 2z \\ y' = 3x - 3y + 2z \\ z' = x + y + 6z \end{cases}$$

Quelle est la matrice de cette application?
Quelle est l'image de la base canonique $\mathcal{B}_o = (i; j; k)$?

676. Résoudre le système :

$$\begin{cases} (2 - i)x + (3 + 2i)y = 8 + 3i \\ (3 - i)x + (3 + 5i)y = 9(1 + i). \end{cases}$$

677. Résoudre le système :

$$\begin{cases} (2i - 5)x + (1 + i)y = -5 - 3i \\ (3 - i)x +)1 - i)y = 4. \end{cases}$$

678. On considère l'endomorphisme de R^3 défini par les formules :

$$\begin{cases} X = mx + y + z \\ Y = x + my + z \\ Z = x + y + mz. \end{cases}$$

Pour quelles valeurs de m cet endomorphisme est-il régulier?

679. On donne l'endomorphisme de R^3 :

$$T_m \begin{cases} x' = 9x + my - z \\ y' = 4mx - 2y + (m-1)z \\ z' = 5x + (2m-1)y - 3z. \end{cases}$$

Quelle est la matrice de T_m ?
Pour quelles valeurs de m, T_m est-il régulier ?

Fonctions numériques E et M.

Effectuer les calculs suivants :

680. $\bar{1},87\,992 + 0,62857 + \bar{2},89136$

681. $\bar{1},44\,497 + 0,56286 + \bar{2},93002$

682. $0,28\,856 + \bar{1},49794 + \bar{1},50582$

683. $3 \times (\bar{1},45\,083) + 2.(\bar{3},67403)$

684. $2 \times (\bar{2},03\,463) + 3.(\bar{1},93637)$

685. $\dfrac{0,47\,712}{2} + \dfrac{0,93\,633}{3}$.

686. $\dfrac{\bar{1},46\,388}{2} + \dfrac{3,47\,804}{4}$.

687. $\dfrac{\bar{3},84\,735}{5} + \dfrac{\bar{4},57\,735}{7}$.

688. $\dfrac{2}{5}(\bar{3},40\,305) + \dfrac{1}{3}(\bar{4},49\,732)$.

689. Étudier la fonction : E — M.

690. Étudier la fonction :

f : $x \in R \longrightarrow f(x) = E(x-1) + M(x)$

691. Étudier la fonction f :

f : $x \in R \longrightarrow f(x) = E(x) + M(x^2)$.

692. Étudier la fonction f :

f : $x \in R \longrightarrow f(x) = \text{Sup}\,[E(x^2); E(x+1)]$

693. On donne :

$a = \bar{1},95\,491$; $b = 0,69\,621$; $c = \bar{1},72\,354$

Donner les formes normalisées de $-a$, $-b$, $-c$.

694. Soient :

$a = \bar{1},60\,957$; $b = \bar{1},20\,567$; $c = 2,63\,144$

1° Calculer $a - b - c$.

2° Donner les formes normalisées de $-b$ et $-c$. Comment peut-on alors calculer à nouveau $a - b - c$?

695. Soient :

$$a = \bar{2},53\,453; \qquad b = 2,06\,400; \qquad c = \bar{2},06\,020.$$

Calculer $-b$ et $-c$; puis calculer $a - b - c$.

696. On donne :

$$a = \bar{1},47\,203; \qquad b = 2,09\,200; \qquad c = \bar{3},40\,680.$$

Calculer $2a$, $-3b - 2c$, sans faire de soustractions.

697. On donne les nombres :

$$a = \bar{2},98\,928; \qquad b = \bar{1},98\,553; \qquad c = 0,11\,882; \qquad d = 0,31\,934.$$

Calculer, sans faire de soustractions :

$$A = \frac{2}{3}a - \frac{b}{4} - \frac{1}{2}c + \frac{3}{4}d.$$

Courbes.

Étudier les courbes planes paramétrées suivantes, dans le plan réel R^2, et donner les représentations graphiques.

698. $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + t. \end{cases}$ 699. $\begin{cases} x = t - \dfrac{2}{3} \\ y = \dfrac{1}{3}t + 1. \end{cases}$

700. $\begin{cases} x = t + 1 \\ y = t^2. \end{cases}$ 701. $\begin{cases} x = t + 1 \\ y = t^2 - 1. \end{cases}$

702. $\begin{cases} x = t^2 \\ y = t - 1. \end{cases}$ 703. $\begin{cases} x = t^2 - 1 \\ y = t^2 + 1. \end{cases}$

704. $\begin{cases} x = t \\ x = \dfrac{1}{t + 1}. \end{cases}$ 705. $\begin{cases} x = t - 1 \\ y = \dfrac{t - 1}{t + 1}. \end{cases}$

Étudier les courbes suivantes paramétrées dans le plan K^2, $K = Z/5$.

706. $\begin{cases} x = t + \dot{1} \\ x = t + \dot{2}. \end{cases}$ 707. $\begin{cases} x = t - \dot{1} \\ y = \dot{2}t^2 + \dot{1}. \end{cases}$

708. $\begin{cases} x = \dot{2}t - \dot{4} \\ y = \dot{2}t^3 - \dot{3}. \end{cases}$ 709. $\begin{cases} x = \dfrac{t + \dot{1}}{t - \dot{1}} \\ y = \dfrac{t^2}{t - \dot{1}}. \end{cases}$

710. $\begin{cases} x = \dfrac{t^2 + \dot{1}}{t} \\ y = \dfrac{t - \dot{1}}{t}. \end{cases}$ 711. $\begin{cases} x = \dfrac{t^2 - \dot{2}}{(t - \dot{1})(t - \dot{2})} \\ y = \dfrac{\dot{t} - 3}{(t - \dot{1})(t - \dot{2})}. \end{cases}$

Dans le plan R^2, étudier les courbes ayant pour équations paramétriques :

712. $\begin{cases} x = E(t) \\ y = t \end{cases}$ 713. $\begin{cases} x = t^2 - 1 \\ y = E(t - 1). \end{cases}$

714. $\begin{cases} x = \text{Sup}\,[t^2; t+2] \\ y = \text{Inf}\,[t^2; t+2] \end{cases}$ 715. $\begin{cases} x = \text{M}(t+1) \\ y = \text{Sup}\,[t^2; t+2]. \end{cases}$

716. $\begin{cases} x = \text{M}(t+1) \\ y = \text{E}(t-1). \end{cases}$ 717. $\begin{cases} x = t+1 \\ y = \text{Sup}\,[2t-1; t+1]. \end{cases}$

Dans le plan K^2, avec $K = Z/5$, étudier les courbes ayant pour équations explicites :

718. $y = x^2 - \dot{2}\,x$. 719. $y = x^3 - x$.

720. $y = \dfrac{x - \dot{1}}{x + \dot{1}}$. 721. $y = \dfrac{x^2}{x^2 - \dot{1}}$.

722. $y = \dfrac{x^2 + \dot{2}}{x^2 - \dot{4}}$. 723. $y = \dfrac{x^3}{x^3 - \dot{1}}$.

Dans le plan R^2, étudier les courbes ayant pour équations explicites :

724. $y = \text{E}(x+1) + \text{M}(x)$. 725. $y = x - \text{E}(x)$.

726. $y = x + \text{M}(x)$. 727. $y = x - \text{M}(x)$.

728. $y = |x+1| + x$. 729. $y = |x-1| \times x$.

730. $y = |x-1| + |x+1| + |x|$. 731. $y = \text{E}(x^2)$.

732. $x = x + \text{M}(x) + |\text{E}(x)|$. 733. $y = \text{Sup}\,[1-x; x+1]$.

734. $y = x + \text{Inf}\,[1-x; x+1]$. 735. $y = x + \text{E}(x) - \text{M}(x) + |x-1|$.

736. $y = \text{E}(x) \times \text{M}(x)$. 737. $y = |x \cdot \text{E}(x)| \times \text{M}(x)$.

738. $x + y = \dot{1}$.

Dans le plan K^2, $K = Z/5$, étudier les courbes suivantes, données par leurs équations implicites :

739. $\dot{2}x - y + \dot{3} = \dot{0}$. 740. $\dot{2}x - \dot{3}y - \dot{2} = \dot{0}$.

741. $x^2 + y^2 = \dot{1}$. 742. $x^2 - y^2 = \dot{2}$.

743. $x^2 - \dot{4}y^2 = \dot{0}$.

Dans le plan R^2, étudier les courbes suivantes, données par leurs équations implicites :

744. $x + y - 1 = 0$. 745. $2x - y + 3 = 0$.

746. $x^2 + y^2 = 4$. 747. $x^2 + y^2 - 6x - 4y - 3 = 0$.

748. $x^2 y^2 - x = 0$. 749. $x^2 + y^2 + 14x + 10y + 70 = 0$.

750. $\text{E}(y + x) = 1$. 751. $\text{E}(x^2 + y^2 - 1) = 0$.

752. $x + \text{E}(y - x) = 1$. 753. $x^2 + y^2 - \text{E}(y - x) = 1$.

754. $\text{M}(y - x) = 0$. 755. $\text{M}(y - x) = \dfrac{1}{2}$.

756. $x + M(y - x) = 0$. 757. $E[(y - x)^2] = 1$.

758. $[M(y - x)]^2 = \frac{1}{4}$.

Résoudre graphiquement les systèmes suivants :

759. $\begin{cases} x - 2y = 6 \\ 2x + y = 7. \end{cases}$

760. $\begin{cases} x - 3y + 6 = 0 \\ 3x - 2y - 3 = 0. \end{cases}$

761. $\begin{cases} 3x + y - 3 = 0 \\ x + 2y + 6 = 0. \end{cases}$

762. $\begin{cases} 3x - y - 3 = 0 \\ x - 2y - 6 = 0. \end{cases}$

763. $\begin{cases} y = x^2 \\ y = 3x - 2. \end{cases}$

764 $\begin{cases} y = x^2 \\ y = x + 6. \end{cases}$

765. $\begin{cases} xy = 1 \\ y - 2x + 1 = 0. \end{cases}$

766. $\begin{cases} xy + 1 = 0 \\ y = x - 2. \end{cases}$

Calculer les coordonnées des points d'intersection des courbes suivantes :

767. $\begin{cases} 2y - x^2 = 0 & (P) \\ 3x - 2y - 2 = 0 & (D). \end{cases}$

768. $\begin{cases} y = \dfrac{x^2}{4} \\ y = 2x - 3. \end{cases}$

769. $\begin{cases} y = 2x^2 \\ y = 3x - 1. \end{cases}$

770. $\begin{cases} xy = 2 \\ y = 3 - x. \end{cases}$

771. $\begin{cases} xy + 2 = 0 \\ 6x - y + 7 = 0. \end{cases}$

Division des fonctions.

On donne une fonction $x \in R \longrightarrow f(x) \in R$; indiquer l'ensemble de définition; simplifier $f(x)$; prolonger la fonction f :

772. $f(x) = \dfrac{12x^2 - 12}{42x^2 - 42}$, $f(x) = \dfrac{12x^2 - 27}{6x + 9}$.

773. $f(x) = \dfrac{10 - 7x + 10x^2 - 7x^3}{1 - 2x + x^2 - 2x^3}$ $f(x) = \dfrac{x^3 + x^2 - 4x - 4}{x^4 - 16}$.

774. $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 2}{2x^2 - 3x + 1}$, $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 5x + 6}$.

775. $f(x) = \dfrac{2x^2 - 3x - 5}{x^2 - 3x + 4}$, $f(x) = \dfrac{27x^2 - 50x - 8}{5x^2 - 11x + 2}$.

On donne une fonction $(x; y) \in R^2 \longrightarrow f(x; y) \in R$; indiquer l'ensemble de définition; simplifier $f(x; y)$; prolonger la fonction f :

776. $f(x; y) = \dfrac{4x^2 + 3xy - y^2}{5x^2 + 4xy - y^2}$, $f(x; y) = \dfrac{9x^2 - 16y^2}{12x^2 - 25xy + 12y^2}$.

777. $f(x; y) = \dfrac{4x^2 - 5xy + y^2}{x^2 - y^2}$, $f(x; y) = \dfrac{6x^2 - 13xy + 6y^2}{4x^2 - 9y^2}$.

On donne une fonction $x \in \mathrm{R} \longrightarrow f(x) \in \mathrm{R}$; indiquer l'ensemble de définition; effectuer $f(x)$ et simplifier; éventuellement prolonger f.

778. $f(x) = \frac{3}{2} + \frac{2x+1}{2x+2} - \frac{2x-2}{2x-1}$.

779. $f(x) = \frac{1}{2x} + \frac{1}{2x-1} + \frac{1}{2x+1} - \frac{2x}{4x^2-1} - \frac{1}{2x(4x^2-1)}$.

780. $f(x) = \frac{x+4}{x-4} - \frac{x-4}{x+4} - \frac{64}{x^2-16}$.

781. $f(x) = \frac{x^4 - x^2 - 5x^3 + 5x}{(x-1)^2(x-5)} - \frac{x^3-x}{x^2+2x+1} - \frac{4x-4}{x^3-x-x^2+1}$.

782. $f(x) = \dfrac{\left(x - x^2 - \dfrac{x^2-1}{1+x} - 1\right)\left(1 - \dfrac{1}{x}\right)(x+1)}{\left(\dfrac{1}{x}+1\right)(1-x)}$.

783. $f(x) = \dfrac{\left(x + \dfrac{1}{x} - \dfrac{(x-1)^2}{x} + 2\right)(x+1)}{4x \cdot \left(\dfrac{1}{x} - 1\right)\left(\dfrac{1}{x}+1\right)}$.

784. Calculer :

1° $\left(\dfrac{x+2y}{x+y} + \dfrac{x}{y}\right) : \left(\dfrac{x+2y}{y} - \dfrac{x}{x+y}\right)$.

2° $\dfrac{\left(a - \dfrac{a^2+ab}{a-b}\right)\left(a - \dfrac{2a^2+ab}{a+b}\right)}{ab + \dfrac{ab^2}{a^2-b^2}}$.

785. Calculer :

$$\left(\frac{x}{x-a} - \frac{x}{x+a}\right) : \frac{\dfrac{x+a}{x-a} - \dfrac{x-a}{x+a}}{\dfrac{x+a}{x-a} + \dfrac{x-a}{x+a}}.$$

786. Calculer :

$$\frac{a - \dfrac{b-a}{b}}{-b - \dfrac{a-b}{a}} : \frac{1 + \dfrac{b-a-(x+a)}{x+a}}{1 - \dfrac{a-b+(x-b)}{x-b}}.$$

787. Simplifier :

$$A = \frac{a^3 - b^3}{a^2 - b^2 + \dfrac{2b^2}{1 + \dfrac{a+b}{a-b}}} \qquad B = \frac{1}{x = \dfrac{1}{1 + \dfrac{x+1}{3-x}}}.$$

788. Simplifier :

$$\frac{1}{x + \dfrac{2}{1 + \dfrac{x+2}{6-x}}} : \frac{1}{x + \dfrac{1}{1 + \dfrac{x+1}{3-x}}}.$$

789. Démontrer que si :

$$\frac{a}{a'} + \frac{b'}{b} = 1 \quad \text{et :} \quad \frac{b}{b'} + \frac{c'}{c} = 1$$

on a aussi :

$$abc + a'b'c' = 0.$$

790. Simplifier l'expression :

$$\frac{bc}{(a+b)(a+c)} + \frac{ca}{(b+c)(b+a)} + \frac{ab}{(c+a)(c+b)} + \frac{2abc}{(b+c)(c+a)(a+b)}.$$

791. Si $2p = a + b + c$, démontrer l'identité :

$$(p-a)^2 + (p-b)^2 + (p-c)^2 + p^2 = a^2 + b^2 + c^2.$$

792. Si $2p = a + b + c$, calculer :

$$2(p-a)(p-b)(p-c) + a(p-b)(p-c) + b(p-a)(p-c) + c(p-a)(p-b)$$

793. Mettre sous forme canonique les fonctions homographiques suivantes :

$$y = \frac{x-1}{x+2} \qquad y = \frac{2x-1}{x-3} \qquad y = \frac{2-x}{x} \qquad y = \frac{2-5x}{2x-5}.$$

794. Déterminer les formes canoniques des fonctions suivantes :

$$y = \frac{1-2x}{1+2x} \qquad y = \frac{x+1}{x-m} \qquad y = \frac{1-x}{2x-3} \qquad y = \frac{x-2}{2x+3}.$$

795. Soit la relation homographique :

$$2xy - y - 3x = 0.$$

1° Déterminer les valeurs focales.
2° Mettre la relation sous forme canonique.

796. Soit la relation homographique :

$$xy - x + 3y + 1 = 0.$$

1° Déterminer les valeurs focales.
2° Mettre la relation sous forme canonique.
3° Expliciter y en fonction de x, et mettre la fonction y sous forme canonique.

797. On donne la relation :

$$xy - 2x - 3y + 9 = 0.$$

1° Forme canonique de cette relation.
2° Peut-on avoir $x = y$?

798. On donne la relation :

$$\frac{1}{y} - \frac{1}{x-1} = k.$$

1° Montrer que cette relation est homographique. Quelle est sa forme canonique?
2° Déterminer les valeurs focales.
3° Peut-on avoir $x = y$.

799. On donne les relations :

$$xy - x + y + 1 = 0$$

et :

$$yz + 2y + z - 2 = 0.$$

Montrer que x et z sont liés par une relation homographique que l'on déterminera.

Résoudre les équations suivantes :

800. $\frac{3-x}{3+x} - \frac{2-x}{2+x} - \frac{1-x}{1+x} = 1.$

801. $\frac{2}{2-x} - \frac{1}{1+x} + \frac{3x}{x^2-x-2} = 0.$

802. $\frac{15}{3x-2} - \frac{4}{3(x-1)} = \frac{5(3x-1)}{(3x-3)(3x-2)}.$

803. $\frac{x+2a}{2b-x} + \frac{x-2a}{2b+x} - \frac{4ab}{4b^2-x^2} = 0.$

804. $\frac{m}{3x-1} = \frac{m}{x-1}.$

805. $\frac{2x+1}{2x-1} = \frac{m-1}{m+1}.$

806. $\frac{2x-3m}{2m+3x} = \frac{4}{3} \cdot \frac{x-1}{2x-3}.$

807. $\frac{m+2x+1}{m+2x-1} = \frac{x+m}{x-m}.$

808. $\frac{2m-2x-1}{2m+2x+1} = \frac{3m+2x+1}{3m-2x-1}.$

809. $1 + \frac{m}{2x+m} = \frac{5m-2x}{m-2x}.$

810. $\frac{m+x}{2m-x} = \frac{x-m}{1-x}.$

811. a et b étant des paramètres, non nuls, résoudre et discuter :

1° $\frac{a}{b-x} = \frac{b}{a-x}.$

2° $\frac{2x-a}{2} = \frac{(2x-b)^2}{4x-a}.$

812. Résoudre et discuter l'équation suivante :

$$\frac{m}{mx+1} + \frac{1}{mx-1} = \frac{1}{1-m^2x^2}.$$

813. Résoudre l'équation :

$$\frac{x}{x+m} - \frac{m}{x-m} = \frac{x^2-5m^2}{x^2-m^2}.$$

814. Résoudre :

$$\frac{5x - 5m}{x^2 - 4m^2} - \frac{2x - 3m}{x^2 - 2mx} = \frac{3x - 2m}{x^2 + 2mx}.$$

815. Résoudre l'équation :

$$\frac{4m + 5x}{x^2 - 4m^2} + \frac{2m - 3x}{x^2 - 2mx} - \frac{2m + 3x}{x^2 + 2mx} - \frac{1}{x} = 0.$$

M $(a; b)$ étant un point du plan R^2, résoudre et discuter suivant la position de M les équations suivantes.

816. $\dfrac{x + a}{b(x - a)} - \dfrac{1}{b} = \dfrac{ax + b^2 + 4a^2}{b(x^2 - a^2)} - \dfrac{b}{ax + a^2}.$

817. $\dfrac{a - b + x}{a - b - x} = \dfrac{x - b}{a - x}.$

818. $\dfrac{a + b - x}{b + x} = \dfrac{2a - 2x}{2x - a + 2b}.$

819. $\dfrac{a + x}{b(b - 3x)} - \dfrac{b - x}{ab + 3ax} + \dfrac{3x^2 - 3bx - ab}{ab^2 - 9ax^2} = \dfrac{3x^2 + 3ax + ab}{b^3 - 9bx^2}.$

820. En utilisant les propriétés des suites de rapports égaux, résoudre les systèmes :

1° $\begin{cases} \dfrac{x}{14} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z}{4} \\ x + y + z = 5 \end{cases}$ 2° $\begin{cases} \dfrac{2x}{3} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z}{6} \\ 2x - y + 3z = 95. \end{cases}$

821. Résoudre les systèmes :

1° $\begin{cases} \dfrac{4x}{7} + \dfrac{-y}{2} = \dfrac{3z}{5} \\ 8x + y - 6z = 42 \end{cases}$ 2° $\begin{cases} \dfrac{x - y}{3} = \dfrac{5x - z}{2} = \dfrac{4y - z}{12} \\ 7x + 6y - 3z + 144 = 0. \end{cases}$

822. Résoudre les systèmes suivants :

1° $\begin{cases} x + y + z + t = 10 \\ \dfrac{1}{4x} = \dfrac{1}{2y} = \dfrac{3}{4z} = \dfrac{1}{t} \end{cases}$ 2° $\begin{cases} \dfrac{x}{3} = \dfrac{y}{5} = \dfrac{z}{8} \\ 7x + 3y - 5z = 7. \end{cases}$

823. On donne :

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = 4.$$

Calculer :

$$\frac{a - 3b + 2c}{a' - 3b' + 2c'} \quad \text{et} \quad \frac{a + b + c}{a' + b' + c'}.$$

824. Démontrer l'équivalence :

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \iff \frac{a + b}{a - b} = \frac{c + d}{c - d}.$$

825. Résoudre le système :

$$\begin{cases} \dfrac{x}{2} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z}{4} \\ x^2 + y^2 + z^2 = 29. \end{cases}$$

826. Résoudre le système :

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{5} \qquad xy + yz + zy = 31.$$

Fonctions irrationnelles.

Rendre rationnel le dénumérateur des fractions suivantes :

827. $\frac{1}{\sqrt{3}} \quad \frac{2}{\sqrt{6}} \quad \frac{3}{\sqrt{6}} \quad \frac{2}{3\sqrt{12}} \quad \frac{2}{\sqrt{2}} \quad \frac{15}{\sqrt{80}}.$

828. $\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} \quad \frac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} \quad \frac{3}{\sqrt{7}+2} \quad \frac{5}{\sqrt{7}+\sqrt{2}}.$

829. $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{3\sqrt{5}+\sqrt{2}} \quad \frac{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}}{\sqrt{3}-2\sqrt{2}} \quad \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} \quad \frac{\sqrt{7}+1}{\sqrt{28}-1}.$

Rendre rationnel le numérateur des fractions suivantes :

830. $\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{5}}{\sqrt{10}-1} \quad \frac{3\sqrt{5}+\sqrt{2}}{2\sqrt{5}-\sqrt{2}} \quad \frac{\sqrt{5}-\sqrt{7}}{2\sqrt{5}-\sqrt{7}}.$

831. $\frac{\sqrt{15}-2\sqrt{3}}{\sqrt{5}-2} \quad \frac{\sqrt{18}+\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} \quad \frac{\sqrt{75}+\sqrt{6}}{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}.$

832. Calculer à 0,001 près le nombre :

$$N = \sqrt{\frac{3-\sqrt{8}}{3+2\sqrt{2}}}.$$

833. Démontrer l'identité :

$$\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}.$$

834. Montrer que $7 + 4\sqrt{3}$ et $4 + 2\sqrt{3}$ sont les carrés de deux binômes en $\sqrt{3}$.

835. Montrer que $8 + 4\sqrt{3}$ et $3 - 2\sqrt{2}$ sont des carrés.

836. Prouver que $2 + \sqrt{3}$ et $28 - 5\sqrt{12}$ sont des carrés.

837. Calculer la somme :

$$S = \frac{4x-6y}{x+y} + \frac{4\sqrt{x}-6\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} - \frac{6x-4y}{x-y} + \frac{4\sqrt{x}+6\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} + \frac{12xy}{x^2-y^2}.$$

838. Calculer la somme :

$$S = \frac{a+\sqrt{ax}}{a\sqrt{x}-x\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{a}-\sqrt{x}}{(\sqrt{a}+\sqrt{x})\sqrt{x}} - \frac{2\sqrt{x}}{a-x} + \frac{3}{\sqrt{a}+\sqrt{x}}.$$

839. Calculer la valeur de la fonction :

$$y = x^3 - x^2 + 3x - 5$$

pour $x = \sqrt{2}$ et $x = -\sqrt{2}$.

840. On donne la fonction :

$$f(x) = 2x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 1$$

Calculer :

$$f(\sqrt{5}); \quad f(-\sqrt{5}); \quad f(\sqrt{2}+1); \quad f(1-\sqrt{2}).$$

841. Soit la fonction :

$$y = \frac{2x^2 - 3x + 1}{x^2 - x - 1}.$$

Calculer sa valeur pour : $x = \sqrt{2}$, $x = -\sqrt{2}$; $x = \sqrt{7}$; $x = -\sqrt{7}$.

842. On donne la fonction :

$$f(x) = \frac{x^2 - x + 2}{x^2 + x - 2}.$$

Calculer : $f(\sqrt{2}+1)$ et $f(1-\sqrt{2})$.

843. Soit la fonction :

$$f(x) = \frac{2x - 1}{3x + 2}.$$

1° Mettre cette fonction homographique sous forme canonique.

2° Calculer $f\left(\sqrt{2} - \frac{2}{3}\right)$ et $f\left(\frac{2}{3} + \sqrt{2}\right)$.

Résoudre les équations suivantes dans R.

844. $\sqrt{x^2 - 1} = \sqrt{3 - x^2}$ $\quad x - 1 + \sqrt{x} = 1.$

845. $\sqrt{x^2 + 1} = 2x - 1$ $\quad 5 + \sqrt{5x - 1} = x.$

846. $\sqrt{x^2 - 3} + 5 = x$ $\quad 2\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{3} = 0.$

847. $\sqrt{2x + 1} = 7 - x$ $\quad \sqrt{10 - x^2} = 2x - 1.$

848. $\sqrt{x^2 - x + 1} = x - 2$ $\quad \sqrt{x^2 + x + 13} = 2x + 3.$

849. $2x - 3 = \sqrt{12 - 11x}$ $\quad 7 - \sqrt{x - 5} = x.$

850. $2(x - 3) - \sqrt{x + 2} = 0$ $\quad 3(x - 2) + \sqrt{4(x - 1) + 1} = 0.$

851. $7 - \sqrt{x + 4} - 2x = 0$ $\quad \sqrt{7x + 1} + 7x = 5.$

852. $7 + \sqrt{3x^2 + x - 5} = 2x$ $\quad x + \sqrt{\frac{8x^2}{9} - 3x - 20} = 4.$

853. $\frac{5x}{2} - \sqrt{(3x - 2)(2x - 11)} = 11$ $\quad 8x + \sqrt{(10x - 9)(6x + 1)} = 36.$

854. $14 - 6x = \sqrt{27x^2 - 33x - 4}$ $\quad 8x - \sqrt{60x^2 - 2x - 11} = 1.$

855. $\sqrt{13x - 1} - \sqrt{2x - 1} = 5$ $\quad \sqrt{3x + 1} - 3 = \sqrt{2x - 1}.$

856. $\sqrt{2x + 9} - \sqrt{x + 4} = \sqrt{x + 1}$ $\quad \sqrt{9x + 1} - 1 = \sqrt{6x - 1}.$

857. $\sqrt{2x + 8} + \sqrt{x + 5} = 7$ $\quad \sqrt{3x - 2} - 3 = \sqrt{3x - 4}.$

858. $1 + \sqrt{x-3} = \dfrac{3(x+4)}{4\sqrt{x-3}}$ $\qquad 2\sqrt{x+5} + \dfrac{x+4}{\sqrt{x+5}} = \dfrac{26}{3}.$

859. $\sqrt{\dfrac{5x+2}{2}} + \dfrac{4}{\sqrt{\dfrac{x}{2}+1}} = 3\sqrt{\dfrac{x}{2}+1}.$

860. $\sqrt{4x+7} + \dfrac{1}{\sqrt{2x+4}} = 2\sqrt{2(x+2)}.$

861. $\dfrac{\sqrt{x+7}+\sqrt{x-5}}{\sqrt{x+7}-\sqrt{x-5}} = \dfrac{3}{2}$ $\qquad \dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}} = 1.$

862. $\dfrac{1}{x+\sqrt{1-x^2}} + \dfrac{1}{x-\sqrt{1-x^2}} = x.$

863. $2m - \sqrt{2mx - m^2} = x$

864. $\sqrt{4(a+2b)x + b^2} - x = a + 2b.$

865. $4\sqrt{2x+7} + 5 = 3\sqrt{x+12}.$

866. $3\sqrt{2x+4} - 2\sqrt{2x-11} + 5\sqrt{2x-8} = 0.$

867. $\dfrac{3x}{\sqrt{x+1}} + 2\sqrt{x+1} - 2\sqrt{x-2}.$

868. $\dfrac{x}{\sqrt{x+1}} = \dfrac{7}{5}\sqrt{2x+1} - \sqrt{x+1}.$

869. Résoudre les équations :

1° $\dfrac{2x\sqrt{3}-\sqrt{2}}{x\sqrt{2}+\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

2° $(2x-3)^2 - (x\sqrt{2})^2 = 2(x-\sqrt{2})(x-1).$

870. Résoudre les équations :

1° $\sqrt{2x^2+4x+3} = 2x+1$ $\qquad \sqrt{x+3} + 5 = 7x.$

2° $x + 3 = \sqrt{-1-5x}$ $\qquad \sqrt{x+2} = \sqrt{3x-5} + 1.$

871. Résoudre les équations :

1° $\sqrt{8x^2+2x+1} - 2x + 3 = 0$ $\quad \sqrt{4x-\sqrt{3}} - \sqrt{3x-4\sqrt{3}} = 0.$

2° $\sqrt{\sqrt{x}+6} + \sqrt{4\sqrt{x}+4} = \sqrt{13\sqrt{x}+10}.$

3° $\sqrt{12-\sqrt{x+8}} = \sqrt{2-2x}.$

872. Résoudre les équations :

1° $2(2-\sqrt{3})x^2 + \sqrt{3} = 0.$

2° $(3-2\sqrt{2})x^2 - (3-2\sqrt{2})x + 2 + \sqrt{2} = 0.$

873. Résoudre les équations, par changement d'inconnue :

$x + 4\sqrt{x} + 3 = 0$ $\qquad x - 3\sqrt{x} - 10 = 0.$

$\sqrt{x-3} + x = 9$ $\qquad 2\sqrt{3x+1} - 3x + 7 = 0.$

874. Résoudre les équations :

1° $7\sqrt[4]{x} - 2\sqrt{x} - 3 = 0.$

2° $2\sqrt[3]{x} - 3\sqrt[3]{x^2} + x = 0.$

875. Résoudre l'équation :

$$x^2 - 5x + 6 = 6\sqrt{x^2 - 5x + 1}.$$

876. Résoudre les deux équations :

1° $\sqrt[3]{1-x} + \sqrt[3]{2-x} = \sqrt[3]{3-2x}.$

2° $\sqrt[5]{a+x} + \sqrt[5]{a-x} = \sqrt[5]{2a}.$

877. Résoudre l'équation :

$$\sqrt[3]{\frac{2-x}{1+x}} + \sqrt[3]{\frac{1+x}{2-x}} = 2.$$

878. Résoudre l'équation :

$$\sqrt[4]{\frac{2-x}{1+x}} + \sqrt[4]{\frac{1+x}{2-x}} = 2.$$

879. Par un double changement d'inconnues, résoudre le système :

$$\begin{cases} 3\sqrt{x-1} - \sqrt{y-2} = 4 \\ 5\sqrt{x-1} - 2\sqrt{y-2} = 5. \end{cases}$$

880. Résoudre le système :

$$\begin{cases} 4\sqrt{x^2+3x} + 5\sqrt{y^2+y-2} = 33 \\ 7\sqrt{x^2+3x} + 20\sqrt{y^2+y-2} = 24. \end{cases}$$

881. Résoudre :

1° $\begin{cases} \sqrt{2x+y} = \sqrt{2x-y} \\ 2 + \sqrt{4x-y} = 3\sqrt{4x+y} \end{cases}.$ 2° $\begin{cases} \sqrt{x+5} = \sqrt{y+5} \\ 2 + \sqrt{x+y} = \sqrt{9y-x} \end{cases}.$

882. Résoudre le système :

$$\begin{cases} \sqrt{x+y^2} = y+1 \\ \sqrt{x-5} = \sqrt{3y-x}. \end{cases}$$

883. Résoudre le système :

$$\begin{cases} \sqrt{x^2-2y} = x-1 \\ \sqrt{x+2y-2} = \sqrt{4y-2}. \end{cases}$$

Signe des fonctions numériques.

Étudier le signe des fonctions $x \longrightarrow f(x)$ suivantes :

884. $f(x) = 4x^2 - 5x.$

885. $f(x) = 9x^2 - 16.$

886. $f(x) = -x^2 + 3x.$

887. $f(x) = 1 - x^2.$

888. $f(x) = 25 - 9x^2.$

889. $f(x) = (2x-3)(4-x).$

890. $f(x) = (2x-1)(2x+5).$

891. $f(x) = 4x^2 + 1.$

892. $f(x) = \dfrac{(2x-1)(2-x)}{5x^2+4}.$

893. $f(x) = \dfrac{2x^2-7x+5}{x^2+x+1}.$

894. $f(x) = (1-x)^2 + (4x+5)^2.$

Etudier le signe des fonctions suivantes :

895. $f(x) = (4x^2 - 13x + 10)(2x^2 - 5x + 3)$.

896. $f(x) = (2x - 3)(x - 4)(4x - 1)$.

897. $f(x) = (2x^2 - 5x + 1)^2 - (x^2 + 3x - 5)^2$.

898. $f(x) = \dfrac{7x^2 - 5x - 2}{4x^2 - x - 5}$.

899. $f(x) = \dfrac{2x - 5}{2x^2 - 3x - 9}$.

900. $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{11x^2 + 5x - 6}$.

901. $f(x) = \dfrac{(4x^2 - 9)(x - 1)}{4x^2 + 5x - \dfrac{3}{2}}$.

902. $f(m) = (2m^2 - 5m + 3)(4m^2 - 5m)$.

903. $f(m) = \dfrac{2m^2 - 8}{4m^2 + 7m - 1}$.

904. $f(m) = \dfrac{m^2 - 2m - 1}{m^2 - 4m + 2}$.

905. $f(x) = \dfrac{2x - 1}{x - 1} + \dfrac{3x - 5}{x + 1} - \dfrac{2}{x^2 - 1}$.

906. $f(x) = \dfrac{5x + 1}{x + 2} - \dfrac{4x - 5}{2 - x} - 3$.

907. $f(x) = \dfrac{3x - 5}{6x + 1} - \dfrac{1 - 3x}{9x + 4} = \dfrac{1}{2}$.

Résoudre les inéquations suivantes :

908. $5 - 4x > 0$.

909. $6x - 5 < 4x - 3$.

910. $\dfrac{x - 1}{5} - \dfrac{36 - 3x}{15} < \dfrac{4x}{3} + 7$.

911. $4x^2 - 2x > x + 1$.

912. $-x^2 + 6x - 5 > 0$.

913. $4x^2 - 9 < 0$.

914. $x^2 < \dfrac{25}{4}$.

915. $(3x - 2)(x - 1) > 0$.

916. $17x^2 - 21x + 4 < 0$.

917. $49x^2 - 28x + 4 > 0.$

918. $5x < 4x^2.$

919. $(x-2)^2 - 4(2-3x)^2 > 0.$

920. $(4x-7)^2 - 4(7-4x)(3-x) < 0.$

921. $x^2 - 29x + 198 > 30.$

922. $\frac{4-5x}{x+2} < 0.$

923. $\frac{21x-7}{4x-1} > 0.$

924. $\frac{7x-\sqrt{3}}{x\sqrt{3}-4} > 0.$

925. $\frac{2x\sqrt{5}-3}{x\sqrt{5}-2} < 0.$

926. $\frac{4x-3}{x-\frac{1}{2}} > 0.$

927. $\frac{9}{12m-1} < \frac{3}{4m+3}.$

928. $\frac{4-m}{3m-1} < \frac{1}{2}.$

929. $\frac{m-1}{4m+5} < \frac{m-3}{4m-3}.$

930. $(x^2+5x)(4-x^2) > 0.$

931. $(4x^2-5x+1)(5x^2-3x-2) < 0.$

932. $\frac{27x^2-9x-18}{7x^2+7x} < 0.$

933. $(4x-3)(11x^2+7x-4) < 0.$

934. $(m^2-9)(m^2-2m-3) > 0.$

935. $\frac{4m^2-2m+1}{m^2-m-1} < 0.$

936. $\frac{m^2-6m-3}{m^2-m-1} > 0.$

937. $(3x^2+7x-2)(-4x^2-x+3) > 0.$

Résoudre les systèmes d'inéquations suivants :

938. $\begin{cases} x-2 > 0. \\ x^2-4x+3 < 0. \end{cases}$

939. $\begin{cases} (x+1)(x-3) < 0. \\ 4x^2 - 3x - 1 > 0. \end{cases}$

940. $\begin{cases} (m+2)^2 - (m-3)(m-5) > 0. \\ \dfrac{m-5}{m-3} > 0. \\ \dfrac{m+2}{m-3} < 0. \end{cases}$

941. $\begin{cases} (4x-3)(2x-1) > 0. \\ 3x+5 > 0. \\ 4x^2 - 9 > 0. \end{cases}$

942. $\begin{cases} (5m-2)^2 - 3(3m-2)(2m+1) > 0. \\ (3m-2)(5-m) > 0. \\ \dfrac{5m-2}{3m-2} > 1. \\ (3m-2)(3m-3) > 0. \\ \dfrac{5m-2}{3m-2} < 3. \end{cases}$

943. $\begin{cases} (3m+2)^2 - 4(2m-1)(2m+3) > 0. \\ \dfrac{m+3}{2m-1} < 0. \\ \dfrac{3m+2}{2m-1} < 0. \end{cases}$

944. $\begin{cases} (m+10)^2 - 5m(m+4) > 0. \\ (m+4)(8m+24) > 0. \\ \dfrac{m+10}{m+4} + 1 > 0. \\ (m+4)[9(m+4) - 6(m+10) + 5m] > 0. \\ \dfrac{m+10}{m+4} < 3. \end{cases}$

Quelles valeurs faut-il donner à m pour que chacune des inéquations suivantes soit vérifiée pour toutes les valeurs de x.

945. $(3m+1)x^2 - 2(m+1)x + 5m - 4 > 0.$

946. $(2m+1)x^2 - (3m-1)x + 5m + 1 < 0.$

947. $\dfrac{-2x^2 + x - 7}{x^2 + x + 2} > m.$

Étudier le signe des fonctions suivantes :

948. $f(x; y) = x - y + 1.$

949. $f(\mathrm{M}) = 2x + y - 3.$

950. $f(\mathrm{M}) = -x - y - 1.$

951. $f(x; y) = x^2 + y^2 - 5.$

952. $f(M) = 4(x^2 + y^2) - 9.$

953. $f(x; y) = xy - 1.$

954. $f(M) = 2xy - 3.$

955. $f(x; y) = (x - 1)(y + 2).$

956. $f(x; y) = (x - 1)^2 - y^2.$

957. $f(M) = (x + y)(x - y).$

958. $f(x; y) = (x + y - 1)(x^2 - 4y^2).$

959. $f(x; y) = x^2 + (y - 1)^2 - 4.$

960. $f(M) = x^2 - y^2 + x - y.$

961. $f(M) = (y - x)^2 + 2(y - x) + 3.$

962. $f(x; y) = \frac{x - y}{x - 1} + 1.$

963. $f(M) = x^2 + 2xy + y^2 - 1.$

964. $xy - \frac{3}{2} < 0.$

965. $x^2 + x - y > 0.$

966. $(x + y)^2 + (x - y)^2 - 10 > 0.$

967. $\frac{x - y - 1}{x + y - 1} > 0.$

968. $(x - 1)^2 + y^2 - 5 > 0.$

969. $xy + x - y - 1 < 0.$

970. $(x + 3)(y - 1) < 1.$

971. $y^2 - 3y + 2 > 0.$

972. $(x^2 + y^2 - 1)(x^2 - 1)(y + 1) < 0.$

973. $x^2 - 3x + 2 - (x - 1)^2 < 0.$

974. $x + y + xy - 1 > 0.$

Résoudre les systèmes suivants :

975. $\begin{cases} x^2 + y^2 - 17 > 0 \\ x - 4y < 0. \end{cases}$

976. $\begin{cases} x^2 + y^2 > 1 \\ x + y - 1 < 0. \end{cases}$

977. $\begin{cases} x + y - 1 > 0 \\ x - y + 1 < 0 \\ x - y < 0. \end{cases}$

978. $\begin{cases} x + y - 1 > 0 \\ (x + 1)(y - 1) < 3 \end{cases}$

979. $\begin{cases} x^2 + y^2 + 8x - 6y < 0 \\ 3y - 2x - 9 < 0. \end{cases}$

980. $\begin{cases} x^2 + y^2 - 10 < 0 \\ xy - 3 > 0. \end{cases}$

981. $\begin{cases} x^2 - y^2 - 2(x - y) < 0 \\ xy - 2 < 0. \end{cases}$

982. $\begin{cases} 3xy - 6x > 0 \\ x^2 - y + 1 < 0. \end{cases}$

Fonctions symétriques.

Calculer en fonction de $S = u + v$ et de $P = uv$ les fonctions symétriques suivantes :

983. $\dfrac{u-1}{v} + \dfrac{v-1}{u}$; $\qquad (u-2)(v-2) \qquad \dfrac{1}{u-2} + \dfrac{1}{v-2}$.

984. $u^4 + v^4$; $\qquad u^5 + v^5$; $\qquad \dfrac{1}{u^2} + \dfrac{1}{v^2}$.

985. $u^6 + v^6$; $\qquad \dfrac{1}{u^2+1} + \dfrac{1}{v^2+1}$.

986. $\dfrac{u-1}{v+1} + \dfrac{v-1}{u+1}$; $\qquad \dfrac{2u-1}{v-1} + \dfrac{2v-1}{u-1}$.

987. $\dfrac{u+1}{2u+3} + \dfrac{v+1}{2v+3}$; $\qquad \dfrac{u^2+uv-v^2}{u-v} + \dfrac{v^2+uv-u^2}{v-u}$.

988. $(u-v)^2$; $\qquad \dfrac{u^3-2}{u^2+1} + \dfrac{v^3-1}{v^2+1}$.

989. On considère l'équation $2x^2 - 34x - 41 = 0$. Calculer :

$$\frac{x'-1}{x''+1} + \frac{x''-1}{x'+1} ; \qquad \frac{x'+1}{x''^2-1} - \frac{x''+1}{1-x'^2}.$$

990. Soit l'équation :

$$(m-5)x^2 - 2(1+3m)x + 1 - m = 0.$$

1° Calculer la somme S et le produit P des racines en fonction de m.

2° Exprimer en fonction de S et P la fonction :

$$E = \frac{x'+1}{x''-2} + \frac{x''+1}{x'-2}.$$

En déduire E en fonction de m.

991. On donne l'équation :

$$(1-3m)x + 2(1-m)x + m = 0.$$

Calculer, en fonction de m,

$$\frac{2-x'}{2x''+1} + \frac{2-x''}{2x'+1}.$$

Résoudre les systèmes non symétriques suivants :

992. $\begin{cases} 2x - 3y = 4 \\ xy - x + 2y - 9 = 0. \end{cases}$

993. $\begin{cases} 3x - 2y = 2 \\ -xy + x - y + 4 = 0. \end{cases}$

994. $\begin{cases} 2x - 3y = 2 \\ 2x^2 - 3xy - y^2 = 4. \end{cases}$

995. $\begin{cases} y = x^2 \\ x - 2y + 6 = 0. \end{cases}$

996. $\begin{cases} y = x^2 - 1 \\ y = x^2 - x + 1. \end{cases}$

997. $\begin{cases} xy = 2 \\ x + 2y = 4. \end{cases}$

998. $\begin{cases} y = \dfrac{2}{x} \\ x + y = 3. \end{cases}$

Calculer deux nombres dont on donne leur somme et leur produit :

999. $S = \dfrac{13}{6}$ et $P = 1$; $S = 40$ et $P = 391$.

1000. $S = 2$ et $P = -5$; $S = 15$ et $P = -324$.

1001. $S = -2$ et $P = 63$.

1002. $S = 1 - 2m$ et $P = m - m^2$.

1003. $S = 5R$ et $P = 6R^2$.

Résoudre les systèmes symétriques suivants :

1004. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ xy = 6. \end{cases}$

1005. $\begin{cases} x + y = 5 \\ x^2 + y^2 = 53. \end{cases}$

1006. $\begin{cases} xy = -1 \\ x^2 + y^2 = \dfrac{9}{4}. \end{cases}$

1007. $\begin{cases} x + y = \dfrac{5}{6} \\ 36(x^2 + y^2) = 97. \end{cases}$

1008. $\begin{cases} x + y = 4 \\ x^2 + xy + y^2 = 15. \end{cases}$

1009. $\begin{cases} x^2 + y^2 - xy = 7 \\ xy + x + y - 1 = 0. \end{cases}$

1010. $\begin{cases} |x + y| = 2 \\ xy - x - y + 5 = 0. \end{cases}$

1011. $\begin{cases} \dfrac{2x - y}{x - 2y} + \dfrac{2y - x}{y - 2x} = -2 \\ xy = 4. \end{cases}$

1012. $\begin{cases} x^2 - y^2 = 3(x - y). \\ xy = 4 \end{cases}$

1013. $\begin{cases} x - y - (\sqrt{x} + \sqrt{y}) = 0 \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{xy} = 11. \end{cases}$

1014. Maximum du produit de deux nombres positifs x et y quand ces nombres sont liés par la relation :

$$mx + ny = \lambda$$

m, n, λ étant des constantes données.

1015. Étant donnée l'équation :

$$x^2 - 5x + 1 = 0$$

ayant des racines x' et x'', former l'équation admettant pour racines

$$X' = x' + 1 \quad \text{et} \quad X'' = x'' + 1.$$

1016. Soit l'équation :

$$2x^2 - 7x - 1 = 0.$$

dont les racines sont x' et x''. Former l'équation ayant pour racines :

$$X' = \frac{1}{x'} \quad \text{et} \quad X'' = \frac{1}{x''}.$$

1017. On donne l'équation :

$$7x^2 - 4x - 17 = 0$$

dont les racines sont x' et x''. Former l'équation ayant pour racines

$$X' = \frac{x'}{x'' + 1} \quad \text{et} \quad X'' = \frac{x''}{x' + 1}.$$

1018. Soit l'équation :

$$(m + 3)x^2 - mx + 1 = 0.$$

Former l'équation ayant pour racines :

$$X' = \frac{x'}{x''} \quad \text{et} \quad X'' = \frac{x''}{x'},$$

x' et x'' étant les racines de l'équation donnée.

1019. On donne l'équation :

$$(3m + 1)x^2 - (3 + 2m)x + 2 - m = 0.$$

Former l'équation ayant pour racines :

$$X' = \frac{x' - 1}{x'' + 2} \quad \text{et} \quad X'' = \frac{x'' - 1}{x' + 2}.$$

1020. Soit l'équation :

$$(2m^2 - 3m + 1)x^2 - mx + 1 = 0.$$

1° Discuter l'existence des racines de cette équation.

2° Calculer la somme et le produit des racines.

3° Former la relation indépendante de m qui existe entre les racines.

1021. Soit l'équation :

$$2(5m + 2)x^2 - 2(m + 1)x + 1 = 0.$$

Former la relation qui existe entre les racines de cette équation. Quelle est la nature de cette relation.

1022. On donne l'équation

$$(1 - t)x^2 - 2(1 + 2t)x + 1 - t = 0.$$

1° Existence des racines de cette équation (Paramètre t);

2° Relation, indépendante de t, entre les racines.

1023. On considère l'équation

$$(m+1)\,x^2 - 2\,x + m - 1 = 0.$$

Déterminer la relation involutive liant les racines de cette équation.

1024. Déterminer m de manière que l'équation

$$(1-m)\,x^2 + 5\,x + 11 - 8\,m = 0$$

ait une racine double de l'autre. Résoudre l'équation dans ce cas.

1025. Soit l'équation

$$(1-2\,m)\,x^2 + (m+2)\,x + 5 = 0.$$

Déterminer m pour que cette équation ait deux racines liées par la relation

$$5\,x' + 2\,x'' - x'\,x'' = 0.$$

1026. On considère l'équation

$$(3-2\,m)\,x^2 - 2\,x + 1 = 0.$$

Déterminer m pour que les racines soient liées par la relation

$$2\,x'' - 3\,x' = x'x''.$$

1027. Soit l'équation :

$$m\,x^2 + (1-3\,m)\,x + m - 2 = 0.$$

Déterminer m de manière que l'on ait

$$\frac{x'}{2x''} + \frac{x''}{2x'} + 3 = 0.$$

x' et x'' désignant les racines de l'équation.

1028. On envisage l'équation :

$$2\,(1-m)\,x^2 - (m+1)\,x - 1 = 0.$$

Déterminer m de manière que $x'^2 + x''^2 = \frac{5}{2}$. Calculer les valeurs correspondantes des racines.

1029. On considère l'équation :

$$mx^2 - 2\,(m+1)\,x + m + 3 = 0.$$

Déterminer m pour que l'on ait $x' + x'' = x'\,x''$; x' et x'' étant les racines de l'équation.

1030. Soit l'équation :

$$x^2 - (m-1)\,x + m + 2 = 0.$$

Déterminer m pour $x'x'' = x' + x'' + 3$; x' et x'' étant les racines de l'équation.

1031. On envisage l'équation

$$2\,(m-1)\,x^2 - (m+1)\,x - m = 0.$$

1° Discuter l'existence des racines.

2° Déterminer m de manière que $x'^2 + x''^2 = \frac{5}{2}$ et calculer les valeurs correspondantes des racines.

3° Calculer en fonction de m la quantité

$$z = \frac{1}{x'} + \frac{1}{x''}.$$

Étudier les variations de la fonction $y = \frac{1}{z}$, la variable étant m.

1032. On donne l'équation

$$\lambda^2 x^2 - (\lambda + 1)\, x + 1 = 0.$$

1° Existence des racines x' et x'' de cette équation.

2° Former l'équation du second degré en z ayant pour racines $z' = \frac{x'}{x''}$ et $z'' = \frac{x''}{x'}$. Discuter l'existence des racines de cette équation en z, et comparer les résultats obtenus avec ceux de la première partie.

3° Déterminer les valeurs de λ pour lesquelles l'équation en z a une racine égale à 4. Dire quelles sont alors les valeurs correspondantes des racines x' et x''.

1033. On considère l'équation du second degré

$$(x - 1)(3 - x) - m\left(x - \frac{5}{1}\right) = 0.$$

1° Montrer que cette équation admet deux racines quel que soit m.

2° Déterminer m de manière que l'une des racines soit double de l'autre. Calculer alors les deux racines.

Nombres et racines d'une équation.

Étudier l'existence et le signe des équations suivantes :

1034. $(3m - 1)\, x^2 + 2(1 - 2m)\, x - 1 = 0.$

1035. $(4m - 1)\, x^2 - 4mx + m + 1 = 0.$

1036. $x^2 + (m - 1)\, x + m^2 - 3m + 2 = 0.$

1037. $(m + 3)\, x^2 - (2m + 3)\, x - m + 2 = 0.$

1038. $(m + 1)\, x^2 - 2x + m - 1 = 0.$

1039. $mx^2 - 2mx + 5m - 12 = 0.$

1040. $(8m - 11)\, x^2 - 5x + m - 1 = 0.$

Comparer les nombres α et β donnés aux racines des équations suivantes :

1041. $x^2 - 3x + 1 = 0$ $\alpha = 1.$

1042. $x^2 + 3x - 1 = 0$ $\alpha = 1.$

1043. $x^2 - 7x + 4 = 0$ $\alpha = 1, \beta = -1.$

1044. $(m - 1)\, x^2 - mx - 2(m + 1) = 0$ $\alpha = -1.$

1045. $mx^2 - (1 - 3m)\, x + 2m = 0$ $\alpha = 1.$

1046. $(2m - 1)\, x^2 - 2(m + 4)\, x + 5m + 2 = 0$ $\alpha = -1, \beta = 1.$

1047. $(m - 1)\, x^2 + (2m - 3)\, x + m + 1 = 0$ $\alpha = -2, \beta = 1.$

1048. $(m^2 - 1)\, x^2 - 3mx + 3 = 0$ $\alpha = 1.$

1049. $(m + 5)\, x^2 - 6x + 3 = 0$ $\alpha = \frac{1}{2}.$

1050. $(m+2)x^2+2(m+1)x+m-1=0$ $\alpha=-\frac{1}{3}$.

1051. $(m+3)x^2+2(m-3)x+m-2=0$ $\alpha=-2$.

1052. $2(m-2)x^2+2(m+1)x+m+5=0$ $\alpha=-1$.

1053. $(m-2)x^2+2mx+m-1=0$ $\alpha=-2$.

1054. $mx^2-(m+1)x-1-6m=0$ $\alpha=-5$ et $\beta=1$.

1055. $5x^2-2(10m+1)x+4m+1=0$ $\alpha=-1$ et $\beta=\frac{1}{3}$

1056. $(2m-1)x^2-(2m-3)x-4(m+1)=0$ $\alpha=-2$ et $\beta=3$.

Déterminer m pour que les racines des équations suivantes satisfassent à la condition indiquée.

1057. $3x^2-2(\lambda+1)x+\lambda^2-8\lambda+15=0$ $x'<x''<4$.

1058. $(m+3)x^2-2(m+9)x+5(m-1)=0$ $x'<-1<x''$.

1059. $mx^2-2(m-2)x+m^2+2m-8=0$ $2<x'<x''$.

1060. $3x^2-2(m+5)x+m^2-4m+15=0$ $x'<x''<3$.

1061. $x^2-(m+3)x-4=0$ $-6<x'<x''$.

1062. $mx^2-2(2m-1)x+2m-3=0$ $+1<x'<3<x''$.

1063. $(m-2)x^2+2(4-3m)x+10m-11=0$ $-4<x'<x''<6$.

1064. $2x^2+(m+1)x+2(4-m)=0$ $-3<x'<x''<2$.

1065. $(m+1)x^2-2(2m-1)x+3(2m-1)=0$ $x'<-1<1<x''$.

1066. Déterminer λ pour que l'équation

$$(\lambda-1)x^2-(2\lambda^2-5\lambda+4)x+2\lambda-3=0$$

ait une seule racine comprise entre -1 et $+1$.

1067. Déterminer m pour que l'équation

$$(m^2-4)x^2+(m^2-3m-4)x+m+5=0$$

ait deux racines séparées par -2.

1068. Pour quelles valeurs de m l'équation

$$(m^2-7m+7)x^2-(3m-5)x-14=0$$

a-t-elle une et une seule racine comprise entre -1 et $+1$.

Problèmes.

1069. 1° Soit $\frac{a}{b}$ une fraction irréductible; montrer que le nombre $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$ est toujours supérieur à 2 et que $\frac{a^2+b^2-2ab}{ab}$ est aussi une fraction irréductible. Comment doivent être choisis les entiers a et b pour que $\frac{a^2+b^2-2ab}{ab}$ soit le carré d'une fraction ?

2° On pose :

$$y_1 = x + \frac{1}{x}, \qquad y_2 = x^2 + \frac{1}{x^2}, \quad \dots, \quad y_n = x^n + \frac{1}{x^n}, \qquad y_0 = 2.$$

Calculer successivement y_2, y_3, y_4 en fonction de y_1.

Établir la relation $y_n = y_{n-1}\, y_1 - y_{n-2}$. Montrer que y est une fonction polynomiale de y_1.

3° Utiliser le changement d'inconnue $y = \frac{1}{x} + x$ pour résoudre l'équation

$$x^4 - 12\,x^3 + 37\,x^2 - 12\,x + 1 = 0$$

Valeurs approchées des quatre racines à 1/100 près.

1070. On donne la fonction :

$$x \longrightarrow y = \frac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'}$$

dans laquelle les coefficients a, b, c sont connus et déterminés, et les coefficients a', b', et c' sont variables.

Une droite parallèle à l'axe des x, d'équation $y = k$, coupe la courbe représentative de la fonction en deux points d'abscisses x' et x''.

On demande :

1° de déterminer les conditions que doivent remplir les coefficients a', b', c' pour que les abscisses x' et x'' satisfassent, quel que soit k, à la relation

$$\frac{1}{x' + \alpha} + \frac{1}{x'' + \alpha} = m,$$

α étant un nombre réel quelconque et m un nombre réel constant.

Cas où $\alpha = 0$.

2° de déterminer la fonction précédente pour les valeurs

$$a = 2, b = 1, c = -6, \alpha = -2, \alpha' = 1.$$

3° Calculer la constante m pour $\alpha = -2$, c'est-à-dire :

$$\frac{1}{x' - 2} + \frac{1}{x'' - 2} = m.$$

Rattacher le résultat obtenu à une propriété des divisions harmoniques. Application pour $k = 4$.

On pourra également rattacher le résultat obtenu à la théorie des miroirs sphériques

1071. Calculer y, puis x, donnés par le système d'équations :

$$\begin{cases} x^2 + 2xy + 2ay = 0 \\ y^2 - 2\,(a + 1)\,y + 2a\,(a - 1) = 0, \end{cases}$$

où a est une constante.

Discuter, suivant les valeurs de a, combien il y a de valeurs pour x ; x pouvant prendre quatre valeurs pour une même valeur de a, calculer leur produit et la somme de leurs six produits deux à deux.

1072. 1° Tracer, dans le plan rapporté à deux axes orthonormés les courbes (L) d'équation $y = 2\,(x + 1)$ et (C) d'équation $y = \frac{5}{2\,(x + 1)}$. Etudier $L \cap C$.

2° Par un point M de (L) on mène la parallèle MA à $y'y$, coupant (C) en A, et la parallèle MB à $x'x$ coupant (C) en B. Soit P le quatrième sommet du rectangle construit sur MA et MB. Démontrer que P appartient à la courbe (L). Lieu géométrique du milieu D du segment AB quand M décrit (L).

3° Démontrer, dans les mêmes conditions que les points M et P restent conjugués harmoniques par rapport à deux point fixes.

1073. On donne un triangle ABC rectangle en A, avec BC = $2a$, AC = $2b$, AB = $2c$. Sur les côtés AB et AC, à l'extérieur du triangle, on construit des triangles équilatéraux ABD et ACE. Soit O le milieu de BC, l'axe $x'Ox$ portant le segment BC (fig Ex 1073) et l'axe $y'Oy$ perpendiculaire à $x'Ox$; ces axes $x'Ox$, $y'Oy$ sont orthonormés.

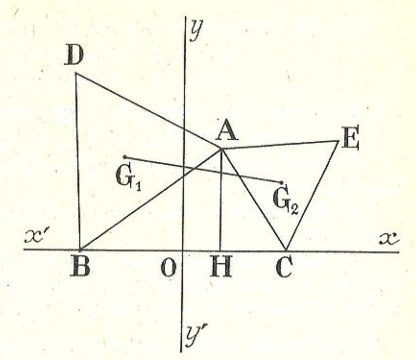


Fig. Ex. 1073

1° Déterminer les coordonnées des isobarycentres G_1 et G_2 des triangles ABD et ACE, en fonction de a, b, c.

2° Déterminer les coordonnées de l'isobarycentre de l'ensemble des deux triangles en fonction de l'abscisse $\overline{OH} = x$ du sommet A.

3° Coordonnées du milieu G du segment $G_1 G_2$? Lieu du point G lorsque A varie

1074. Soit l'équation du second degré en z $\quad z^2 - (u + v)z + u^2 = 0$
dans laquelle u et v désignent les coordonnées d'un point M d'un plan, par rapport à deux axes orthonormés Ou et Ov. A tout point M de ce plan se trouve ainsi associée une telle équation.

1° Quel est le lieu géométrique C_1 des points M du plan pour lesquels l'équation associée a des racines égales ?

2° a) Quel est le lieu C_2 des points pour lesquels l'équation associée a une racine égale à $+1$.

b) Quel est le lieu C_3 des points pour lesquels l'équation associée a une racine égale à -1 ?

3° Tracer les courbes C_1, C_2, C_3. Déterminer les points communs à ces courbes considérées deux à deux.

4° Discuter, suivant les paramètres u et v, la position des racines (lorsqu'elles existent) par rapport aux nombres -1 et $+1$.

1075. On considère deux axes orthonormés $x'Ox$, $y'Oy$; sur l'axe $x'Ox$ les points A, C définis par leurs abscisses $\overline{OA} = a$, $\overline{OC} = c$; sur l'axe $y'Oy$ les points B, D définis par leurs ordonnées $\overline{OB} = b$, $\overline{OD} = d$ (fig. Ex 1075).

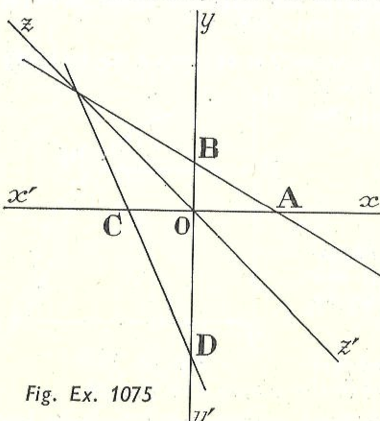


Fig. Ex. 1075

1° Quelle est la droite ayant pour équation

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1\ ?$$

Calculer son coefficient directeur.

2° Quelle est l'équation de la droite CD?

3° Quelle relation E, lie a, b, c, d, lorsque les droites AB, CD se coupent sur la bissectrice $z'Oz$ de l'angle $x'Oy$? Montrer que dans ce cas les droites AD, BC se coupent sur une droite fixe passant par O.

4° On suppose $a = 2$, $b = 1$. Quelle forme prend la relation E ? Quel est le lieu décrit par l'isobarycentre des points A, B, C, D lorsque c et d prennent toutes les valeurs possibles satisfaisant à la relation E ?

1076. On considère le système d'équations

$$\begin{cases} (a+b-1)x + (-a+b-1)y + a + m = 0 \\ (a-b-1)x + (a+b+1)y + a = 0 \end{cases}$$

a et b désignant les coordonnées d'un point P du plan et m un paramètre.

1° Quel est le lieu du point P pour que le système soit impossible ou indéterminé ?

2° Quel est le lieu du point P pour que le système admette une solution dans laquelle x est nul ?

3° Quel est le lieu du point P pour que le système admette une solution dans laquelle y est nul ?

4° Déterminer la position du point P pour que le système soit impossible. Parmi les solutions il y a en général deux positions du point P : P_1 et P_2, qui sont situées sur la droite d'équation $b - a = m + 1$. Discuter leur existence selon les valeurs de m.

1077. On donne deux axes de coordonnées orthonormés Ox et Oy.

1° Former l'équation de la droite déterminée par les deux points $M_1(x_1; y_1)$, $M_2(x_2; y_2)$
- de la droite passant par un point donné $M_1(x_1; y_1)$ et de coefficient directeur m donné;
- de la droite passant par un point donné $M_1(x_1; y_1)$ et perpendiculaire à une droite de coefficient directeur m donné.

2° On considère la courbe (C) dont l'équation est $y = \frac{1}{x}$.

M_1 et M_2 désignant les deux points de cette courbe dont les abscisses sont respectivement x_1 et x_2, montrer que l'équation de la droite M_1M_2 est

$$(1) \qquad x + x_1x_2 . y - (x_1 + x_2) = 0$$

3° Soient A et B les deux points où la droite M_1M_2 rencontre Ox et Oy. Montrer que les segments M_1M_2 et AB ont le même milieu. Peut-on en déduire une construction par points de la courbe (C) si on en connaît un point ?

4° Montrer que l'on peut déduire de l'équation (1) l'équation de la tangente à la courbe (C) au point M_1 d'abscisse x_1.
Soient T_1 et T'_1 les points où cette tangente rencontre Ox et Oy. Démontrer que M_1 est le milieu du segment $T_1T'_1$ Calculer l'aire du triangle $OT_1T'_1$.

5° $M_3(x_3)$ désignant un troisième point de la courbe (C), calculer les coordonnées de l'orthocentre H du triangle $M_1M_2M_3$, et montrer que, quels que soient les points M_1, M_2, M_3, sur la courbe (C), H est aussi sur la courbe (C).

1078. On considère le quart AB d'un cercle de centre O et de rayon R (fig. Ex 1078). Un point M de l'arc de cercle est défini par AM = x.

1° Calculer en fonction de R et x la distance MP de M à la droite OB.

2° Déterminer x de manière que

$$MA + MP = k,$$

k étant une longueur donnée. Discuter.

3° Pour une valeur convenable de k. l'équation du second degré ainsi obtenue admet une racine double. Préciser la position du point M qui lui correspond.

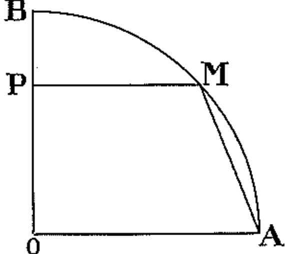


Fig. Ex. 1078

1079. Montrer que si x, y, z sont trois nombres en progression géométrique, on a $(x + y + z)(x - y + z) = x^2 + y^2 + z^2$

2° Trouver trois nombres positifs en progression géométrique, connaissant leur somme a et la somme de leurs carrés b^2. Discuter.

1080. On considère un angle trièdre Oxyz dont les trois faces xOy, yOz, zOx mesure

chacune 60°. Sur Ox on donne le point A avec OA $= a$. Soient B sur Oy, C sur Oz tels que OB $= x$ et OC $= y$ (a, x, y sont toujours positifs). Soit H le pied de la perpendiculaire menée de A au plan yOz.

1° Situer le point H, et calculer d(O; H) et d(A; H).

2° Montrer que, si l'angle BAC est droit, x et y sont liés par la relation :

$$xy - a(x + y) + 2a^2 = 0 \quad (1)$$

3° Quelles valeurs peut alors prendre x ? Comment varie $y = y(x)$ quand x décrit les intervalles permis ?

4° Montrer que, si la droite BC passe par H, x et y sont liés par la relation

$$3xy = a(x + y) \quad (2)$$

5° Déterminer x et y pour que les relations (1) et (2) soient simultanément satisfaites. Calculer alors les arêtes, le volume et l'aire de la surface totale du tétraèdre OABC.

1081. Deux axes X'AX et Y'BY font un angle de 60°, et admettent AB pour perpendiculaire commune. On appelle O le point du segment AB tel que $\frac{\overline{OA}}{\overline{OB}} = -2$ et l'on pose AB $= 3a$ (a, longueur donnée).

Un point M décrit X'X et un point N décrit Y'Y de façon que l'on ait constamment $\overline{AM} = 2 \cdot \overline{BN} = 2x$ (x, variable).

1° Montrer que MN reste constamment perpendiculaire à Y'Y.

2° Montrer que le plan P, perpendiculaire en O à AB, coupe le plan OMN suivant une droite fixe D, dont on précisera la direction par rapport à X'X et Y'Y.

3° Déterminer x de manière que l'angle (OM; ON) soit droit, et montrer qu'alors il existe sur AB un autre point O', tel que l'angle (O'M, O'N) soit également droit.

4° L'angle MON étant droit, évaluer le sinus de l'angle de la droite AB et du plan MON.

1082. Soient $x'Ox$ et $y'Oy$ deux axes orthonormés. On considère une droite PQ passant par le point A (a; a); on désigne par P son point de rencontre avec $x'Ox$, par Q son point de rencontre avec $y'Oy$.

1° Écrire la relation qui existe entre l'abscisse p de P et l'ordonnée q de Q. Lieu du milieu du segment PQ.

2° Déterminer p et q de façon que le segment PQ ait une longueur donnée m; on tormera une équation du second degré admettant p et q pour solutions. Discuter et fnterpréter géométriquement.

1083. On considère les deux facettes ABCD et ABEF d'un cube de côté a. Sur la diagonale AC de la première facette on marque le point M, et sur la diagonale BF de la deuxième facette on marque le point N tels que AM $=$ FN $= x$.

1° Montrer que, lorsque x varie, MN reste parallèle à une direction de plan fixe; trouver le lieu du milieu de MN.

2° Calculer MN^2 en fonction de x.

3° On désigne par α et β les angles aigus du segment MN respectivement avec AC et BF, Calculer $\cos\alpha$ et $\cos\beta$ en fonction de x.

1084. Résoudre et discuter suivant les valeurs du paramètre m :

$$\begin{cases} \frac{1}{4}(y - 3 + x) = m \\ \frac{2}{3}(xy - m^2) = x + y + 3. \end{cases}$$

LIVRE VI

TRANSFORMATIONS GÉOMÉTRIQUES

CHAPITRE LVII

APPLICATIONS PONCTUELLES. TRANSFORMATIONS LINÉAIRES ET AFFINES

790. Application d'un espace ponctuel dans un espace ponctuel.

Soient un espace ponctuel E et un espace ponctuel F. On envisage une application, ou une fonction, f de E dans F :

$$f : \quad M \in E \longrightarrow M' = f(M) \in F$$

Le point M' est l'image du point M par la fonction f.

Si A est une partie de E, on a :

$$: \quad A \subset E \longrightarrow A' = f(A) \subset F$$

A' est l'image du sous-ensemble A par la fonction f.

791. Transformation d'un espace ponctuel.

Lorsque l'espace de départ E et l'espace d'arrivée F sont identiques, la fonction* f *de E dans E est appelée une transformation de l'espace ponctuel E.

$$f : \quad M \in E \longrightarrow M' = f(M) \in E$$

792. Point double d'une transformation.

***Si un point Ω de E est identique à son image f (Ω), Ω est appelé un point double de la transformation* f.**

Les points doubles de la transformation f sont donc les solutions de l'équation

$$f(\Omega) = \Omega \qquad (792 ; 1)$$

qui équivaut à (si E est l'espace vectoriel k^n des vecteurs d'origine O) :

$$f(\overrightarrow{O\Omega}) = \overrightarrow{O\Omega} \qquad (792\,;\,2)$$

793. Partie conservée globalement par une transformation.

Si une partie A de E est identique à son image f (A), on dit que A est conservée globalement par f.

On a :

$$f(A) = A$$

Les points de A ne sont pas nécessairement des points doubles; mais l'image d'un point de A appartient à A, et tout point de A est l'image d'un point de A.

Donc :

$$(\forall x)\ (x \in A) \Rightarrow (\exists y)\ (y = f(x) \in A)$$

et

$$(\forall y)\ (y \in A) \Rightarrow (\exists x)\ (x \in A\,;\ y = f(x))$$

794. Transformation identité.

On définit la transformation identité e, ou transformation neutre, par :

$$\mathbf{e} : \qquad (\forall M) \qquad M \in E \longrightarrow \mathbf{e}(M) = M \in E.$$

795. Transformation involutive.

Une transformation f est dite involutive si $f_0 f = \overset{2}{f} = e$.

On a alors :

$$\begin{aligned} e_0 \overset{-1}{f} &= \overset{2}{f}{}_0 \overset{-1}{f} \\ &= (f_0 f)_0 \overset{-1}{f} \\ &= f_0 (f_0 \overset{-1}{f}) \\ &= f_0 e \end{aligned}$$

c'est-à-dire :

$$\overset{-1}{f} = f$$

Si une transformation est involutive elle est identique à sa réciproque et réciproquement.

796. Application linéaire.

Soient un espace ponctuel $E = K^m$ et un espace ponctuel $F = K^p$. En général $m = 1, 2$ ou 3 et $n = 1, 2$, ou 3.

Soit une application u de E dans F :

$$u : \quad M \in E \longrightarrow u(M) = M' \in F$$

Si on utilise les espaces vectoriels associés à E et F des vecteurs liés ayant pour origines soit l'origine O de E, soit l'origine I de F, on a :

$$u : \quad \overrightarrow{OM} \longrightarrow u(\overrightarrow{OM}) = \overrightarrow{IM'}$$

Cette application* u *est dite linéaire si elle possède les deux propriétés suivantes :

$$(\forall M)(\forall N) : \quad u(\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON}) = u(\overrightarrow{OM}) + u(\overrightarrow{ON}) \qquad \textit{(additivité)}$$

$$(\forall M)(\forall \lambda) : \quad u(\lambda \cdot \overrightarrow{OM}) = \lambda \cdot u(\overrightarrow{OM}) \qquad \textit{(homogénéité d'ordre 1)}$$

797. Transformation linéaire d'un espace ponctuel.

Si* u *est une transformation de l'espace E, et si elle est additive et homogène d'ordre 1,* u *est appelée une transformation linéaire de E.

Soit $\mathcal{B}_0 = (\overrightarrow{OI} = \vec{i}; \overrightarrow{OJ} = \vec{j}; \overrightarrow{OK} = \vec{k})$ le repère de l'espace $E = K^3$. L'application linéaire u est définie par l'image

$$\mathcal{B} = u(\mathcal{B}_0) = (\overrightarrow{OU} = \vec{u}; \overrightarrow{OV} = \vec{v}; \overrightarrow{OW} = \vec{w}),$$

c'est-à-dire par la donnée des coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{OU}, \overrightarrow{OV}, \overrightarrow{OW}$:

$$\overrightarrow{OU} = \vec{u} : (a; b; c)$$
$$\overrightarrow{OV} = \vec{v} : (a'; b'; c')$$
$$\overrightarrow{OW} = \vec{w} : (a''; b''; c'')$$

Les formules de la transformation u sont donc (cf. 563 ; 1)

$$x' = ax + a'y + a''z$$
$$y' = bx + b'y + b''z$$
$$z' = cx + c'y - c''z$$

La matrice associée est (cf. 717 ; 2)

$$A = \begin{pmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{pmatrix}$$

798. Algèbre des transformations linéaires d'un espace ponctuel.

Les transformations linéaires de l'espace ponctuel E sont des endomorphismes de l'espace vectoriel des vecteurs liés d'origine O.

Donc (cf. 716) :

L'ensemble des transformations linéaires d'un espace ponctuel E, muni de l'addition et de la multiplication des transformations, et de la multiplication par un scalaire est une algèbre.

799. Transformation linéaire régulière.

Soit une transformation linéaire u donnée par les formules

$$\begin{cases} x' = ax + a'y + a''z \\ y' = bx + b'y + b''z \\ z' = cx + c'y + c''z \end{cases} \qquad (799\,;\,1)$$

u est régulière si la transformation u est bijective, c'est-à-dire si le système (799; 1) admet une solution unique. La condition est donc

$$\begin{vmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{a'} & \mathbf{a''} \\ \mathbf{b} & \mathbf{b'} & \mathbf{b''} \\ \mathbf{c} & \mathbf{c'} & \mathbf{c''} \end{vmatrix} \neq \mathbf{0} \qquad (799\,;\,2)$$

Cette condition équivaut à : $\mathcal{B} = (\overrightarrow{OU}\,;\,\overrightarrow{OV}\,;\,\overrightarrow{OW})$ est une base de E.

Évidemment :

Si u est régulière, alors $\overset{-1}{u}$ est régulière.

800. Translation.

On considère un vecteur libre $\vec{a}$ de E.

On appelle translation la transformation t de E définie par :

t : $\qquad M \in E \longrightarrow t(M) = M' \in E$

avec :

$$\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OM} + \vec{a} \qquad (800\,;\,1)$$

De (800 ; 1) on déduit

$$\overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OM} = \vec{a}$$

ou

$$\overrightarrow{MM'} = \vec{a} \qquad (800\,;\,2)$$

Au lieu de noter $\vec{t}$, on note souvent $t_{\vec{a}}$ pour préciser le vecteur a qui définit la translation.

Si $E = K^3$, la formule (800; 1) donne analytiquement :

$$\begin{cases} \mathbf{x}' = \mathbf{x} + \alpha \\ \mathbf{y}' = \mathbf{y} + \beta \\ \mathbf{z}' = \mathbf{z} + \gamma \end{cases} \qquad (800\,;\,3)$$

$(\alpha; \beta; \gamma)$ étant les coordonnées de $\vec{a}$.

De plus de (800 ; 1) on tire :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM'} - \vec{a}$$

et :

$$\overset{-1}{t} : \qquad M' \in E \longrightarrow \overset{-1}{t}(M') = M \in E$$

avec :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM'} + (-\vec{a})$$

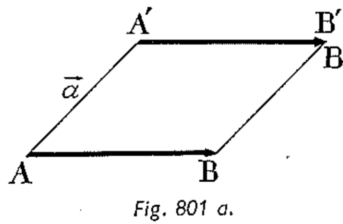
Donc :

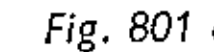
$$\overset{-1}{\mathbf{t}} = \mathbf{t}_{(-\vec{a})} \qquad (800\,;\,4)$$

801. Image d'un vecteur par une translation.

1° Soient un vecteur lié $\overleftarrow{AB}$ et son image $\overrightarrow{A'B'}$ par la translation $t = t_{\vec{a}}$ On a (fig. 801 a, b).

$$\overrightarrow{OA'} = \overrightarrow{OA} + \vec{a}$$
$$\overrightarrow{OB'} = \overrightarrow{OB} + \vec{a}$$




Fig. 801 a.

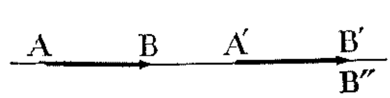


Fig. 801 b.

D'où :

$$\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{OB'} - \overrightarrow{OA'}$$
$$= (\overrightarrow{OB} + \vec{a}) - (\overrightarrow{OA} + \vec{a})$$
$$= \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$$

et finalement :

$$\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB} \qquad (801\,;\,1)$$

Et :

La translation transforme un vecteur en un vecteur équipollent.

2° Réciproquement, soient deux vecteurs équipollents (fig. 801 *a*, *b*)

$$\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB}$$

On envisage la translation $t = t_{\overrightarrow{AA'}}$. Elle transforme le vecteur $\overrightarrow{AB}$ en un vecteur $\overrightarrow{A'B''}$ équipollent à $\overrightarrow{AB}$. Donc :

$$\overrightarrow{A'B''} = \overrightarrow{A'B'}$$

Par suite le point B″ n'est autre que B′. Et :

Si deux vecteurs sont équipollents : $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB}$, alors $\overrightarrow{A'B'}$ est l'image de $\overrightarrow{AB}$ par la translation $t_{\overrightarrow{AA'}}$.

802. Transformation affine.

On appelle transformation affine la composée d'une transformation linéaire et d'une translation.

Si u est la transformation linéaire et t la translation, on a :

$$f = t_0 u \qquad (802\,;1)$$

De plus :

u : $$\overrightarrow{OM} \longrightarrow \overrightarrow{OM_1} = u(\overrightarrow{OM})$$

et

t : $$\overrightarrow{OM_1} \longrightarrow \overrightarrow{OM'} = u(\overrightarrow{OM}) + \vec{a}$$

D'où la formule :

$$\mathbf{f}(\overrightarrow{OM}) = \mathbf{u}(\overrightarrow{OM}) + \vec{\mathbf{a}} \qquad (802\,;2)$$

On a encore :

$$\overset{-1}{f} = \overset{-1}{\widehat{t_0 u}}$$

ou

$$\overset{-1}{\mathbf{f}} = \overset{-1}{\mathbf{u}}{}_0 \overset{-1}{\mathbf{t}} \qquad (802\,;3)$$

car

$$f_0 \overset{-1}{f} = t_0 u_0 \overset{-1}{u}{}_0 \overset{-1}{t}$$
$$= t_0 \overset{-1}{t}$$
$$= e$$

Remarque.

Une translation est une transformation affine,

car $t = t_0 e \qquad (u = e)$

Une transformation linéaire est une transformation affine,

car $u = e_0 u \qquad (t = e = t_{\vec{0}})$

803. Moyens d'étude d'une transformation affine.

1° Le repère $\mathcal{B}_0 = (\overrightarrow{OI} = \vec{i}; \overrightarrow{OJ} = \vec{j}; \overrightarrow{OK} = \vec{k})$ a pour image par la transformation linéaire u, le trivecteur : $\mathcal{B}_1 = (\overrightarrow{OU_1}; \overrightarrow{OV_1}; \overrightarrow{OW_1})$. $\mathcal{B}_1$ a pour image par la translation t, le trivecteur $\mathcal{B} = (\overrightarrow{\Omega U}; \overrightarrow{\Omega V}; \overrightarrow{\Omega W})$.

Donc :

$\mathcal{B} = (\overrightarrow{\Omega U}; \overrightarrow{\Omega V}; \overrightarrow{\Omega W})$ ***est l'image de*** $\mathcal{B}_0$ ***par la transformation affine*** $\mathbf{f} = \mathbf{t}_0 \mathbf{u}$.

2° ***Pour donner une transformation affine il faut et il suffit de donner le trivecteur*** $(\overrightarrow{\Omega U}; \overrightarrow{\Omega V}; \overrightarrow{\Omega W})$ ***formé de trois vecteurs ayant la même origine*** Ω.

3° Si $\Omega(\alpha; \beta; \gamma)$, $\overrightarrow{\Omega U}(a; b; c)$, $\overrightarrow{\Omega V}(a'; b'; c')$, $\overrightarrow{\Omega W}(a''; b''; c'')$ les formules de la transformation sont

$$\begin{cases} x' = ax + a'y + a''z + \alpha \\ y' = bx + b'y + b''z + \beta \\ z' = cx + c'y + c''z + \gamma \end{cases} \qquad (803\,;\,1)$$

4° Ces formules restent de la même forme par un changement d'axes (cf. 400).

Donc :

Pour étudier une transformation on peut choisir les axes les plus favorables.

Si une transformation est affine dans un repère, elle reste affine dans un repère quelconque.

804. Bijections affines.

Les formules d'une transformation affine sont

$$\begin{cases} x' = ax + a'y + a''z + \alpha \\ y' = bx + b'y + b''z + \beta \\ z' = cx + c'y + c''z + \gamma \end{cases} \qquad (804\,;\,1)$$

Cette transformation est régulière si on peut calculer x, y, z en fonction de x', y', z', c'est-à-dire si le système (804; 1) admet une solution unique. La condition est donc

$$\begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix} \neq 0$$

Autrement dit :

Une transformation affine est régulière si la transformation linéaire associée est régulière.

Une transformation affine est régulière si le trivecteur $\mathcal{B}$, image de $\mathcal{B}_0$ est une base.

Si la transformation affine $f = t_{0}u$ *est régulière, c'est une bijection affine.*

805. Composition des transformations affines.

1° Soient deux transformations affines f et g de l'espace ponctuel E :

$$f = t_{0}u \qquad \text{avec} \qquad t = t_{\vec{a}}$$

et

$$g = t'_{0}v \qquad \text{avec} \qquad t' = t_{\vec{b}}$$

On a :

$$g_{0}f = t'_{0}v_{0}t_{0}u$$

D'où :

u : $\qquad \overrightarrow{OM} \longrightarrow \overrightarrow{OM_1} = u(\overrightarrow{OM})$

t : $\qquad \overrightarrow{OM_1} \longrightarrow \overrightarrow{OM_2} = \overrightarrow{OM_1} + \vec{a}$

avec :

$$\overrightarrow{OM_2} = u(\overrightarrow{OM}) + \overrightarrow{OA} \qquad (\overrightarrow{OA} = \vec{a})$$

v : $\qquad \overrightarrow{OM_2} \longrightarrow \overrightarrow{OM_3} = v(\overrightarrow{OM_2})$

avec :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OM_3} &= v\left[u(\overrightarrow{OM}) + \overrightarrow{OA}\right] \\ &= v\left[u(\overrightarrow{OM})\right] + v(\overrightarrow{OA}) \\ &= (v_{0}u)(\overrightarrow{OM}) + v(\overrightarrow{OA}) \end{aligned}$$

t' : $\qquad \overrightarrow{OM_3} \longrightarrow \overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OM_3} + \vec{b}$

avec :

$$\overrightarrow{OM'} = (v_{0}u)(\overrightarrow{OM}) + v(\overrightarrow{OA}) + \overrightarrow{OB} \qquad (\overrightarrow{OB} = \vec{b})$$

En posant $\vec{c} = v(\overrightarrow{OA}) + \overrightarrow{OB}$, on a finalement

$$g_0 f = t''_0 (v_0 u) = t''_0 w$$

avec :

$$t'' = t_{\vec{c}} \qquad \text{et} \qquad v_0 u = w$$

Donc :

La composée de deux transformations affines est une transformation affine.

2° Soient des « bijections » affines f et g.
$g_0 f$ est une bijection.
$g_0 f$ est une transformation affine.

Donc :

La composée de deux bijections affines est une bijection affine.

Et :

L'ensemble des bijections affines de l'espace ponctuel, muni de la loi de composition notée o est un groupe.

806. Points doubles d'une transformation affine.

Soit une transformation affine f de l'espace E. Les points doubles sont les solutions de l'équation

$$f(\Omega) = \Omega$$

c'est-à-dire du système

$$\begin{cases} x = ax + a'y + a''z + \alpha \\ y = bx + b'y + b''z + \beta \\ z = cx + c'y + c''z + \gamma \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} (a-1)x + a'y + a''z + \alpha = 0 \\ bx + (b'-1)y + b''z + \beta = 0 \\ cx + c'y + (c''-1)z + \gamma = 0 \end{cases}$$

Soit :

$$D = \begin{vmatrix} a-1 & a' & a'' \\ b & b'-1 & b'' \\ c & c' & c''-1 \end{vmatrix}$$

le déterminant fondamental du système.

Si D ≠ 0, il y a un point double unique.

Si D = 0, ou il n'y a pas de point double, ou il y a une droite de points doubles, ou il y a un plan de points doubles.

807. Image d'une droite par une transformation affine.

Soit une droite D définie par un point A et un vecteur-directeur $\vec{u}$. Son équation est :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \lambda \cdot \vec{u}$$

ou

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \lambda \cdot \overrightarrow{OU} \qquad (\overrightarrow{OU} = \vec{u})$$

Si $f = t_0 u$ est une transformation affine, on a :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OM'} &= f(\overrightarrow{OM}) \\ &= (t_0 u)(\overrightarrow{OM}) \\ &= u(\overrightarrow{OA} + \lambda \cdot \overrightarrow{OU}) + \vec{a} \end{aligned}$$

ou

$$\overrightarrow{OM'} = u(\overrightarrow{OA}) + \lambda \cdot u(\overrightarrow{OU}) + \vec{a}$$

si $t = t_{\vec{a}}$.

Si A′ est l'image du point A :

$$f(\overrightarrow{OA}) = \overrightarrow{OA'} = u(\overrightarrow{OA}) + \vec{a}$$

D'où :

$$\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OA'} + \lambda \cdot \vec{u}'$$

en posant $u(\overrightarrow{OU}) = \vec{u}'$

Donc :

Si $\vec{u}' \neq 0$, l'image de la droite D = D $(A; \vec{u})$ est la droite D′ déterminée par le point A′ et le vecteur-directeur $\overrightarrow{u'}$.

Si $\vec{u}' = 0$, l'image de la droite D se réduit au point A′.

808. Image d'un plan par une transformation affine.

Soit un plan P défini par un point A et deux vecteurs-directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Son équation est

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \lambda \cdot \vec{u} + \mu \cdot \vec{v}$$

ou

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \lambda \cdot \overrightarrow{OU} + \mu \cdot \overrightarrow{OV} \qquad (\overrightarrow{OU} = \vec{u}; \overrightarrow{OV} = \vec{v})$$

Si $f = t_0 u$ est une transformation affine, on a :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM'} &= f(\overrightarrow{OM}) \\ &= (t_0 u)(\overrightarrow{OM}) \\ &= u(\overrightarrow{OA} + \lambda \cdot \overrightarrow{OU} + \mu \cdot \overrightarrow{OV}) + \vec{a}\end{aligned}$$

ou

$$\overrightarrow{OM'} = u(\overrightarrow{OA}) + \lambda \cdot u(\overrightarrow{OU}) + \mu \cdot u(\overrightarrow{OV}) + \vec{a}$$

si $t = t_{\vec{a}}$.

Si A′ est l'image du point A :

$$f(\overrightarrow{OA}) = \overrightarrow{OA'} = u(\overrightarrow{OA}) + \vec{a}$$

D'où :

$$\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OA'} + \lambda \cdot \vec{u}' + \mu \cdot \vec{v}'$$

en posant $u(\overrightarrow{OU}) = \vec{u}'$, $u(\overrightarrow{OV}) = \vec{v}'$.

Donc :

Si $\vec{u}' = \vec{v}' = 0$, l'image du plan P se réduit au point A′;

Si $\vec{u}'$ et $\vec{v}'$ sont parallèles, avec $\vec{v}' = m \cdot \vec{u}'$, on a :

$$\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OA'} + (\lambda + m\mu)\, \vec{u}',$$

et l'image du plan P est la droite D′ déterminée par le point A′ et le vecteur-directeur $\vec{u}'$.

Si $\vec{u}'$ et $\vec{v}'$ ne sont pas parallèles, l'image du plan P est le plan P′ déterminé par le point A′ et les vecteurs-directeurs $\vec{u}'$ et $\vec{v}'$.

809. Image d'une bande par une transformation affine.

Soient deux droites parallèles D_1 et D_2, ayant le même vecteur-directeur $\vec{u}$.

Leurs images par f, D'_1 et D'_2, ont le même vecteur-directeur

$$\vec{u}' = f(\overrightarrow{OU}) \neq 0.$$

Donc les droites D'_1 et D'_2 sont parallèles.

Et :

Une transformation affine transforme, en général, deux droites parallèles en deux droites parallèles.

C'est la conservation du parallélisme par les transformations affines.

810. Image de deux vecteurs liés parallèles.

Soient deux vecteurs liés $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ parallèles; on a :

$$\overrightarrow{AB} = \lambda \cdot \overrightarrow{CD}$$

ou

$$\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \lambda(\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC})$$

Soit la transformation affine $f = t_0 u$. La transformation affine u donne

$$u(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) = \lambda \cdot u(\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC})$$

ou

$$u(\overrightarrow{OB}) - u(\overrightarrow{OA}) = \lambda \cdot [u(\overrightarrow{OD}) - u(\overrightarrow{OC})]$$

D'où :

$$[u(\overrightarrow{OB}) + \vec{a}] - [u(\overrightarrow{OA}) + \vec{a}] = \lambda \{ [u(\overrightarrow{OD}) + \vec{a}] - [u(\overrightarrow{OC}) + \vec{a}] \}$$

ou

$$\overrightarrow{OB'} - \overrightarrow{OA'} = \lambda(\overrightarrow{OD'} - \overrightarrow{OC'})$$

ou

$$\overrightarrow{A'B'} = \lambda \cdot \overrightarrow{C'D'}$$

Donc :

Si deux vecteurs liés ont pour rapport λ, leurs images par une application régulière ont le même rapport λ.

C'est la conservation du rapport de deux vecteurs liés parallèles.

811. Image d'un quaterne de points alignés.

Soit un quaterne (A, B; C, D) de quatre points alignés sur la droite Δ. Son birapport ρ est :

$$\rho = \frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} : \frac{\overline{DA}}{\overline{DB}}$$

Soit une transformation affine $f = t_0 u$; l'image du quaterne (A, B; C, D) est un quaterne (A′, B′; C′, D′) sur la droite Δ′ image de Δ.

Comme t et u, considérées comme transformations affines, conservent le rapport de deux vecteurs, il en est de même de $f = t_0 u$.

D'où :

$$\frac{\overline{C'A'}}{\overline{C'B'}} : \frac{\overline{D'A'}}{\overline{D'B'}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} : \frac{\overline{DA}}{\overline{DB}}$$

$$= \rho$$

Et :

Les transformations affines transforment un quaterne de points alignés en un quaterne de points alignés, et le birapport est conservé.

812. Image d'un barycentre par une transformation affine.

Soit G le barycentre des points massifs A(α), B(β), C(γ), D(δ).

On a :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\alpha \cdot \overrightarrow{OA} + \beta \cdot \overrightarrow{OB} + \gamma \cdot \overrightarrow{OC} + \delta \cdot \overrightarrow{OD}}{\alpha + \beta + \gamma + \delta}$$

Soit la transformation affine $f = t_0 u$. La transformation affine u donne

$$u(\overrightarrow{OG}) = \frac{\alpha \cdot u(\overrightarrow{OA}) + \beta \cdot u(\overrightarrow{OB}) + \gamma \cdot u(\overrightarrow{OC}) + \delta \cdot u(\overrightarrow{OD})}{\alpha + \beta + \gamma + \delta}$$

Par suite :

$$f(\overrightarrow{OG}) = u(\overrightarrow{OG}) + \vec{a}$$

$$= \frac{\alpha \cdot u(\overrightarrow{OA}) + \beta \cdot u(\overrightarrow{OB}) + \gamma \cdot u(\overrightarrow{OC}) + \delta \cdot u(\overrightarrow{OD})}{\alpha + \beta + \gamma + \delta} + \vec{a}$$

$$= \frac{\alpha \cdot [u(\overrightarrow{OA}) + \vec{a}] + \beta \cdot [u(\overrightarrow{OB}) + \vec{a}] + \gamma \cdot [u(\overrightarrow{OC}) + \vec{a}] + \delta \cdot [u(\overrightarrow{OD}) + \vec{a}]}{\alpha + \beta + \gamma + \delta}$$

ou finalement :

$$\overrightarrow{OG'} = \frac{\alpha \cdot \overrightarrow{OA'} + \beta \cdot \overrightarrow{OB'} + \gamma \cdot \overrightarrow{OC'} + \delta \cdot \overrightarrow{OD'}}{\alpha + \beta + \gamma + \delta}$$

Et :

Si G est le barycentre des points massifs A(α), B(β), C(γ), D(δ), alors son image G' par une transformation affine est le barycentre des points massifs images A'(α), B'(β), C'(γ), D'(δ).

813. Remarque importante.

L'étude précédente des transformations affines et de leurs propriétés est valable pour toutes les transformations affines.

Ainsi après avoir prouvé que la transformation f *est affine les résultats des nos 807 à 812 sont vrais pour* f, *sans aucune démonstration.*

CHAPITRE LVIII

TRANSFORMATIONS AFFINES USUELLES

814. Groupe des translations.

Soient deux translations $t = t_{\vec{a}}$ et $t' = t_{\vec{b}}$. On a (fig. 814 *a*) :

t : $\quad M \longrightarrow M_1$

avec :

$$\overrightarrow{OM_1} = \overrightarrow{OM} + \vec{a}.$$

t' : $\quad M_1 \longrightarrow M'$

avec :

$$\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OM_1} + \vec{b}$$

D'où :

$$\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OM} + \vec{a} + \vec{b}$$

Et :

$$t' \circ t = t_{\vec{a}+\vec{b}}$$

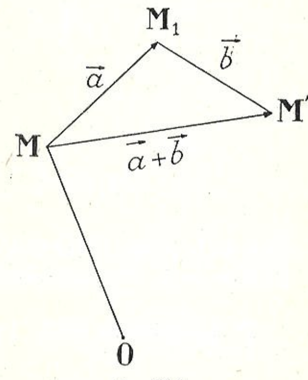


Fig. 814 a.

La composée de deux translations est une translation.

On en déduit immédiatement :

Les translations de l'espace ponctuel E constituent un groupe.

La translation neutre est l'identité $e = t_{\vec{0}}$. La translation réciproque de $t_{\vec{a}}$ est $t_{(-\vec{a})}$.

Comme $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$, le groupe est commutatif.

815. Homothétie.

1° *Soient un point fixe S et un nombre réel* k, *non nul* (*fig.* 815 *a et b*).

A un point M de l'espace ponctuel E, on fait correspondre un point M′ tel que

$$\overrightarrow{SM'} = k \cdot \overrightarrow{SM} \qquad (815\,;\,1)$$

On définit ainsi une transformation h *de l'espace E :*

$$h : \quad M \in E \longrightarrow h(M) = M' \in E$$

h est *appelée* une *homothétie de centre S et de rapport* k.

On note :

$$h = \text{hom}(S\,;\,k)$$

Suivant que k est positif ou négatif, *l'homothétie* est dite *positive ou négative.*

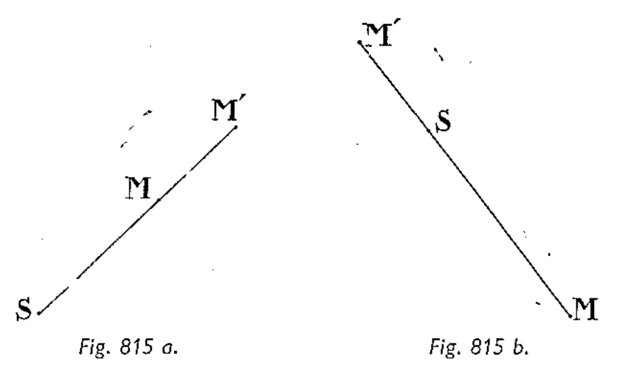


Fig. 815 a. *Fig. 815 b.*

Si $k = 1$, h est l'identité e.
Si $k = -1$, l'homothétie s'appelle une symétrie de centre S.

2° La relation (815 ; 1) s'écrit :

$$\frac{\overrightarrow{SM'}}{\overrightarrow{SM}} = k \qquad (815\,;\,2)$$

Donc :

le point S partage le vecteur $\overrightarrow{M'M}$ dans le rapport k.

3° La relation (815 ; 1) s'écrit encore

$$\overrightarrow{SM} = \frac{1}{k} \cdot \overrightarrow{SM'}$$

Par suite :

$$\overset{-1}{\mathbf{h}} = \mathbf{hom}\left(S\,;\,\frac{1}{k}\right) \qquad (815\,;\,3)$$

4° La relation

$$\overrightarrow{SM'} = k \cdot \overrightarrow{SM}$$

s'écrit :

$$\overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OS} = k\left(\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OS}\right)$$

D'où la formule fondamentale :

$$\overrightarrow{OM'} = k \cdot \overrightarrow{OM} + (1 - k)\,\overrightarrow{OS} \qquad (815\,;\,4)$$

h est donc la composée d'une homothétie de centre O et de rapport k et d'une translation de vecteur $(1 - k)\,\overrightarrow{OS}$.

Donc :

L'homothétie **h = hom** ***(S; k) est une transformation affine.***

Et :

L'homothétie **h = hom** ***(O; k) est une transformation linéaire.***

5° La formule fondamentale de $h = \text{hom}\,(O; k)$ est

$$\overrightarrow{OM'} = k \cdot \overrightarrow{OM}$$

se traduit analytiquement par

$$\begin{cases} x' = k \cdot x \\ y' = k \cdot y \\ z' = k \cdot z \end{cases} \qquad (815\,;\,5)$$

La matrice de cette transformation est

$$A = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix} \qquad (815\,;\,6)$$

816. Homothétie et orientation.

On suppose que l'espace ponctuel E est réel : $E = R^n$ avec $n = 1, 2,$ ou 3.

Si E = R, la matrice de l'homothétie est $A = (k)$ et $\text{Det}\,A = k$.

Donc :

Dans l'espace ponctuel R, une homothétie positive conserve l'orientation d'un vecteur, une homothétie négative change l'orientation.

Si E = $\mathbf{R}^2$, la matrice de l'homothétie est

$$A = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$$

et

$$\text{Det}\,A = k^2$$

Donc :

Dans l'espace ponctuel R^2, les homothéties, positive et négative, conserve l'orientation d'un bivecteur.

Si E = R³, la matrice de l'homothétie est

$$A = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}$$

et

$$\text{Det } A = k^3$$

Donc :

Dans l'espace ponctuel R³, une homothétie conserve l'orientation d'un trivecteur, une homothétie négative change l'orientation.

817. Image d'un vecteur par une homothétie.

1° Soient un vecteur lié $\overrightarrow{AB}$ et son image $\overrightarrow{A'B'}$ par l'homothétie

$h = \text{hom}(S; k)$ (fig. 817 *a*, *b*, *c*).

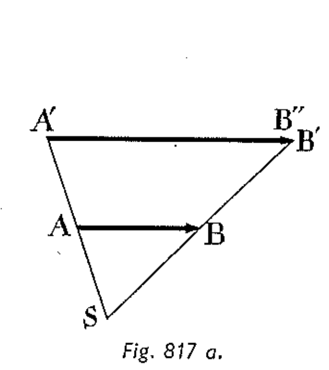


Fig. 817 a.

Fig. 817 b.

On a :

$$\overrightarrow{SA'} = k \cdot \overrightarrow{SA}$$
$$\overrightarrow{SB'} = k \cdot \overrightarrow{SB}$$

D'où :

$$\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{SB'} - \overrightarrow{SA'}$$
$$= k \cdot \overrightarrow{SB} - k \cdot \overrightarrow{SA}$$
$$= k\left(\overrightarrow{SB} - \overrightarrow{SA}\right)$$

et finalement

$$\boldsymbol{\overrightarrow{A'B'} = k . \overrightarrow{AB}} \qquad (817;1)$$

Et :

L'homothétique d'un vecteur lié $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur lié $\overrightarrow{A'B'}$ parallèle; et, de plus, on a $\overrightarrow{A'B'} = k\,\overrightarrow{AB}$, k étant le rapport de l'homothétie.

A B A′ B′
S B″

Fig 817 c.

2° Réciproquement, soient deux vecteurs parallèles ($k \neq 1$) non équipollents (fig. 817 *a*, *b*, *c*).

$$\overrightarrow{A'B'} = k\cdot\overrightarrow{AB} \qquad (k \neq 1)$$

Soit S le point partageant $\overrightarrow{A'A}$ dans le rapport k :

$$\frac{\overrightarrow{SA'}}{\overrightarrow{SA}} = k \quad \text{ou} \quad \overrightarrow{SA'} = k\cdot\overrightarrow{SA}$$

On envisage l'homothétie k = hom (S ; k). Elle transforme le vecteur $\overrightarrow{AB}$ en un vecteur $\overrightarrow{A'B''}$ tel que $\overrightarrow{A'B''} = k\cdot\overrightarrow{AB}$. Donc :

$$\overrightarrow{A'B''} = \overrightarrow{A'B'}$$

Par suite le point B″ n'est autre que B′. Et :

Le vecteur $\overrightarrow{A'B'}$ est l'image du vecteur $\overrightarrow{AB}$ par l'homothétie h = hom (S ; k).

818. Homothétique d'un triangle.

L'homothétique d'un triangle ABC situé dans le plan (P) par h = hom (S; k) est le triangle A′B′C′ ayant pour sommets les homothétiques des sommets du triangle donné (fig. 818 *a*, *b*). Le plan (P′) du triangle A′B′C′ est parallèle à (P) au sens large.

On a donc :

$$\frac{\overrightarrow{B'C'}}{\overrightarrow{BC}} = \frac{\overrightarrow{C'A'}}{\overrightarrow{CA}} = \frac{\overrightarrow{A'B'}}{\overrightarrow{AB}} = k$$

ou :

$$\overrightarrow{B'C'} = k\cdot\overrightarrow{BC}$$
$$\overrightarrow{C'A'} = k\cdot\overrightarrow{CA}$$
$$\overrightarrow{A'B'} = k\cdot\overrightarrow{AB}.$$

Donc :

Deux triangles homothétiques ont leurs côtés homologues parallèles et proportionnels, et leurs angles égaux. Leurs plans sont parallèles au sens large.

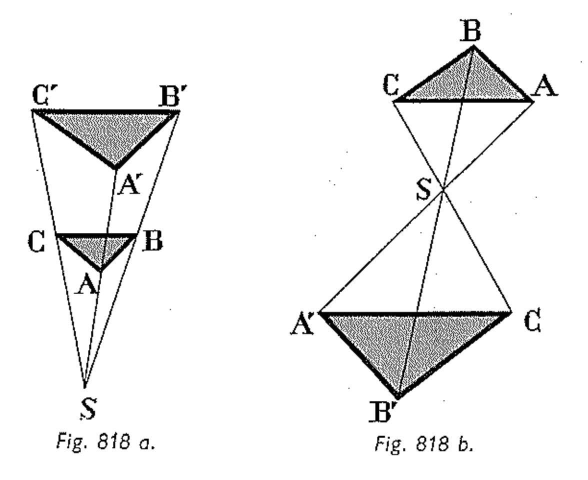


Fig. 818 a. *Fig. 818 b.*

819. Triangles à côtés parallèles.

Soient deux triangles ABC et A'B'C' dont les côtés BC et B'C', CA et C'A', AB et A'B' sont respectivement parallèles (fig. 818 *a*, *b*). On suppose que les vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{B'C'}$ ne sont pas équipollents.

Les vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{B'C'}$ définissent une homothétie hom (O; k) (cf. n° 817). Dans cette homothétie, la demi-droite BA a pour homothétique la demi-droite B'A'; la demi-droite CA a pour homothétique la demi-droite C'A'. Le point A intersection de BA et CA, a donc pour homothétique l'intersection de B'A' et C'A', c'est-à-dire A'. Et le triangle ABC a pour homothétique le triangle A'B'C'.

Et :

Deux triangles dont les côtés sont respectivement parallèles sont homothétiques.

Les trois droites AA', BB', CC' concourent au centre S de l'homothétie.

820. Cas particulier.

Une parallèle DE au côté BC d'un triangle ABC détermine un second triangle ADE homothétique du premier, D et E étant pris sur les droites AB et AC respectivement.

En effet les triangles ADE et ABC ont leurs côtés respectivement parallèles (fig. 820 *a*, *b*).

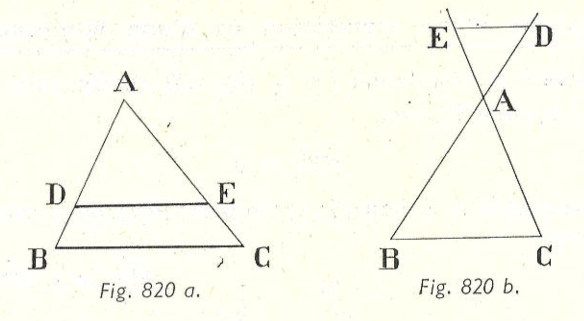


Fig. 820 a. *Fig. 820 b.*

821. Composée d'une homothétie et d'une translation.

On considère l'homothétie $h = \text{hom}(S;\ k)$ (fig. 821 *a*). Un point M a pour image par h le point M_1 avec

$$\overrightarrow{SM_1} = k \cdot \overrightarrow{SM}$$

Soit la translation $t = t_{\vec{a}}$; le point M_1 a pour image par t le point M' avec

$$\overrightarrow{SM'} = \overrightarrow{SM_1} + \vec{a}$$

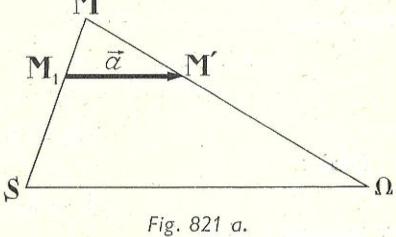


Fig. 821 a.

D'où :

$$\overrightarrow{SM'} = k \cdot \overrightarrow{SM} + \vec{a} \qquad (821 ; 1)$$

Pour trouver les points doubles éventuels de $t \circ h$, on utilise l'équation

$$\overrightarrow{S\Omega} = k \cdot \overrightarrow{S\Omega} + \vec{a}$$

D'où :

$$(1 - k) \cdot \overrightarrow{S\Omega} = \vec{a} \qquad (821 ; 2)$$

et, puisque $k \neq 1$,

$$\overrightarrow{S\Omega} = \frac{1}{1 - k} \cdot \vec{a} \qquad (821 ; 3)$$

Il y a donc un point double unique.

En tenant compte de (821; 2) la formule (821; 1) s'écrit :

$$\boldsymbol{\overrightarrow{SM'} = k \cdot \overrightarrow{SM} + (1 - k) \cdot \overrightarrow{S\Omega}} \qquad (821 ; 4)$$

Ce résultat exprime (cf. formule 815; 4) que *M' est l'homothétique de M dans l'homothétie* h' = hom (Ω; *k*).

Donc :

$$\mathbf{t}_0\mathbf{h} = \mathbf{h}' \qquad (821\,;\,5)$$

822. Composée d'une translation et d'une homothétie.

On considère la translation $t = t_{\vec{a}}$ (fig. 822 *a*). Un point M a pour image par t le point M_1 avec

$$\overrightarrow{MM_1} = \vec{a}$$

Soit l'homothétie $h = \text{hom}(S; k)$; le point M_1 a pour image par h le point M' avec

$$\overrightarrow{SM'} = k\cdot\overrightarrow{SM_1}$$

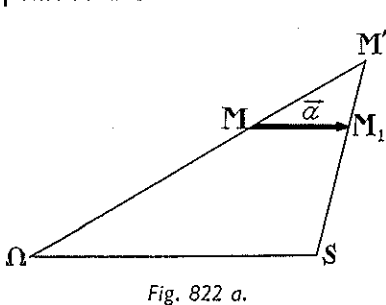


Fig. 822 a.

Or :

$$\overrightarrow{SM_1} = \overrightarrow{SM} + \vec{a}$$

D'où :

$$\overrightarrow{SM'} = k\cdot\overrightarrow{SM} + k\cdot\vec{a} \qquad (822\,;\,1)$$

Pour trouver les points doubles éventuels de $h_0 t$, on utilise l'équation :

$$\overrightarrow{S\Omega} = k\cdot\overrightarrow{S\Omega} + k\vec{a}$$

D'où :

$$(1-k)\cdot\overrightarrow{S\Omega} = k\cdot\vec{a} \qquad (822\,;\,2)$$

et puisque $k \neq 1$,

$$\overrightarrow{S\Omega} = \frac{k}{1-k}\cdot\vec{a} \qquad (822\,;\,3)$$

Il y a donc un point double unique.

En tenant compte de (822 ; 2) la formule (822 ; 1) s'écrit

$$\overrightarrow{\boldsymbol{SM'}} = \mathbf{k}\cdot\overrightarrow{\boldsymbol{SM}} + (\boldsymbol{1} - \mathbf{k})\overrightarrow{\boldsymbol{S\Omega}} \qquad (822\,;\,4)$$

Ce résultat exprime que *M' est l'homothétique de M dans l'homothétie* h'' = hom (Ω; k).

Donc :

$$\mathbf{h}_0\mathbf{t} = \mathbf{h}'' \qquad (822\,;\,5)$$

Remarque.

Les points Ω donnés par les formules (821; 3) et (822; 3) sont différents, donc *h'* et *h''* ne sont pas identiques :

$$\mathbf{t}_0\mathbf{h} \neq \mathbf{h}_0\mathbf{t} \qquad (822\,;\,6)$$

823. Composée de deux homothéties de même centre.

On considère l'homothétie $h = \text{hom}(S; k)$ (fig. 823 *a*). Un point M a pour image par h le point M_1 avec :

$$\overrightarrow{SM_1} = k \cdot \overrightarrow{SM}$$

Soit l'homothétie $h' = \text{hom}(S; k')$; le point M_1 a pour image par h' le point M′ avec :

$$\overrightarrow{SM'} = k' \cdot \overrightarrow{SM_1}$$

D'où :

$$\boldsymbol{\overrightarrow{SM'} = kk' \cdot \overrightarrow{SM}} \qquad (823\,;\,1)$$

Ce résultat exprime que *M′ est l'homothétique de M dans l'homothétie $h'' = \text{hom}(S; kk')$*

$$\mathbf{h' \circ h = h''} \qquad (823\,;\,2)$$

Fig. 823 *a*.

Remarque.

On a : $\mathbf{h' \circ h = h \circ h'}$ (823 ; 3)

824. Composée de deux homothéties.

On considère l'homothétie $h = \text{hom}(S; k)$ (fig. 824 *a* et *b*). Un point M a pour image par h le point M_1 avec :

$$\overrightarrow{SM_1} = k \cdot \overrightarrow{SM}$$

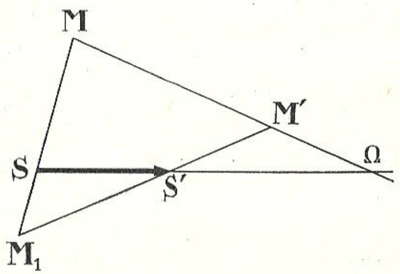


Fig. 824 *a*.

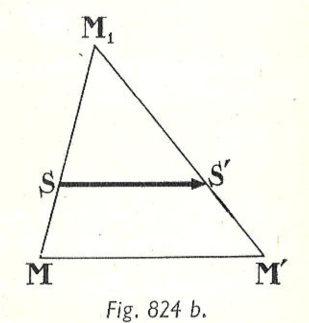


Fig. 824 *b*.

Soit l'homothétie $h' = \text{hom}(S'; k')$, le point S′ étant différent du point S; le point M_1 a pour image par h' le point M′ avec :

$$\overrightarrow{S'M'} = k' \cdot \overrightarrow{S'M_1}$$

ou (cf. formule 815; 4) en prenant S pour origine des repères vectoriels

$$\overrightarrow{SM'} = k'.\overrightarrow{SM_1} + (1 - k')\,\overrightarrow{SS'}$$

D'où :

$$\overrightarrow{SM'} = kk' \cdot \overrightarrow{SM} + (1 - k')\,\overrightarrow{SS'} \qquad (824;\,1)$$

Pour trouver les points doubles éventuels de $h'_0 h$, on utilise l'équation :

$$\overrightarrow{S\Omega} = kk' \cdot \overrightarrow{S\Omega} + (1 - k')\,\overrightarrow{SS'}$$

ou

$$(1 - kk') \cdot \overrightarrow{S\Omega} = (1 - k') \cdot \overrightarrow{SS'} \qquad (824;\,2)$$

Si kk' ≠ 1, il y a un point double unique Ω donné par (fig. 824 *a*) :

$$\overrightarrow{S\Omega} = \frac{1 - k'}{1 - kk'} \cdot \overrightarrow{SS'}$$

Ce point Ω appartient donc à la droite SS'.

De plus la formule (824; 2) s'écrit :

$$(1 - kk')\,\overrightarrow{S\Omega} = (1 - k')\,(\overrightarrow{\Omega S'} - \overrightarrow{\Omega S})$$
$$= (1 - k')\,\overrightarrow{\Omega S'} - (1 - k')\,\overrightarrow{\Omega S}$$

ou

$$k'(1 - k) \cdot \overrightarrow{\Omega S} + (1 - k')\,\overrightarrow{\Omega S'} = 0 \qquad (824;\,3)$$

Ce résultat exprime que Ω *est le barycentre des points massifs* *S* (k' − kk') *et* *S'* (1 − k').

En tenant compte de (824; 2) la formule (824; 1) s'écrit :

$$\overrightarrow{SM'} = kk' \cdot \overrightarrow{SM} + (1 - kk') \cdot \overrightarrow{S\Omega} \qquad (824;\,4)$$

Ce résultat exprime que *M' est l'homothétique de M dans l'homothétie* h'' = *hom* (Ω; kk').

Donc :

$$\mathbf{h'_0 h = h''} \qquad (824;\,5)$$

Si kk' = 1, il n'y a pas de point double puisque les centres S et S' sont différents (fig. 824 *b*).

La formule (824; 1) s'écrit :

$$\overrightarrow{SM'} = \overrightarrow{SM} + (1 - k')\,\overrightarrow{SS'} \qquad (824;\,6)$$

Ce résultat exprime que *M' se déduit de M par la translation de vecteur* (1 − k') . $\overrightarrow{SS'}$.

Donc : $$\mathbf{h'_0 h = t} \qquad (824;\,7)$$

825. Groupe des translations et homothéties.

Soit H l'ensemble des translations et des homothéties de l'espace ponctuel E, muni de la loi de composition notée $_0$.

Les résultats précédents expriment que la loi de composition est une loi interne dans H.

Associativité.

La loi $_0$ est toujours associative; et

[A] $$(\forall f)(\forall g)(\forall h) \quad (h_0 g)_0 f = h_0 (g_0 f)$$

Existence d'un élément neutre.

La transformation identité e appartient à H, car $e = t_{\vec{0}} = \text{hom}\ (0; 1)$; et :

$$(\exists e)(\forall f) \quad e_0 f = f_0 e = f$$

L'ensemble H est symétrisé.

On sait déjà que si $t = t_{\vec{a}}$, on a $\overset{-1}{t} = t_{(-\vec{a})}$ (cf. nº 814) et que si $h = \text{hom}\ (S; k)$,

on a :

$$\overset{-1}{h} = \text{hom}\left(S; \frac{1}{k}\right) \qquad \text{(cf. nº 815; 3º).}$$

Et :

[S] $$(\forall f)(\exists \overset{-1}{f}) \quad f_0 \overset{-1}{f} = \overset{-1}{f}_0 f = e.$$

Ainsi :

H est un groupe non commutatif.

L'ensemble T des translations, l'ensemble H_0 des homothéties de centre O, sont des sous-groupes commutatifs de H.

826. Projection sur une droite parallèlement à une droite, dans le plan R².

1º Soient une droite fixe D et une direction de droites Δ non parallèle à D (fig. 826 *a*). Par un point M du plan on mène la droite μ parallèle à Δ, qui coupe D en M' :

Le point M' est la projection du point M sur D parallèlement à Δ.

On définit ainsi une transformation f du plan R^2 :

$$f: \qquad M \in R^2 \longrightarrow M' \in D \subset R^2.$$

f est aussi une application du plan R^2 dans la droite D.

D est le support de la projection ou l'axe de projection; Δ est la direction de la projection; μ est la projetante du point M.

D est une droite de points doubles.

On note :

$$f = \text{pr}(D\,;\,\Delta)$$

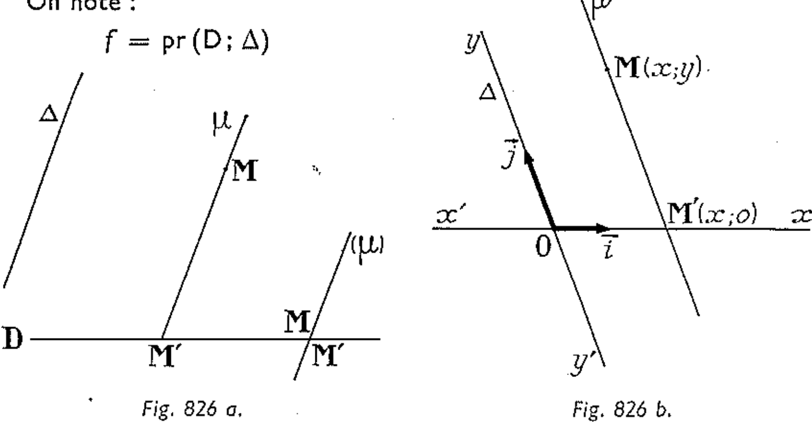


Fig. 826 a. *Fig. 826 b.*

2° On transforme D en axe $x'Ox$; soit $y'Oy$ un axe parallèle à Δ (fig. 826 *b*).

Le point M a pour coordonnées $(x; y)$; le point M′ a pour coordonnées $(x' = x; y' = 0)$.

Les formules analytiques de la transformation sont donc :

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = 0 \end{cases} \qquad (826\,;\,1)$$

Donc :

La projection sur D parallèlement à Δ est une transformation affine.

3° La matrice de la transformation est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (826\,;\,2)$$

et $\qquad \text{Det } A = 0$

La transformation n'est pas bijective.

$\overset{-1}{f}$ est une correspondance. Et :

$$\overset{-1}{f}(M') = \mu = \{ M / M \in \mu \}$$

827. Projection sur un plan parallèlement à une droite, dans l'espace R^3.

1° Soient un plan fixe P et une direction de droites Δ non parallèle à D (fig. 827 *a*). Par un point M de l'espace on mène la droite μ parallèle à Δ, qui coupe P en M'.

Le point M' est la projection du point M sur P parallèlement à Δ.

On définit une transformation f de l'espace R^3 :

$$f: \qquad M \in R^3 \longrightarrow M' \in P \subset R^3$$

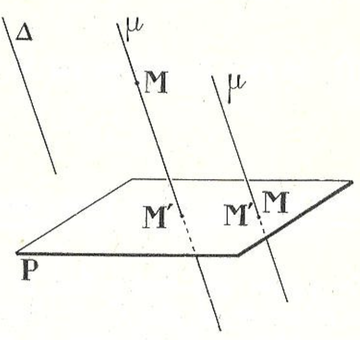


Fig. 827 a.

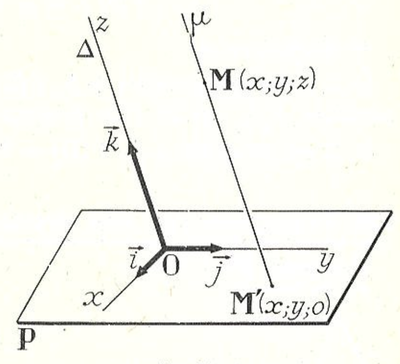


Fig 827 b.

f est aussi une application de l'espace R^3 dans le plan P.

P est le support de la projection ou le plan de projection; Δ est la direction de la projection; μ est la projetante du point M.

P est un plan de points doubles.

On note :

$$f = \text{pr}(P; \Delta)$$

2° On rapporte le plan P à deux axes $x'Ox$, $y'Oy$; soit $z'Oz$ un axe parallèle à Δ (fig. 827 *b*). Le point M a pour coordonnées $(x; y; z)$; le point M' a pour coordonnées $(x' = x;\ y' = y;\ z' = 0)$.

Les formules analytiques de la transformation sont donc :

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = y \\ z' = 0 \end{cases} \qquad (827; 1)$$

Donc :

La projection sur D parallèlement à Δ est une transformation affine.

3° La matrice de la transformation est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (827\,;\,2)$$

et

$$\text{Det } A = 0$$

La transformation n'est pas bijective.

$\overset{-1}{f}$ est une correspondance. Et :

$$\overset{-1}{f}(M') = \mu = \{ M \,/\, M \in \mu \}$$

4° Evidemment :

Si D n'est pas parallèle à Δ, $f(D) = D'$. Le plan Π, passant par D et parallèle à Δ, est le plan projetant D;

Si D est parallèle à Δ, $f(D) = M'$.

828. Projection sur une droite parallèlement à un plan, dans l'espace R^3.

1° Soient une droite fixe D et une direction de plan Π, D n'étant pas parallèle à Π (fig. 828 *a*). Par un point M de l'espace on mène le plan μ parallèle à Π, qui coupe D en M'.

Le point M' est la projection du point M sur D parallèlement à Π.

On définit ainsi une transformation f de l'espace R^3.

$$f: \quad M \in R^3 \longrightarrow M' \in D \subset R^3$$

f est aussi une application de l'espace R^3 dans la droite D.

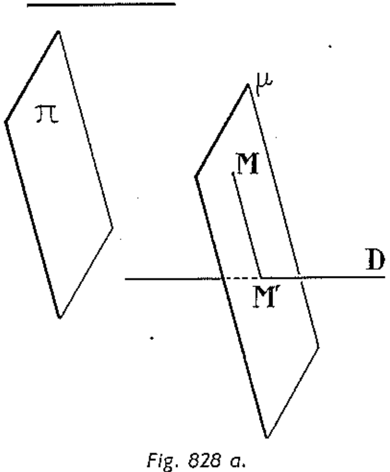


Fig. 828 a.

D est le support de la projection ou l'axe de projection; Π *est la direction de la projection;* μ *est le plan projetant du point M.*

D est une droite de points doubles.

On note :

$$f = \text{pr}(D\,;\,\Pi)$$

2° On transforme D en axe $x'Ox$; soient $y'Oy$ et $z'Oz$ deux axes

parallèles à Π (fig. 828 *b*). Le point M a pour coordonnées $(x; y; z)$; le point M′ a pour coordonnées $(x' = x;\ y' = 0;\ z' = 0)$.

Les formules analytiques de la transformation sont donc :

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = 0 \\ z' = 0 \end{cases} \qquad (828\,;1)$$

Donc :

La projection sur D parallèlement à Π est une transformation affine.

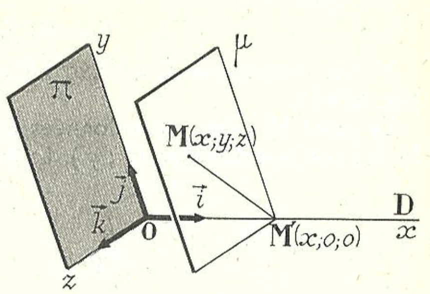


Fig. 828 b.

3º La matrice de la transformation est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (828\,;2)$$

et

$$\text{Det } A = 0$$

La transformation n'est pas bijective.

$\overset{-1}{f}$ est une correspondance. Et :

$$\overset{-1}{f}(M) = \mu = \{M / M \in \mu\}$$

829. Affinité, dans le plan R^2.

1º Soient une droite fixe D, une direction de droites Δ non parallèle à D, et un nombre réel k non nul (fig. 829 *a*).

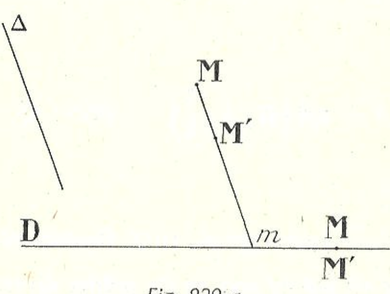


Fig. 829 a.

Un point M du plan se projette en m sur D parallèlement à Δ. A ce point M on fait correspondre le point M′ tel que

$$\overrightarrow{mM'} = k \cdot \overrightarrow{mM} \qquad (829\,;1)$$

On définit ainsi une transformation f du plan R^2 :

$$f : \quad M \in R^2 \longrightarrow M' \in R^2.$$

f est appelée une affinité; D est le support ou l'axe de l'affinité; Δ est la direction de l'affinité; k est le rapport de l'affinité.

D est une droite de points doubles.

Si $k > 0$, l'affinité est *positive;* si $k < 0$, l'affinité est *négative.*

On note :

$$f = \text{aff}(D ; \Delta : k)$$

2° On transforme D en axe $x'Ox$; soit $y'Oy$ un axe parallèle à Δ (fig. 829 *b*).

Le point M a pour coordonnées $(x; y)$; m a pour coordonnées $(x; 0)$; M' a pour coordonnées $(x'; y')$. La formule (829; 1) traduite analytiquequement donne :

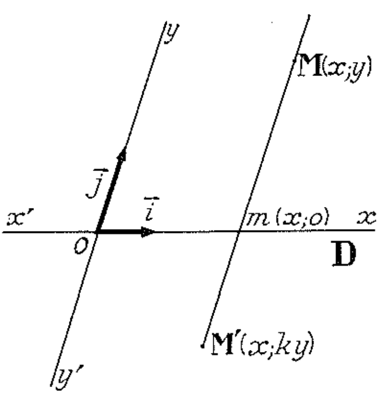


Fig. 829 b.

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = ky \end{cases} \qquad (829 ; 2)$$

Donc :

L'affinité* aff *(D; Δ; k)* est *une transformation affine.

3° La matrice de la transformation est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \qquad (829 ; 3)$$

et

$$\text{Det } A = k.$$

L'affinité est donc bijective.

La formule (829; 1) s'écrit :

$$\overrightarrow{mM} = \frac{1}{k} \cdot \overrightarrow{mM'}$$

Par suite :

$\overset{-1}{f}$ est une affinité de même support D, de même direction Δ et de rapport $\frac{1}{k}$.

Ou :

$$f = \text{aff}(D ; \Delta ; k) \quad \Rightarrow \quad \overset{-1}{f} = \text{aff}\left(D ; \Delta ; \frac{1}{k}\right) \qquad (829 ; 4)$$

830. Composée de deux affinités.

Deux cas particuliers qui ont quelque importance, sont étudiés ici.

1° ***Composée de deux affinités de même axe et de même direction.***

Soient les deux affinités :

$$f = \text{aff } (D; \Delta; k) \quad \text{et} \quad g = \text{aff } (D; \Delta; k').$$

Un point M a pour image par f le point M_1 avec (fig. 830 *a*) :

$$\overrightarrow{mM_1} = k \cdot \overrightarrow{mM}$$

Le point M_1 a pour image par g le point M' avec :

$$\overrightarrow{mM'} = k' \cdot \overrightarrow{mM_1}$$

D'où :

$$\overrightarrow{mM'} = kk' \cdot \overrightarrow{mM} \qquad (830\,;\,1)$$

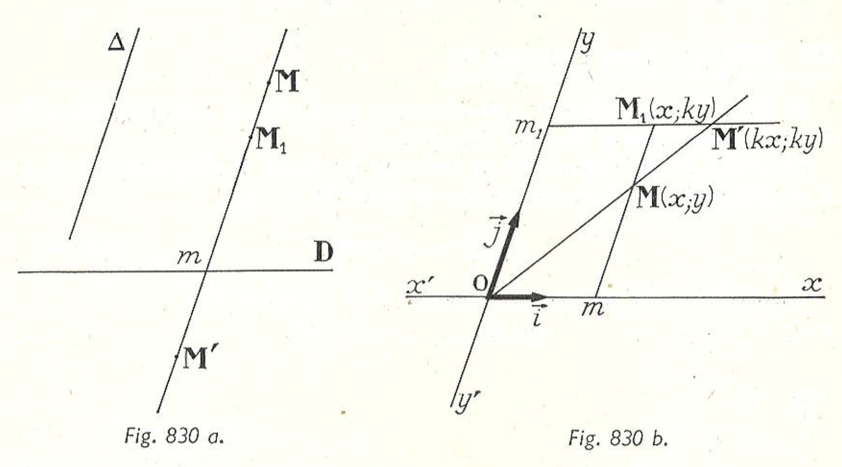


Fig. 830 a. *Fig. 830 b.*

Ce résultat montre que M' est l'image de M par l'affinité

$$h = \text{aff}\,(D;\,\Delta;\,kk').$$

Donc :

$$[\textbf{aff}\,(D;\,\Delta;\,k')]\circ[\textbf{aff}\,(D;\,\Delta;\,k)] = [\textbf{aff}\,(D;\,\Delta;\,kk')] \qquad (830\,;\,2)$$

De même :

$$[\text{aff}\,(D;\Delta;\,k)]\circ[\text{aff}\,(D;\Delta;\,k')] = [\text{aff}\,(D;\Delta;\,kk')].$$

2° ***Composée de deux affinités de même rapport, dont le support de l'une est la direction de l'autre.***

Soient deux droites fixes D et D′ (fig. 830 *b*). On considère les deux affinités $f = \text{aff}\,(D;\,D';\,k)$ et $g = \text{aff}\,(D';\,D;\,k)$.

Les droites D et D′ sont transformées en axes $x'Ox$ et $y'Oy$.

Le point M a pour coordonnées $(x;\,y)$; le point $M_1 = f\,(M)$ a pour coordonnées $(x_1 = x;\ y_1 = ky)$. Le point $M' = g\,(M_1)$ a pour coordonnées $(x' = kx_1;\ y' = y_1)$.

Par suite :

$$\begin{cases} x' = kx \\ y' = ky \end{cases}$$

Ces formules montrent que M′ est l'image de M par l'homothétie

$$h = \text{hom}\ (0;\ k).$$

Donc :

$$[\textbf{aff}\ (D';\ D;\ k)] \circ [\textbf{aff}\ (D;\ D';\ k)] = [\textbf{hom}(0;\ k)].$$

De même :

$$[\text{aff}\ (D;\ D';\ k)] \circ [\text{aff}\ (D';\ D;\ k)] = [\text{hom}\ (0;\ k)].$$

831. Affinité, dans l'espace R³.

1° Soient un plan fixe P, une direction de droites Δ non parallèle à P, et un nombre réel k non nul (fig. 831 *a*).

Un point M de l'espace R^3 se projette en m sur P parallèlement à Δ. A ce point M on fait correspondre le point M′ tel que

$$\overrightarrow{mM'} = k \cdot \overrightarrow{mM} \qquad (831;\ 1)$$

On définit ainsi une transformation f de l'espace R^3 :

$$f: \qquad M \in R^3 \longrightarrow M' \in R^3$$

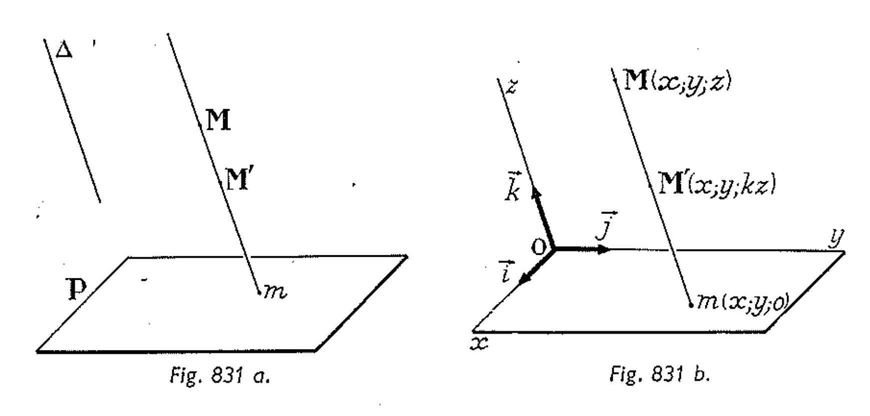


Fig. 831 *a*. Fig. 831 *b*.

f *est appelée une affinité; P est le support de l'affinité;* Δ *est la direction de l'affinité;* k *est le rapport de l'affinité.*

P est un plan de joints doubles.

Si $k > 0$, l'affinité est *positive;* si $k < 0$, l'affinité est *négative.*

On note :

$$f = \text{aff}\,(P;\ \Delta;\ k)$$

2° Le plan P est rapporté à deux axes $x'Ox$ et $y'Oy$; et soit $z'Oz$ un axe parallèle à Δ (fig. 831 *b*).

Le point M a pour coordonnées $(x; y; z)$; m a pour coordonnés $(x; y; 0)$. M′ a pour coordonnées $(x'\ y')$. La formule (831 ; 1) traduite analytiquement donne :

$$x' = x$$
$$y' = y$$
$$z = kz$$

Donc :

L'affinité* aff *(P; Δ; k) est une transformation affine.

3° La matrice de la transformation est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix} \qquad (831\,;\,2)$$

et

$$\text{Det } A = k$$

L'affinité est donc bijective.

Et :

$$f = \text{aff}(P\,;\Delta\,;k) \Rightarrow \overset{-1}{f} = \text{aff}\left(P\,;\Delta\,;\frac{1}{k}\right) \qquad (831\,;\,3)$$

832. Théorème de Ménélaüs.

Soit un triangle ABC (fig. 832 *a*). Sur le côté BC on considère un point α, avec $\frac{\overrightarrow{\alpha B}}{\overrightarrow{\alpha C}} = \lambda$, et sur le côté CA un point β avec $\frac{\overrightarrow{\beta C}}{\overrightarrow{\beta A}} = \mu$. Les points α et β déterminent une droite Δ qui coupe la droite AB en M. On se propose d'évaluer le rapport

$$x = \frac{\overrightarrow{MA}}{\overrightarrow{MB}}.$$

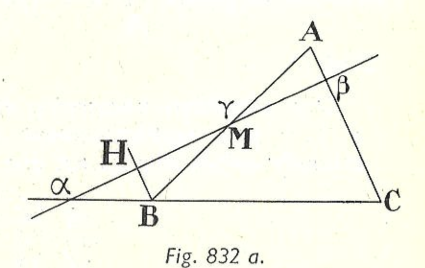


Fig. 832 a.

La parallèle à CA menée par B coupe Δ en H. Dans les triangles homothétiques MβA et MHB, on a :

$$x = \frac{\overrightarrow{MA}}{\overrightarrow{MB}} = \frac{\overrightarrow{\beta A}}{\overrightarrow{HB}}$$

Dans les triangles homothétiques αBH et $\alpha C\beta$, on a :

$$\frac{\overrightarrow{\beta C}}{\overrightarrow{HB}} = \frac{\overrightarrow{\alpha C}}{\overrightarrow{\alpha B}} = \frac{1}{\lambda}$$

et par suite :

$$\overrightarrow{HB} = \lambda \cdot \overrightarrow{\beta C}$$

D'où :

$$x = \frac{\overrightarrow{\beta A}}{\lambda \cdot \overrightarrow{\beta C}}$$
$$= \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{\overrightarrow{\beta A}}{\overrightarrow{\beta C}}$$

ou

$$x = \frac{1}{\lambda\mu}$$

Or une condition nécessaire et suffisante pour qu'un point γ de AB soit confondu avec M est que

$$\frac{\overrightarrow{\gamma A}}{\overrightarrow{\gamma B}} = \frac{\overrightarrow{MA}}{\overrightarrow{MB}},$$

c'est-à-dire en posant $\frac{\overrightarrow{\gamma A}}{\overrightarrow{\gamma B}} = \nu$ que $\nu = x$ ou $\nu = \frac{1}{\lambda\mu}$ ou $\lambda\mu\nu = 1$.

D'où :

Une condition nécessaire et suffisante pour que trois points α, β, γ pris respectivement sur les côtés BC, CA, AB d'un triangle soient alignés est que

$$\frac{\overrightarrow{\alpha B}}{\overrightarrow{\alpha C}} \cdot \frac{\overrightarrow{\beta C}}{\overrightarrow{\beta A}} \cdot \frac{\overrightarrow{\gamma A}}{\overrightarrow{\gamma B}} = 1.$$

833. Théorème de Jean de Céva.

Soient un triangle ABC, un point B′ du côté CA, et un point C′ du côté AB (fig. 833 *a*). Les droites BB′ et CC′ se coupent en G.

Si les coordonnées barycentriques de G sont α, β, γ cela signifie que

G est le barycentre des points massifs $A(\alpha)$, $B(\beta)$, $C(\gamma)$, et on a :

$$\alpha \cdot \overrightarrow{GA} + \beta \cdot \overrightarrow{GB} + \gamma \cdot \overrightarrow{GC} = 0$$

En projetant sur AB parallèlement à CG, on a :

$$\alpha \cdot \overrightarrow{C'A} + \beta \cdot \overrightarrow{C'B} = 0$$

ou

$$\frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = -\frac{\beta}{\alpha} \qquad (833 ; 1)$$

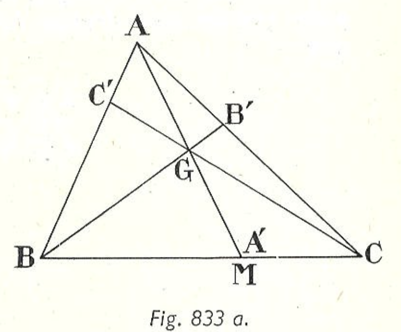


Fig. 833 a.

En projetant sur CA parallèlement à BG, on a :

$$\alpha \cdot \overrightarrow{B'A} + \gamma \cdot \overrightarrow{B'C} = 0$$

ou

$$\frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} = -\frac{\alpha}{\gamma} \qquad (833 ; 2)$$

La droite AG coupe le côté BC en M; en projetant sur BC parallèlement à AG, on a :

$$\beta \cdot \overrightarrow{MB} + \gamma \cdot \overrightarrow{MC} = 0$$

ou

$$\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}} = -\frac{\gamma}{\beta}$$

Or une condition nécessaire et suffisante pour qu'un point A′ de BC soit confondu avec M est que :

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} = \frac{\overline{MB}}{\overline{MC}}$$

$$= -\frac{\gamma}{\beta}$$

ou

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \times \beta \times \frac{1}{\gamma} = -1$$

ou finalement en tenant compte de (833 ; 1) et (833 ; 2) :

$$\frac{\overrightarrow{A'B}}{\overrightarrow{A'C}} \times \frac{\overrightarrow{B'C}}{\overrightarrow{B'A}} . \times \frac{\overrightarrow{C'A}}{\overrightarrow{C'B}} = -1$$

D'où :

Trois points A', B', C' étant pris respectivement sur les côtés BC, CA, AB d'un triangle, une condition nécessaire et suffisante pour que les trois droites AA', BB', CC' soient concourantes est que

$$\frac{\overrightarrow{A'B}}{\overrightarrow{A'C}} \cdot \frac{\overrightarrow{B'C}}{\overrightarrow{B'A}} \cdot \frac{\overrightarrow{C'A}}{\overrightarrow{C'B}} = -1.$$

CHAPITRE LIX

ISOMÉTRIES

834. Définition d'une isométrie.

1° Soit un espace ponctuel euclidien : $E = R^n$ ($n = 1; 2; 3$).

Une bijection affine de E est une isométrie si elle conserve les distances [1].

Si les points A et B ont pour images A′ et B′, on a donc :

$$d(A\,;B) = d(A'\,;B')$$

ou

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{A'B'}\|$$

2° La matrice associée à une isométrie est une *matrice d'isométrie;* on dit aussi *matrice orthogonale.*

3° Soit une translation t ; on a

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$$

D'où :

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{A'B'}\|$$

Et :

Toute translation est une isométrie.

835. Composée de deux isométries.

Soient deux isométries f et g; $g_0 f$ est donc une bijection affine.

Un vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour image par f le vecteur $\overrightarrow{A_1B_1}$ avec

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{A_1B_1}\|$$

---

(1) On montre que toute transformation ponctuelle qui conserve les distances est une bijection affine, donc une isométrie.

Le vecteur $\overrightarrow{A_1B_1}$ a pour image par g le vecteur $\overrightarrow{A'B'}$ avec

$$\|\overrightarrow{A_1B_1}\| = \|\overrightarrow{A'B'}\|$$

D'où :

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{A'B'}\|$$

Donc $g_o f$ conserve les distances, et c'est de plus une bijection affine.

Par la suite :

La composée de deux isométries est une isométrie.

836. Groupe des isométries.

Soit G l'ensemble des isométries de l'espace E. On se propose de montrer que G, muni de la loi de composition notée $_o$, est un groupe.

Associativité.

La loi notée $_o$ est associative :

$$\boxed{A} \qquad (\forall f)\,(\forall g)\,(\forall h) \qquad h_o(g_o f) = (h_o g)_o f$$

Existence d'un neutre.

La transformation identité est une bijection affine; elle conserve évidemment les distances; c'est donc une isométrie.

$$\boxed{N} \qquad (\exists e)\,(\forall f) \qquad e_o f = f_o e = f$$

L'ensemble G est symétrisé.

Soit l'isométrie f; l'image d'un vecteur $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur $\overrightarrow{A'B'}$, avec $\|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{A'B'}\|$. f étant une bijection affine, $\overset{-1}{f}$ est aussi une bijection affine; par suite l'image de $\overrightarrow{A'B'}$ par $\overset{-1}{f}$ est $\overrightarrow{AB}$, avec $\|\overrightarrow{A'B'}\| = \|\overrightarrow{AB}\|$ et $\overset{-1}{f}$ conserve les distances. Finalement $\overset{-1}{f}$ est une bijection.

D'où :

$$\boxed{S} \qquad (\forall f)\,(\exists \overset{-1}{f}) \qquad f_o \overset{-1}{f} = \overset{-1}{f}_o f = e$$

Ainsi :

L'ensemble des isométries de E est un groupe.

837. Isométrie et transformation linéaire associée.

Soit la bijection affine f; $f = t_0 u$, u étant la bijection affine associée.

D'autre part, on a :

$$\overset{-1}{t}{}_0 f = \overset{-1}{t}{}_0 (t_0 u) = (\overset{-1}{t}{}_0 t)_0 u = e_0 u = u$$

Si u est une isométrie, alors $f = t_0 u$ est une isométrie.

Donc si f est une isométrie, alors $u = \overset{-1}{t}{}_0 f$ est une isométrie.

D'où :

$$[f;\ \textit{isométrie}] \Leftrightarrow [u;\ \textit{isométrie}] \qquad (837\,;1)$$

ou

$$(f \in G) \Leftrightarrow (u \in G).$$

Cela signifie que *pour étudier si f est une isométrie on peut choisir la base orthonormée la plus favorable.*

838. Isométries et bases orthonormées.

1° Soient un vecteur $\overrightarrow{AB}$ et le vecteur $\overrightarrow{O\alpha} = \overrightarrow{AB}$. La bijection linéaire u transforme le vecteur $\overrightarrow{AB}$ en $\overrightarrow{A'B'}$ et le vecteur $\overrightarrow{O\alpha}$ en $\overrightarrow{O\alpha'}$.

Comme $\overrightarrow{O\alpha} = \overrightarrow{AB}$, on a aussi $\overrightarrow{O\alpha'} = \overrightarrow{A'B'}$

Donc :

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{A'B'}\| \Leftrightarrow \|\overrightarrow{O\alpha}\| = \|\overrightarrow{O\alpha'}\|$$

Autrement dit :

Pour que la bijection linéaire u soit une isométrie, il faut et il suffit que u conserve les normes des vecteurs d'origine O.

2° Dans l'espace R^3, pour fixer les idées, on donne une bijection linéaire u par la donnée des vecteurs $\overrightarrow{OU} = \vec{u}$, $\overrightarrow{OV} = \vec{v}$, $\overrightarrow{OW} = \vec{w}$ images des vecteurs de la base canonique :

$$\vec{u}(a\,;b\,;c) \qquad \vec{v}(a'\,;b'\,;c') \qquad \vec{w}(a''\,;b''\,;c'')$$

Les formules analytiques sont donc :

$$\begin{cases} x' = ax + a'y + a''z \\ y' = bx + b'y + b''z \\ z' = cx + c'y + c''z \end{cases}$$

Elles donnent $\overrightarrow{OM'} = u(\overrightarrow{OM})$

avec $\overrightarrow{OM}(x\,;\,y\,;\,z)$ et $\overrightarrow{OM'}(x'\,;\,y'\,;\,z')$.

Pour que u soit une isométrie il faut et il suffit que $\|\overrightarrow{OM}\| = \|\overrightarrow{OM'}\|$, c'est-à-dire :

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

Or :

$$\begin{aligned} x'^2 + y'^2 + z'^2 &= (ax + a'y + a''z)^2 + (bx + b'y + b''z)^2 + (cx + c'y + c''z)^2 \\ &= (a^2 + b^2 + c^2)x^2 + (a'^2 + b'^2 + c'^2)y^2 + (a''^2 + b''^2 + c''^2)z^2 \\ &+ 2(aa' + bb' + cc')xy + 2(aa'' + bb'' + cc'')xz + 2(a'a'' + b'b'' + c'c'')yz. \end{aligned}$$

La condition est donc finalement :

$$\begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = 1 & a'^2 + b'^2 + c'^2 = 1 & a''^2 + b''^2 + c''^2 = 1 \\ aa' + bb' + cc' = 0 & aa'' + bb'' + cc'' = 0 & a'a'' + b'b'' + c'c'' = 0 \end{cases}$$

c'est-à-dire :

$$\begin{cases} \|\vec{u}\| = 1 & \|\vec{v}\| = 1 & \|\vec{w}\| = 1 \\ \vec{u}\cdot\vec{v} = 0 & \vec{u}\cdot\vec{w} = 0 & \vec{v}\cdot\vec{w} = 0 \end{cases}$$

ou encore que $\{\overrightarrow{OU}\,;\,\overrightarrow{OV}\,;\,\overrightarrow{OW}\}$ est un repère orthonormé.

D'où finalement, en tenant compte de (837; 1),

Pour qu'une bijection affine f soit une isométrie il faut et il suffit qu'elle transforme le repère orthonormé $\{\overrightarrow{OI}\,;\,\overrightarrow{OJ}\,;\,\overrightarrow{OK}\}$ en un repère orthonormé.

Autrement dit :

La recherche d'une isométrie de l'espace ponctuel E est équivalente à la recherche des repères orthonormés de E.

Ou encore :

Donner une isométrie équivaut à donner un repère orthonormé.

839. Déterminant d'une matrice d'isométrie. Signe d'une isométrie.

La matrice d'une isométrie :

$$A = \begin{pmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{pmatrix}$$

a pour déterminant :

$$\text{Det } A = \text{Det}\left(\overrightarrow{OU}\,;\,\overrightarrow{OV}\,;\,\overrightarrow{OW}\right)$$

Le repère $\mathcal{B} = \left(\overrightarrow{OU}\,;\,\overrightarrow{OV}\,;\,\overrightarrow{OW}\right)$ étant orthonormé, on a :

$$\text{Det } A = +1 \quad \text{ou} \quad \text{Det } A = -1,$$

suivant que le repère $\mathcal{B}$ est positif ou négatif.

Si Det $A = +1$, l'isométrie est positive.
Si Det $A = -1$, l'isométrie est négative.

Remarque. L'ensemble des isométries positives forme un sous-groupe du groupe des isométries. Mais l'ensemble des isométries négatives n'est pas un sous-groupe, car la composée de deux isométries négatives est une isométrie positive.

840. Isométrie et produit scalaire de deux vecteurs.

Soient deux vecteurs

$$\overrightarrow{AB} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}$$
$$\overrightarrow{CD} = x' \cdot \vec{i} + y' \cdot \vec{j} + z' \cdot \vec{k}$$

Leurs images par l'isométrie f sont

$$\overrightarrow{A'B'} = x \cdot \vec{u} + y \cdot \vec{v} + z \cdot \vec{w}$$
$$\overrightarrow{C'D'} = x' \cdot \vec{u} + y' \cdot \vec{v} + z' \cdot \vec{w}$$

Or dans le repère orthonormé $\mathcal{B}_0 = \left\{ \overrightarrow{OI} = \vec{i}\,;\ \overrightarrow{OJ} = \vec{j}\,;\ \overrightarrow{OK} = \vec{k} \right\}$ on a :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = xx' + yy' + zz'$$

et

$$\begin{aligned}\overrightarrow{A'B'} \cdot \overrightarrow{C'D'} &= \left(x \cdot \vec{u} + y \cdot \vec{v} + z \cdot \vec{w}\right)\left(x' \cdot \vec{u} + y' \cdot \vec{v} + z' \cdot \vec{w}\right)\\ &= xx' \cdot \vec{u}^2 + yy \cdot \vec{v}^2 + zz' \cdot \vec{w}^2\\ &\quad + 2(xy' + zx') \cdot \vec{u} \cdot \vec{v} + 2(xz' + zx') \cdot \vec{u} \cdot \vec{w}\\ &\qquad + 2(yz' + zy')\, \vec{v} \cdot \vec{w}\\ &= xx' + yy' + zz'\end{aligned}$$

Donc :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{A'B'} \cdot \overrightarrow{C'D'} \qquad (840\,;\,1)$$

Et :

Les isométries conservent le produit scalaire.

Par suite :

Les isométries conservent le cosinus d'un bivecteur.

841. Isométrie et déterminant.

Soient les vecteurs

$$\overrightarrow{AB} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}$$
$$\overrightarrow{CD} = x' \cdot \vec{i} + y' \cdot \vec{j} + z' \cdot \vec{k}$$
$$\overrightarrow{EF} = x'' \cdot \vec{i} + y'' \cdot \vec{j} + z'' \cdot \vec{k}$$

et leurs images par une isométrie :

$$\overrightarrow{A'B'} = x \cdot \vec{u} + y \cdot \vec{v} + z \cdot \vec{w}$$
$$\overrightarrow{C'D'} = x' \cdot \vec{u} + y' \cdot \vec{v} + z' \cdot \vec{w}$$
$$\overrightarrow{E'F'} = x'' \cdot \vec{u} + y'' \cdot \vec{v} + z'' \cdot \vec{w}$$

On a, dans le repère $\mathcal{B}_0 = \{ \vec{i}\,; \vec{j}\,; \vec{k} \}$

$$\left[\text{Det}\left(\overrightarrow{AB}\,; \overrightarrow{CD}\,; \overrightarrow{EF}\right)\right]_{\mathcal{B}_0} = \begin{vmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{vmatrix} \qquad (841\,;\,1)$$

et dans le repère $\mathcal{B} = \{ \vec{u}\,; \vec{v}\,; \vec{w} \}$.

$$\left[\text{Det}\left(\overrightarrow{A'B'}\,; \overrightarrow{C'D'}\,; \overrightarrow{E'F'}\right)\right]_{\mathcal{B}_0} = \begin{vmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{vmatrix} \qquad (841\,;\,2)$$

Or (cf. n° 404) :

$$\left[\text{Det}\left(\overrightarrow{A'B'}\,;\overrightarrow{C'D'}\,;\overrightarrow{E'F'}\right)\right]_{\mathcal{B}_0} = \left[\text{Det}\left(\overrightarrow{A'B'}\,;\overrightarrow{C'D'}\,;\overrightarrow{E'F'}\right)\right]_{\mathcal{B}} \times \left[\text{Det}\left(\vec{u}\,;\vec{v}\,;\vec{w}\right)\right]_{\mathcal{B}_0}$$

Or $\left[\text{Det}\left(\vec{u}\,; \vec{v}\,; \vec{w}\right)\right]_{\mathcal{B}_0} = +1$ ou $\left[\text{Det}\left(\vec{u}\,; \vec{v}\,; \vec{w}\right)\right]_{\mathcal{B}_0} = -1$, suivant le signe de l'isométrie.

On a donc :

$$\left[\text{Det}\left(\overrightarrow{A'B'}\,; \overrightarrow{C'D'}\,; \overrightarrow{E'F'}\right)\right]_{\mathcal{B}_0} = \pm \left[\text{Det}\left(\overrightarrow{A'B'}\,; \overrightarrow{C'D'}\,; \overrightarrow{E'F'}\right)\right]_{\mathcal{B}} \qquad (841\,;\,3)$$

D'où par comparaison :

$$\text{Det}\left(\overrightarrow{A'B'}\,; \overrightarrow{C'D'}\,; \overrightarrow{E'F'}\right) = \text{Det}\left(\overrightarrow{AB}\,; \overrightarrow{CD}\,; \overrightarrow{EF}\right)$$

si f est une isométrie positive,

et

$$\text{Det}\left(\overrightarrow{A'B'}\,;\,\overrightarrow{C'D'}\,;\,\overrightarrow{E'F'}\right) = -\,\text{Det}\left(\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{CD}\,;\,\overrightarrow{EF}\right)$$

si f est une isométrie négative.

Et :

Une isométrie positive conserve les déterminants.
Une isométrie négative change le signe des déterminants.

Par suite :

Dans R^3, les isométries conservent les sinus d'un bivecteur;

et

Dans R^2, les isométries positives conservent le sinus d'un bivecteur; les isométries négatives changent le signe du sinus d'un bivecteur.

842. Ensemble isométriques.

1° Soient une partie A de E et son image $A' = f(A)$ par l'isométrie f. On dit alors que **les ensembles A et A′ = f(A) sont isométriques.** On dit aussi que *A et A′ sont égaux ou congrus;* et on écrit :

$$A = A'.$$

Cette relation d'isométrie est une relation d'équivalence. Les classes d'équivalence sont des congruences, modulo une isométrie.

2° Soit un couple de deux demi-droites de même origine : (Ax; Ay). Ce couple définit une classe d'équivalence; *cette classe d'équivalence est un angle.*

Cet angle est défini par le couple (Ax; Ay) ou par tout couple (A′x'; A′y') isométrique à (Ax; Ay).

A un angle (Ax; Ay) on peut associer un bivecteur $\left(\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{AC}\right)$, B étant sur A$x$, et C sur A$y$. *Le cosinus et le sinus du bivecteur sont le cosinus et le sinus de l'angle.*

D'après les résultats précédents :

Deux angles isométriques de l'espace R^3 ont le même cosinus et le même sinus.

Et :

Deux angles isométriques du plan R^2 ont le même cosinus; le même sinus si l'isométrie est positive, des sinus opposés si l'isométrie est négative.

CHAPITRE LX

MESURE DES ANGLES

---

843. Cercle trigonométrique.

On appelle cercle trigonométrique le cercle (U) de centre O et de rayon R = 1. Les vecteurs $\overrightarrow{OI} = \vec{i}$ et $\overrightarrow{OJ} = \vec{j}$ ***étant les vecteurs du repère, le point I est appelé point-origine du cercle*** (fig. 843 *a*).

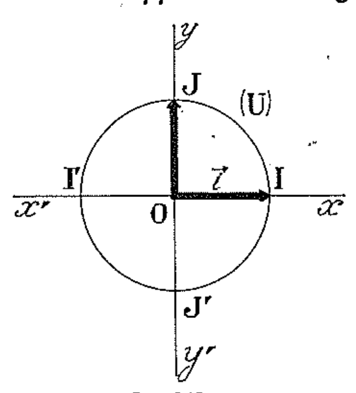


Fig. 843 a.

L'orientation positive choisie est évidemment l'orientation habituelle (sens inverse de la rotation des aiguilles d'une montre).

844. Application de l'ensemble R sur le cercle (U).

On envisage une application de la droite numérique réelle R sur le cercle trigonométrique (U), telle que des vecteurs égaux de R aient pour images des arcs orientés égaux de (U) et que le point I de (U) soit l'image de O.

On obtient ainsi sur le cercle (U) des arcs égaux successifs dont les extrémités sont les images des entiers :

$$\ldots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Sur la figure 844 *a* au nombre 0 correspond le point I, au nombre 1 correspond le point J, au nombre 2 le point I', au nombre 3 le point J'; et on voit qu'au nombre 4 correspond aussi le point I, au nombre 5 le point J, etc.

On a donc le tableau suivant :

$$\varphi \left\{ \begin{array}{l} 0, 4, 8, 12, \ldots -4, -8, -12, \ldots \longrightarrow I \\ 1, 5, 9, 13, \ldots -3, -7, -11, \ldots \longrightarrow J \\ 2, 6, 10, 14, \ldots -2, -6, -10, \ldots \longrightarrow I' \\ 3, 7, 11, 15, \ldots -1, -5, -9, \ldots \longrightarrow J' \end{array} \right.$$

Le point I′, dans le cas général, est l'image d'un nombre a, qui n'est pas nécessairement entier ou rationnel. Sur la figure 844 a, $a = 2$;

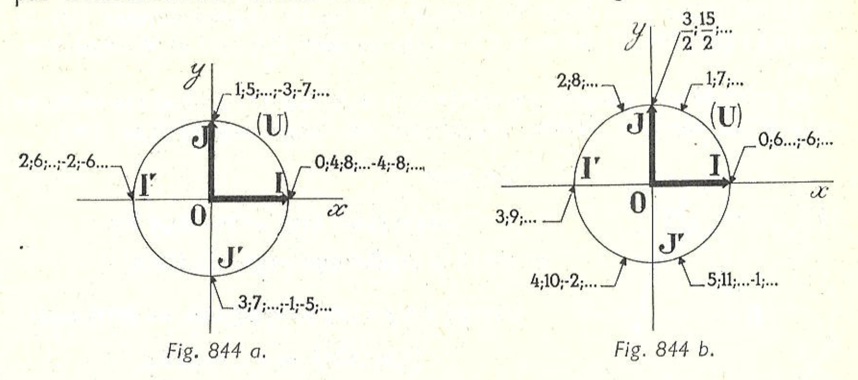


Fig. 844 a.

Fig. 844 b.

sur la figure 844 b, $a = 3$; sur la figure 844 c, $a = \frac{5}{2}$; sur la figure 844 d, $a = 180$; sur la figure 844 e, $a = 200$.

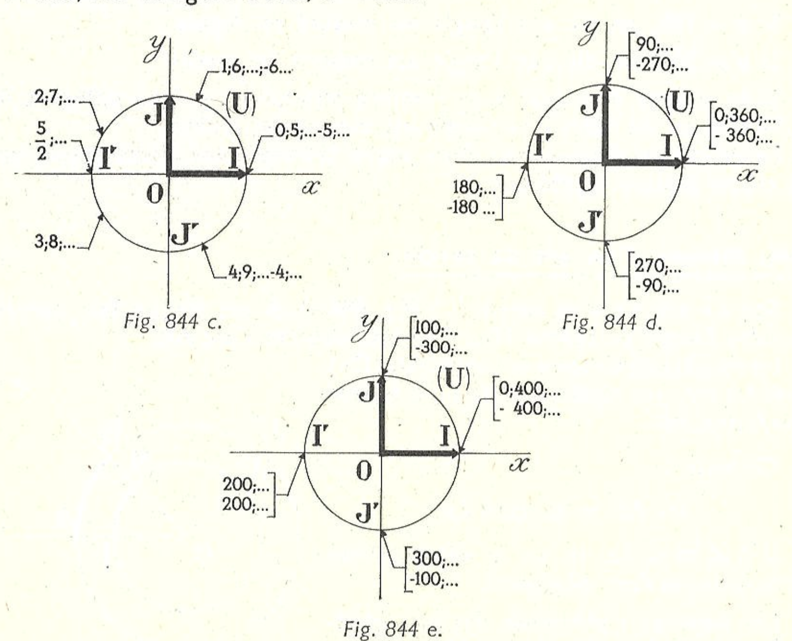


Fig. 844 c.

Fig. 844 d.

Fig. 844 e.

Un point M de (U) est l'image d'un nombre m. Le point I est l'image de 0, de $2a$, de $4a$, $6a$, ..., $-2a$, $-4a$, ...; de même le point M est l'image des nombres m, $m + 2a$, $m + 4a$, ..., $m - 2a$, $m - 4a$, ... et globalement des nombres $m + k \cdot 2a$ $(k \in Z)$.

845. Mesure d'un angle.

Soit un angle (Ωu; Ωv). *On considère le cercle trigonométrique (U) de centre* Ω *(fig.* 845 *a), les côtés* Ωu *et* Ωv *coupent (U) en I et M respectivement.*

Au point M sont associés les nombres $m + k \cdot 2a$. *On dit que ces nombres* $m + k \cdot 2a$ *sont les mesures algébriques de l'angle orienté* (Ωu; Ωv).

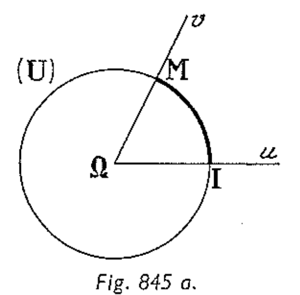


Fig. 845 a.

On note :

$$\overline{\text{angle}}\,(\Omega u\,;\,\Omega v) = m, \text{ mod } 2a$$

et on lit « algébrique angle Ωu Ωv ».

Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté, on écrit aussi :

$$(\overline{\Omega u\,;\,\Omega v}) = m, \text{ mod } 2a$$

Si $0 \leqslant m \leqslant 2a$, m *est la détermination principale de l'angle généralisé.*

C'est cette mesure qui est le plus souvent utilisée.

Si $a = 180$, on dit que l'angle est mesuré en *degrés.*

Si $a = 200$, on dit que l'angle est mesuré en *grades.*

Enfin a peut être égal à un nombre irrationnel π, peu différent de 3,14 159; on dit alors que l'angle est mesuré en *radians.*

La définition montre que deux angles isométriques positivement ont la même mesure algébrique.

846. Mesure d'un arc de cercle.

Soit un arc AB d'un cercle (C) (fig. 846 *a*). A cet arc on fait correspondre l'angle au centre (Ou; Ov) interceptant l'arc AB.

Les mesures algébriques de l'angle (Ou; Ov) *sont les mesures algébriques de l'arc orienté généralisé AB.*

On note :

$$\overline{\text{arc}}\text{ AB} = m, \text{ mod } 2a$$

Si $0 \leqslant m \leqslant 2a$, m *est la détermination principale de l'arc généralisé.*

Fig. 846 *a*.

Les mesures algébriques des arcs généralisés, comme celles des angles, peuvent être évaluées en degrés ($a = 180$), en grades ($a = 200$) ou en radians ($a = \pi$).

Bien entendu, deux arcs isométriques positivement ont la même mesure algébrique.

847. Arcs de rayons différents.

Soient deux cercles concentriques (C) et (C′). Un angle au centre (O*u*; O*v*) intercepte deux arcs généralisés AB et A′B′ (fig. 847 *a*) et on a :

$$\overline{\text{arc}}\ AB = m, \text{ mod } 2a$$

$$\overline{\text{arc}}\ A'B' = m, \text{ mod } 2a$$

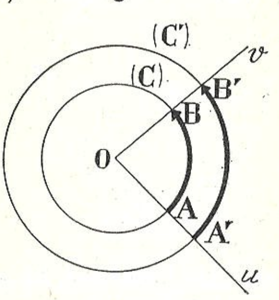


Fig. 847 a.

Les deux arcs AB et A′B′ ont donc les mêmes mesures algébriques :

$$\overline{\text{arc}}\ AB = \overline{\text{arc}}\ A'B' + k \cdot 2a$$

Cependant bien qu'ayant les mêmes mesures algébriques ces deux arcs ne sont pas égaux puisque les cercles (C) et (C′) ne sont pas isométriques.

848. Abscisse curviligne d'un point d'un cercle.

Soient un cercle (C), et un point L de ce cercle, pris comme origine des arcs (fig. 848 *a*).

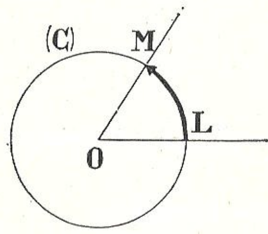


Fig. 848 a.

Si M est un point appartenant à (C), la mesure algébrique de l'arc LM est appelé abscisse curviligne du point M.

On a :

$$\overline{\text{arc}}\ LM = m, \text{ mod } 2a$$

A un nombre m correspond un point unique M du cercle; mais à un point M correspond une infinité de nombres $m + k \cdot 2a$.

849. Angle polaire d'une demi-droite.

Soient l'axe Ox, appelé axe polaire, et une demi-droite Ou (fig. 849 *a*).

La mesure algébrique de l'angle (Ox; Ou) est l'angle polaire de la demi-droite Ou.

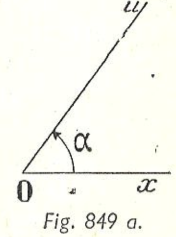


Fig. 849 a.

On a :

$$\overline{\text{angle}}\ (Ox\,;\,Ou) = \alpha, \text{ mod } 2a$$

850. Conséquences.

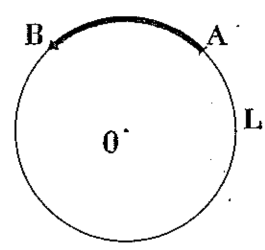


Fig. 850 a.

Deux points A et B appartenant au cercle (C) sont repérés par leurs abscisses curvilignes (fig. 850 *a*) :

$$\overline{\text{arc}}\ \text{LA} = \alpha,\ \text{mod}\ 2a$$

$$\overline{\text{arc}}\ \text{LB} = \beta,\ \text{mod}\ 2a$$

On a aussi :

$$\overline{\text{arc}}\ \text{AB} = \beta - \alpha,\ \text{mod}\ 2a \qquad (850\,;\,1)$$

car l'arc généralisé AB est l'image des vecteurs $\overrightarrow{(\alpha + k_1 \cdot 2a\,;\,\beta + k_2 \cdot 2a)}$ de la droite R.

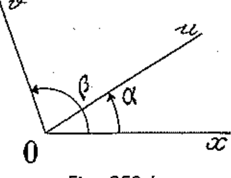


Fig. 850 b.

De même on a (fig. 850 *b*) :

$$\overline{\text{angle}}\ (\text{O}x\,;\,\text{O}u) = \alpha,\ \text{mod}\ 2a$$

$$\overline{\text{angle}}\ (\text{O}x\,;\,\text{O}v) = \beta,\ \text{mod}\ 2a$$

et :

$$\overline{\text{angle}}\ (\text{O}u\,;\,\text{O}v) = \beta - \alpha,\ \text{mod}\ 2a \qquad (850\,;\,2)$$

On en déduit la définition de l'addition des arcs et des angles, ainsi que les propriétés de cette addition.

851. Relations de Chasles.

Si A, B, C, D sont des points quelconques de (C), on a la relation de Chasles (fig. 851 *a*) :

$$\overline{arc}\ AB + \overline{arc}\ BC + \overline{arc}\ CD + \overline{arc}\ DA = 0,\ \text{mod}\ 2a$$

ou :

$$\widehat{AB} + \widehat{BC} + \widehat{CD} + \widehat{DA} = 0,\ \text{mod}\ 2a$$

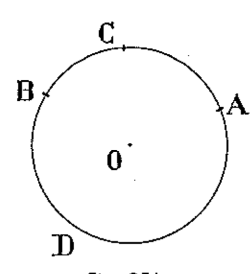


Fig. 851 a.

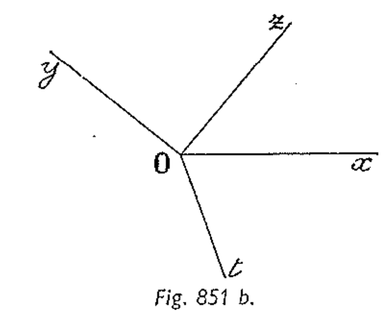


Fig. 851 b.

De même, si Ox, Oy, Oz, Ot sont des demi-droites de même origine O (fig. 851 *b*), on a :

$$\overline{angle}\ (Ox; Oy) + \overline{angle}\ (Oy; Oz) + \overline{angle}\ (Oz; Ot) + \overline{angle}\ (Ot; Ox) = 0, \bmod 2a$$

ou :

$$(\overline{Ox; Oy}) + (\overline{Oy; Oz}) + (\overline{Oz; Ot}) + (\overline{Ot; Ox}) = 0, \bmod 2a$$

852. Milieux d'un arc.

L'arc orienté AB étant donné (fig. 852 *a*), on cherche les points M tels que :

$$\overline{arc}\ AM + \overline{arc}\ BM = 0, \bmod 2a$$

Si α et β sont les abscisses curvilignes de A et B, et x l'abscisse curviligne de M, on a :

$$x - \alpha + x - \beta = 0, \bmod 2\pi$$

et on tire :

$$x = \frac{\alpha + \beta}{2} = 0, \bmod \pi$$

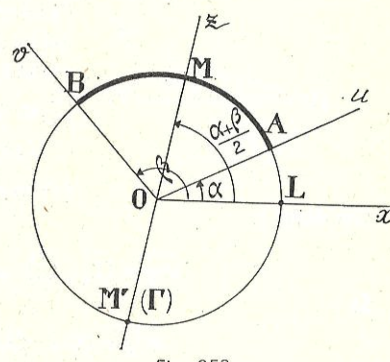


Fig. 852 a.

Il y a deux solutions *M* et *M'*.

La solution M appartenant à l'arc non généralisé AB est le milieu de cet arc.

853. Bissectrices d'un angle.

L'angle (O*u*; O*v*) étant donné (fig. 853 *a*), on cherche les demi-droites Oz telles que :

$$\overline{angle}\ (Ou; Oz) + \overline{angle}\ (Ov; Oz) = 0, \bmod 2\pi$$

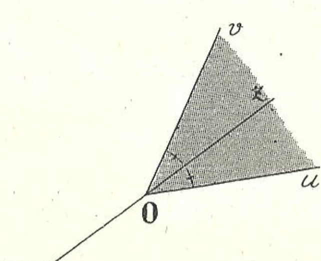


Fig. 853 a.

Si α et β sont les angles polaires de O*u* et O*v*, et x l'angle polaire de Oz, on a :

$$x - \alpha + x - \beta = 0, \bmod 2\pi$$

D'où :

$$x = \frac{\alpha + \beta}{2}, \bmod \pi \qquad (853 ; 1)$$

Il y a donc deux solutions Oz et Oz'.

La demi-droite Oz appartenant au secteur angulaire (Ou; Ov) est la bissectrice de ce secteur angulaire.

On montrera plus loin l'identité de cette définition et de celle du n° 582.

854. Angles de deux éléments rectilignes orientés du plan.

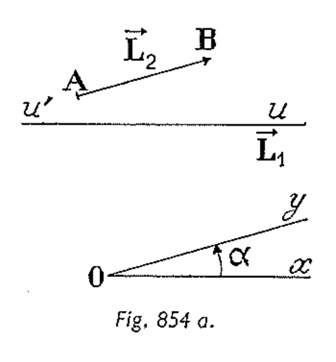


Fig. 854 a.

Les vecteurs, les demi-droites, les droites orientées, les axes sont appelés des éléments rectilignes orientés.

On envisage maintenant deux éléments rectilignes orientés $\vec{L}_1$ et $\vec{L}_2$, donnés dans l'ordre (1) (fig. 854 *a*). Par un point O on mène les demi-droites O*x* et O*y* respectivement parallèles aux éléments orientés $\vec{L}_1$ et $\vec{L}_2$ et de même sens qu'eux.

L'angle orienté $(\overrightarrow{Ox\,;\,Oy})$ est l'angle des éléments $\vec{L}_1$ et $\vec{L}_2$.

On écrit :

$$\overline{\text{angle}}\,(\vec{L}_1\,;\,\vec{L}_2) = \overline{\text{angle}}\,(Ox\,;\,Oy).$$

Si

$$\overline{\text{angle}}\,(Ox\,;\,Oy) = \alpha, \text{ mod } 2\pi$$

on a :

$$\overline{\textit{angle}}\,(\vec{L}_1\,;\,\vec{L}_2) = \alpha, \textbf{ mod } 2\pi$$

Il en découle une relation de Chasles pour des éléments rectilignes orientés :

$$\overline{\textit{angle}}\,(\vec{L}_1\,;\,\vec{L}_2) + \overline{\textit{angle}}\,(\vec{L}_2\,;\,\vec{L}_3) + \overline{\textit{angle}}\,(\vec{L}_3\,;\,\vec{L}_1) = 0, \textbf{ mod } 2\pi$$

855. Angles de deux droites.

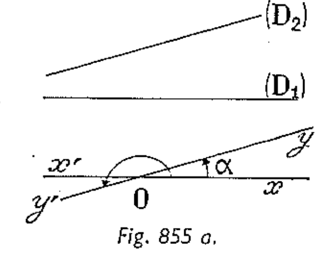


Fig. 855 a.

Soient deux droites non orientées (D_1) et (D_2) données dans l'ordre (fig. 855 *a*).

Par un point O quelconque on mène les droites *x'*O*x* et *y'*O*y* parallèles respectivement à (D_1) et (D_2).

On peut envisager les angles orientés :

$$(\overrightarrow{Ox\,;\,Oy})\,;\,(\overrightarrow{Ox\,;\,Oy'})\,;\,(\overrightarrow{Ox'\,;\,Oy})\,;\,(\overrightarrow{Ox'\,;\,Oy'}).$$

(1) Sur la figure 854 *a*, $\vec{L}_1$ est un axe $\overrightarrow{u'u}$ et $\vec{L}_2$ un vecteur $\overrightarrow{AB}$.

En posant :

$$\overline{\text{angle}}\,(Ox\,;\,Oy) = \alpha, \bmod 2\pi$$

on a :

$$\overline{\text{angle}}\,(Ox\,;\,Oy') = \alpha + \pi, \bmod 2\pi$$
$$\overline{\text{angle}}\,(Ox'\,;\,Oy) = \alpha - \pi, \bmod 2\pi$$
$$\overline{\text{angle}}\,(Ox'\,;\,Oy') = \alpha, \bmod 2\pi$$

On peut grouper tous ces résultats en une seule formule :

$$\overline{\textit{angle}}\,(D_1\,;\,D_2) = \alpha, \bmod \pi$$

On a ainsi défini l'angle orienté de deux droites non orientées. Cet angle est déterminé à $k\pi$ près.

Il découle de cette définition une relation de Chasles pour des droites du plan :

$$\overline{\textit{angle}}\,(D_1\,;\,D_2) + \overline{\textit{angle}}\,(D_2\,;\,D_3) + \overline{\textit{angle}}\,(D_3\,;\,D_1) = 0, \bmod \pi$$

856. Angle de deux éléments rectilignes orientés de l'espace.

Soient deux éléments rectilignes orientés $\vec{L}_1$ et $\vec{L}_2$ (fig. 856 *a*).

Par un point O on mène les demi-droites O*x* et O*y* respectivement parallèles aux éléments orientés $\vec{L}_1$ et $\vec{L}_2$ et de même sens qu'eux.

La mesure du secteur angulaire convexe (Ox; Oy) est l'angle des deux éléments orientés $\vec{L}_1$ et $\vec{L}_2$.

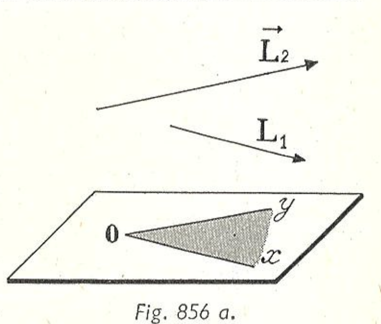


Fig. 856 a.

C'est une mesure comprise en 0 et 180°.

Contrairement à ce qui se passe dans le plan, il n'y a évidemment pas de relation de Chasles.

857. Angles de deux droites.

Soient deux droites non orientées (D_1) et (D_2) (fig. 857 *a*).

Par un point O quelconque on mène les droites *x'*O*x* et *y'*O*y* parallèles respectivement à (D_1) et (D_2).

On obtient quatre secteurs angulaires convexes deux à deux égaux.

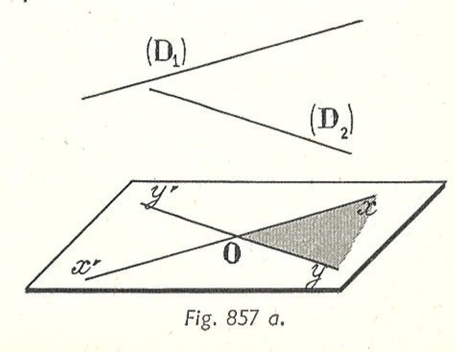


Fig. 857 a.

Le mesure du plus petit est l'angle des deux droites.

C'est une mesure comprise en 0 et 90°.

Lorsque l'angle vaut 90°, les deux droites sont orthogonales et réciproquement.

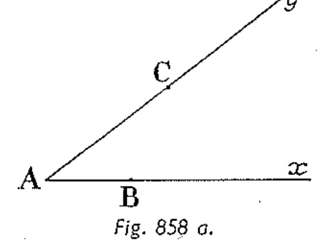


Fig. 858 a.

858. Cosinus et sinus d'un angle.

Soit un angle (Ax ; Ay) et sa mesure

$$\theta = \text{angle } (Ax\,;\, Ay)$$

Si B est un point de Ax, et C un point de Ay (fig. 858 *a*), on pose par définition (cf. n°s 420, 422)

$$\cos \theta = \cos (\overrightarrow{AB}\,;\, \overrightarrow{AC}) \qquad (858\,;\,1)$$

et

$$\sin \theta = \sin (\overrightarrow{AB}\,;\, \overrightarrow{AC}) \qquad (858\,;\,2)$$

CHAPITRE LXI

PROJECTIONS ORTHOGONALES

859. Projections orthogonales.

1° *Projection orthogonale sur une droite dans le plan.*

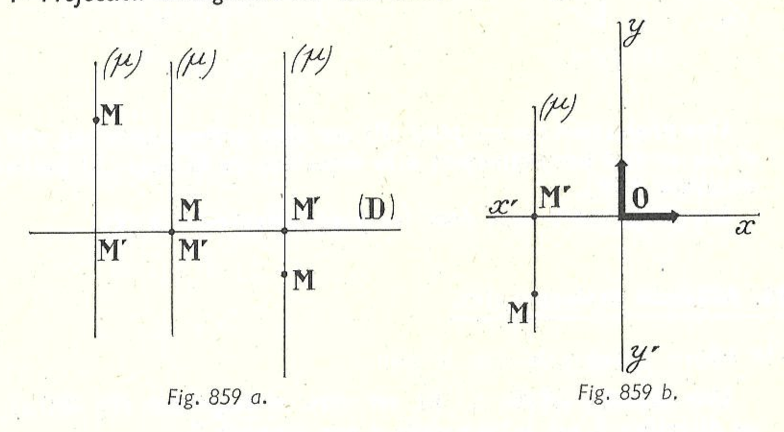


Fig. 859 a. *Fig. 859 b.*

Une projection sur une droite (D) est dite orthogonale (fig. 859 *a*) ***si elle se fait parallèlement à la direction de droites (Δ) perpendiculaire à (D). Les projetantes sont donc les perpendiculaires à (D).***

L'orthogonalité suppose que le plan (P) est un plan métrique, et par suite (fig. 859 *b*) les axes $x'Ox$ et $y'Oy$ sont orthonormés.

2° *Projection orthogonale sur une droite dans l'espace.*

Fig. 859 c.

Une projection sur une droite (D) est dite orthogonale (fig. 859 c) ***si elle se fait parallèlement à la direction de plans (Π) perpendiculaire à (D).***

Les plans projetants sont donc les plans perpendiculaires à (D).

L'espace est un espace métrique, et par suite les axes $x'Ox$, $y'Oy$, $z'Oz$ sont orthonormés (fig. 859 *d*).

3° *Projection orthogonale sur un plan dans l'espace.*

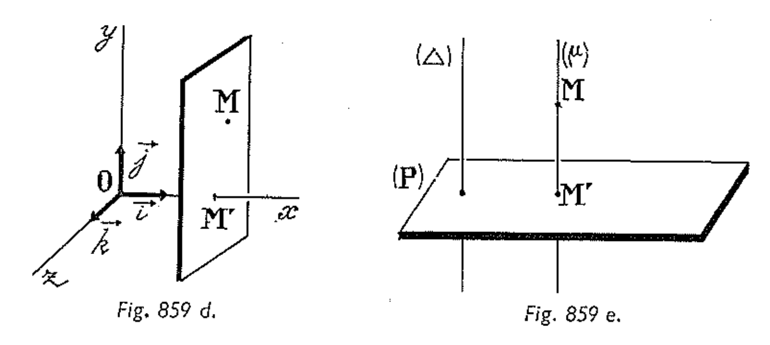


Fig. 859 d. *Fig. 859 e.*

Une projection sur un plan (P) est dite orthogonale (fig. 859 e) ***si elle se fait parallèlement à la direction de droites (Δ) perpendiculaire à (P).***

Les projetantes sont donc les perpendiculaires à (P).

860. Affinités orthogonales.

1° *Affinité orthogonale dans le plan.*

Une affinité* aff (*D; Δ;* k*) est dite orthogonale (fig. 860 *a*) ***si sa direction Δ est orthogonale à son support D.***

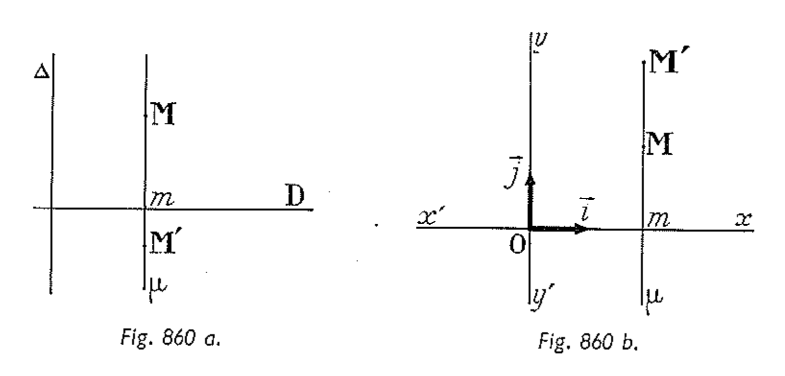


Fig. 860 a. *Fig. 860 b.*

L'orthogonalité de D et Δ suppose que le plan est euclidien et que les axes $x'Ox$, $y'Oy$ sont orthonormés (fig. 860 *b*).

2° *Affinité orthogonale dans l'espace.*

Une affinité* aff *(P; Δ; k) est dite orthogonale (fig. 860 c) ***si sa direction Δ est orthogonale à son support P.***

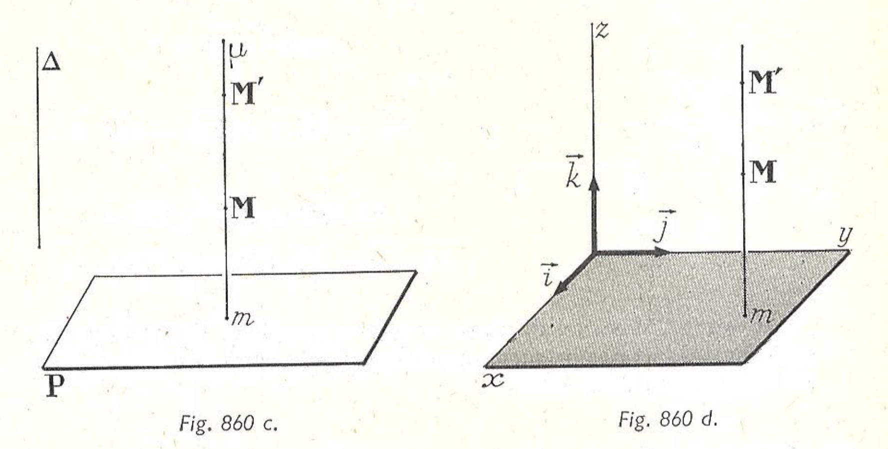


Fig. 860 c. *Fig. 860 d.*

L'orthogonalité de P et Δ suppose que l'espace est euclidien, et que les axes $x'Ox$, $y'Oy$, $z'Oz$ sont orthonormés (fig. 860 *d*).

861. Produit scalaire de deux vecteurs.

1° Soient deux vecteurs $\vec{V}$ et $\vec{V'}$, avec angle $(\vec{V}; \vec{V'}) = \theta$.

De la formule (420 ; 1) on déduit :

$$\vec{V} \cdot \vec{V'} = \|\vec{V}\| \cdot \|\vec{V'}\| \cdot \cos\theta \qquad (861 ; 1)$$

D'où :

Le produit de deux vecteurs est égal au produit des normes de ces vecteurs et du cosinus de leur angle.

2° Si les vecteurs sont unitaires : $\|\vec{V}\| = 1$ et $\|\vec{V'}\| = 1$, on a :

$$\vec{V} \cdot \vec{V'} = \cos\theta \qquad (861 ; 2)$$

D'où :

Le produit scalaire de deux vecteurs unitaires est égal au cosinus de l'angle de ces deux vecteurs.

3° Soient deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ respectivement parallèles aux axes $x'Ox$ et $u'Ou$ de vecteurs unitaires $\vec{i}$ et $\vec{u}$ (fig. 861 *a*).

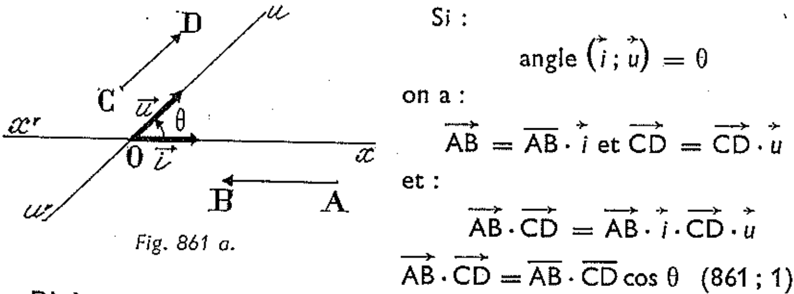


Fig. 861 a.

Si :

$$\text{angle}\,(\vec{i}\,;\vec{u}) = \theta$$

on a :

$$\overrightarrow{AB} = \overline{AB}\cdot\vec{i} \text{ et } \overrightarrow{CD} = \overline{CD}\cdot\vec{u}$$

et :

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} = \overline{AB}\cdot\vec{i}\cdot\overline{CD}\cdot\vec{u}$$

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} = \overline{AB}\cdot\overline{CD}\cos\theta \quad (861\,;1)$$

D'où :

Le produit scalaire de deux vecteurs parallèles à des axes est égal au produit des mesures algébriques des vecteurs et du cosinus de l'angle des deux axes.

862. Déterminant d'un bivecteur du plan.

1° Soient deux vecteurs $\vec{V}$ et $\vec{V}'$ avec $\overline{\text{angle}}\,(\vec{V}\,;\vec{V}') = \theta$.

De la formule (422 ; 1), on déduit :

$$\text{Det}\,(\vec{V}\,;\vec{V}') = \|\vec{V}\|\cdot\|\vec{V}'\|\cdot\sin\theta. \qquad (862\,;1)$$

D'où :

Le déterminant d'un bivecteur du plan R^2 est égal au produit des normes de ces vecteurs et du sinus de l'angle du bivecteur.

2° Si les vecteurs sont unitaires : $\|\vec{V}\| = 1$ et $\|\vec{V}'\| = 1$, on a :

$$\text{Det}\,(\vec{V}\,;\vec{V}') = \sin\theta \qquad (862\,;2)$$

D'où :

Le déterminant d'un bivecteur constitué par deux vecteurs unitaires est égal au sinus de l'angle du bivecteur.

3° Soient deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ respectivement parallèles aux axes $x'Ox$ et $u'Ou$ de vecteurs unitaires $\vec{i}$ et $\vec{u}$ (fig. 861 *a*).

Si

$$\overline{\text{angle}}\,(\vec{i}\,;\vec{u}) = \theta$$

on a :

$$\overrightarrow{AB} = \overline{AB}\cdot\vec{i} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{CD} = \overline{CD}\cdot\vec{u}$$

et :

$$\text{Det}\,(\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{CD}) = \text{Det}\,(\overline{AB}\,\vec{i}\,;\,\overline{CD}\cdot\vec{u})$$
$$= \overline{AB}\cdot\overline{CD}\cdot\text{Det}\,(\vec{i}\,;\,\vec{u})$$
$$= \overline{AB}\cdot\overline{CD}\sin\theta$$

D'où :

Le déterminant d'un bivecteur constitué par deux vecteurs parallèles à des axes est égal au produit des mesures algébriques des vecteurs et du sinus de l'angle du bivecteur.

863. Signification géométrique du cosinus et du sinus.

Soit sur le cercle trigonométrique (U), rapporté à deux axes orthonormés $x'Ox$ et $y'Oy$, de vecteurs unitaires $\overrightarrow{OI} = \vec{i}$ et $\overrightarrow{OJ} = \vec{j}$, on marque le point M tel que

$$\overline{\text{angle}}\,(\vec{i}\,;\,\overrightarrow{OM}) = \theta, \text{ mod } 2\pi$$

ou

$$\overline{\text{arc}}\,\text{IM} = \theta, \text{ mod } 2\pi$$

Le point M se projette orthogonalement en C et S sur $x'Ox$ et $y'Oy$ (fig. 863 *a, b, c, d*).

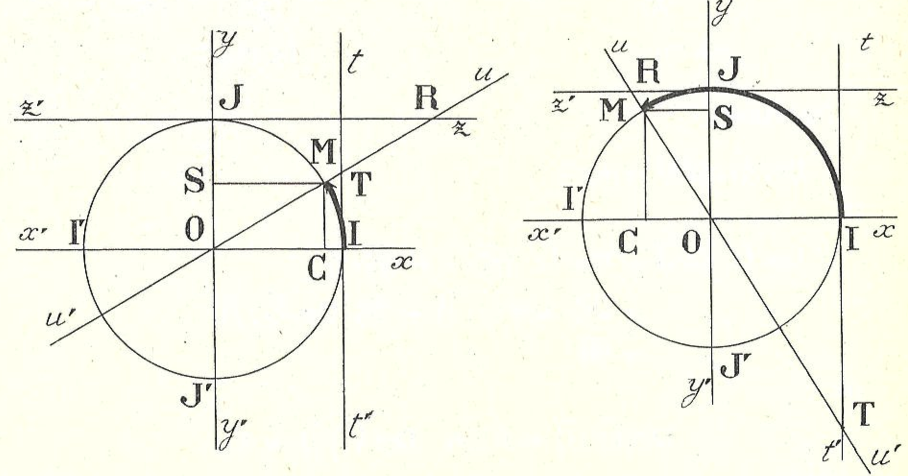


Fig. 863 a. *Fig. 863 b.*

On a :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OS}$$
$$= \overline{OC}\cdot\vec{i} + \overline{OS}\cdot\vec{j}$$

D'où :

$$\vec{i} \cdot \overrightarrow{OM} = \cos \theta$$

et

$$\vec{i} \cdot \overrightarrow{OM} = \vec{i} \cdot (\overline{OC}\,\vec{i} + \overline{OS} \cdot \vec{j})$$
$$= \overline{OC}$$

Donc :



$$\overline{OC} = \cos \theta \qquad (863\,;\,1)$$

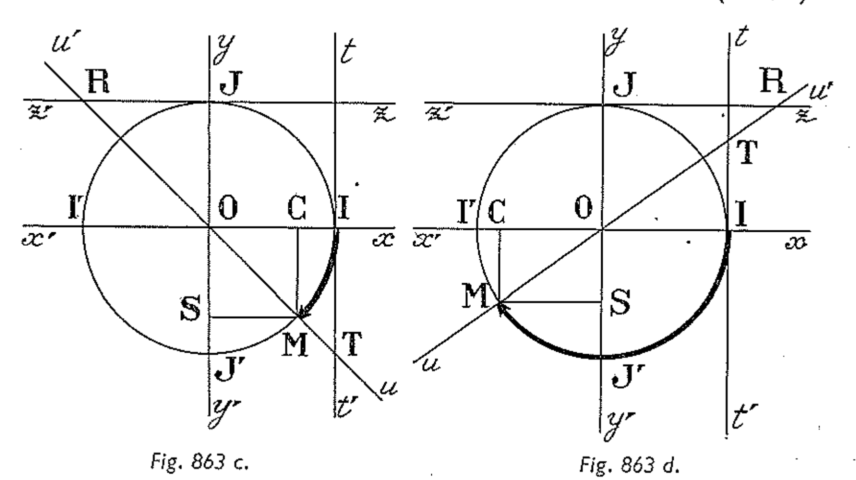


Fig. 863 c. *Fig. 863 d.*

De même :

$$\text{Det}\,(\vec{i}\,;\,\overrightarrow{OM}) = \sin \theta$$

et

$$\text{Det}\,(\vec{i}\,;\,\overrightarrow{OM}) = \text{Det}\,(\vec{i}\,;\,\overline{OC} \cdot \vec{i} + \overline{OS} \cdot \vec{j})$$
$$= \overline{OC} \cdot \text{Det}\,(\vec{i}\,;\,\vec{i}) + \overline{OS} \cdot \text{Det}\,(\vec{i}\,;\,\vec{j})$$
$$= \overline{OS}$$

car

$$\text{Det}\,(\vec{i}\,;\,\vec{i}) = 0 \quad \text{et} \quad \text{Det}\,(\vec{i}\,;\,\vec{j}) = 1$$

Donc

$$\overline{OS} = \sin \theta \qquad (863\,;\,2)$$

On a aussi :

$$\overrightarrow{OM} = \cos \theta \cdot \vec{i} + \sin \theta \cdot \vec{j} \qquad (863\,;\,3)$$

864. Tangente et cotangente d'un angle ou d'un arc.

On mène l'axe $t'It$ équipollent à $y'Oy$, et l'axe $z'Jz$ équipollent à $x'Ox$. La droite $u'Ou$ coupe $t't$ en T et $z'z$ en R (fig. 463 *a*, *b*, *c*, *d*).

On appelle tangente de l'angle θ (ou de l'arc θ) la mesure algébrique du vecteur $\overrightarrow{IT}$.

On note :

$$\overline{IT} = \text{tg}\,\theta \qquad (864:1)$$

On appelle cotangente de l'angle θ (ou de l'arc θ) la mesure algébrique du vecteur $\overrightarrow{JR}$.

On note :

$$\overline{JR} = \text{cotg}\,\theta \qquad (864;2)$$

Le sinus, le cosinus, la tangente et la cotangente sont les fonctions circulaires de l'angle θ.

865. Relations entre les fonctions circulaires d'un même angle.

1° En exprimant que $d(\text{OM}) = 1$ on a :

$$\mathbf{cos^2\,\theta + sin^2\,\theta = 1} \qquad (865;1)$$

2° Les triangles OCM et OIT sont homothétiques, et on a la relation algébrique :

$$\frac{\overline{IT}}{\overline{CM}} = \frac{\overline{OI}}{\overline{OC}}$$

ou, puisque $\overline{CM} = \overline{OS}$:

$$\frac{\overline{IT}}{\overline{OS}} = \frac{\overline{OI}}{\overline{OC}}$$

D'où on tire :

$$\mathbf{tg\,\theta = \frac{sin\,\theta}{cos\,\theta}} \qquad (865;2)$$

3° De même les triangles OSM et OJR sont homothétiques, et on a la relation algébrique :

$$\frac{\overline{JR}}{\overline{SM}} = \frac{\overline{OJ}}{\overline{OS}}$$

ou, puisque $\overline{SM} = \overline{OC}$:

$$\frac{\overline{JR}}{\overline{OC}} = \frac{\overline{OJ}}{\overline{OS}}$$

D'où on tire :

$$\textbf{cotg}\ \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \qquad (865\,;3)$$

4° En comparant (865 ; 2) et (865 ; 3), on déduit :

$$\textbf{cotg}\ \theta = \frac{1}{\text{tg}\ \theta} \qquad (865\,;4)$$

ou sous une autre forme :

$$\text{tg}\ \theta \cdot \text{cotg}\ \theta = 1 \qquad (865\,;5)$$

5° En divisant la relation (865 ; 1) par $\cos^2 \theta$ ($\cos \theta \neq 0$), il vient :

$$1 + \text{tg}^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta} \qquad (865\,;6)$$

ou encore :

$$\cos^2 \theta = \frac{1}{1 + \text{tg}^2 \theta} \qquad (865\,;7)$$

6° En divisant la relation (865 ; 1) par $\sin^2 \theta$ ($\sin \theta \neq 0$), il vient :

$$1 + \text{cotg}^2 \theta = \frac{1}{\sin^2 \theta} \qquad (865\,;8)$$

ou encore :

$$\sin^2 \theta = \frac{1}{1 + \text{cotg}^2 \theta} \qquad (865\,;9)$$

En remplaçant cotg θ en fonction de tg θ :

$$\sin^2 \theta = \frac{\text{tg}^2 \theta}{1 + \text{tg}^2 \theta} \qquad (865\,;10)$$

866. Coordonnées polaires d'un point dans le plan métrique.

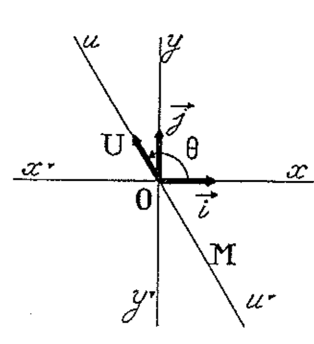


Fig. 866 a.

Le plan (P) est rapporté à une base orthonormée (fig. 866 *a*).

Un point M situé sur un axe *u'Ou* est déterminé par :

$$\overline{\text{angle}}\,(Ox\,;Ou) = \theta \quad \text{et} \quad \overline{OM} = r.$$

θ et r sont les coordonnées polaires du point M.

Si $\overrightarrow{OU}$ est le vecteur unitaire de l'axe O*u*, on peut écrire :

$$\overrightarrow{OM} = r \cdot \overrightarrow{OU}$$

ou encore :

$$\overrightarrow{OM} = r\left(\cos\theta\cdot\vec{i} + \sin\theta\cdot\vec{j}\right)$$
$$= r\cos\theta\cdot\vec{i} + r\sin\theta\cdot\vec{j}$$

Par suite, puisque :

$$\overrightarrow{OM} = x\cdot\vec{i} + y\cdot\vec{j}$$

on a :

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta. \end{cases} \qquad (866\,;\,1)$$

867. Projection orthogonale d'un vecteur sur un axe.

Soient un vecteur AB et sa projection orthogonale $\overrightarrow{A'B'}$ sur un axe $x'Ox$ de vecteur unitaire $\vec{i}$ (fig. 867 *a*, *b*).

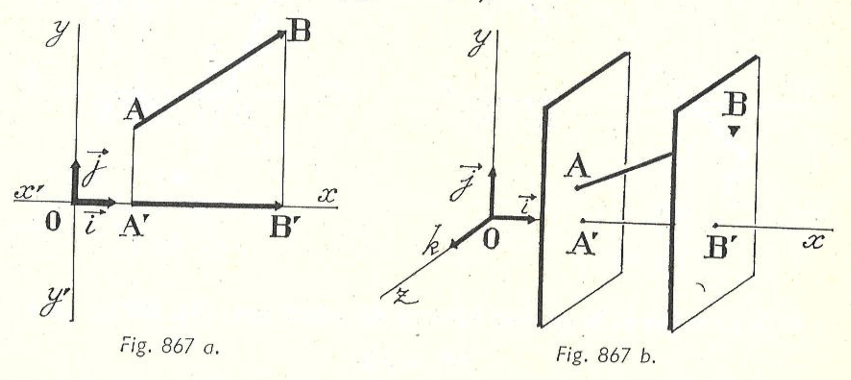


Fig. 867 *a*. Fig. 867 *b*.

Si l'espace est rapporté à une base orthonormée $(\vec{i}\,;\,\vec{j}\,;\,\vec{k})$, on a :

$$\overrightarrow{AB}\cdot\vec{i} = X\cdot 1 + Y\cdot 0 + Z\cdot 0$$
$$= X$$
$$= \overline{A'B'}$$

D'où la formule fondamentale :

$$\overline{A'B'} = \vec{i}\cdot\overrightarrow{AB}. \qquad (867\,;\,1)$$

La mesure algébrique de la projection orthogonale d'un vecteur sur un axe est égale au produit scalaire du vecteur et du vecteur unitaire de l'axe.

1° Si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OM}$, les coordonnées X et Y de $\overrightarrow{AB}$ sont d'après (866 ; 1) :

$$X = \overline{AB} \cdot \cos \theta \qquad (867 ; 2)$$
$$Y = \overline{AB} \cdot \sin \theta.$$

2° En ne retenant que le premier résultat, qui s'écrit si $\overrightarrow{A'B'}$ est la projection de $\overrightarrow{AB}$ sur $x'Ox$ (fig. 867 *c*)

$$\overline{A'B'} = \overline{AB} \cdot \cos (Ox; Ou), \qquad (867;3)$$

on peut énoncer :

La mesure algébrique de la projection orthogonale d'un vecteur parallèle à un axe sur un second axe est égale au produit de la mesure algébrique du vecteur par le cosinus de l'angle des deux axes.

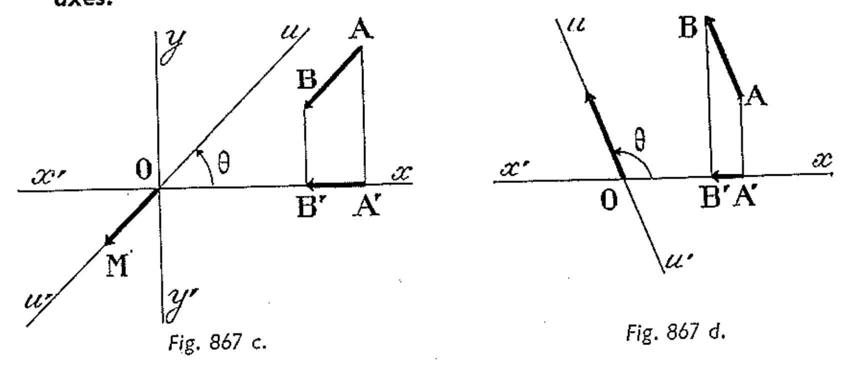


Fig. 867 c. *Fig. 867 d.*

3° Si l'axe Ou et le vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont de même sens (fig. 867 *d*), on a :

$$AB = \overline{AB}$$

et

$$\overline{\text{angle}}\,(Ox ; Ou) = \overline{\text{angle}}\,(Ox ; \overrightarrow{AB})$$

L'égalité (867 ; 3) devient :

$$\overline{A'B'} = AB \cdot \cos (Ox ; \overrightarrow{AB})$$

et on peut énoncer :

La mesure algébrique de la projection orthogonale d'un vecteur sur un axe est égale au produit de la longueur du vecteur par le cosinus de l'angle de l'axe et du vecteur.

4° Des formules (867 ; 2) on tire :

$$\text{tg}\,(Ox ; \overrightarrow{AB}) = \frac{Y}{X}. \qquad (867 ; 4)$$

868. Produit scalaire et projection orthogonale.

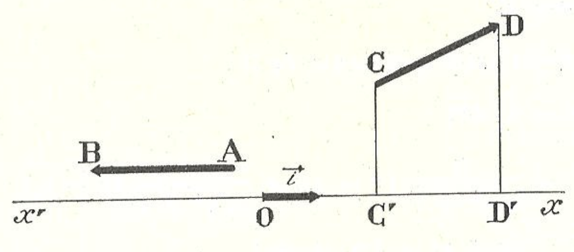


Fig. 868 a.

Soient $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ deux vecteurs donnés, et $x'Ox$ un axe de vecteur unitaire $\vec{i}$ parallèle au vecteur $\overrightarrow{AB}$, on a (fig. 868 *a*, *b*) :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = (\overrightarrow{AB} \cdot \vec{i}) \cdot \overrightarrow{CD}$$
$$= \overline{AB} \cdot (\vec{i} \cdot \overrightarrow{CD})$$

D'où, $\overrightarrow{C'D'}$ étant la projection de $\overrightarrow{CD}$ sur $x'Ox$:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overline{AB} \cdot \overline{C'D'} \qquad (868\,;1)$$

On a aussi :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{C'D'} \qquad (868\,;2)$$

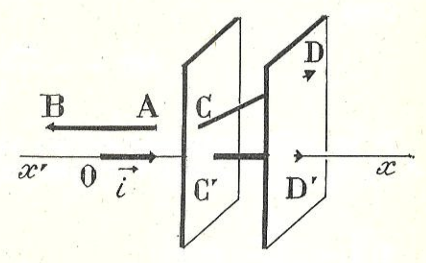


Fig. 868 b.

869. Distance d'un point à une droite; à un plan.

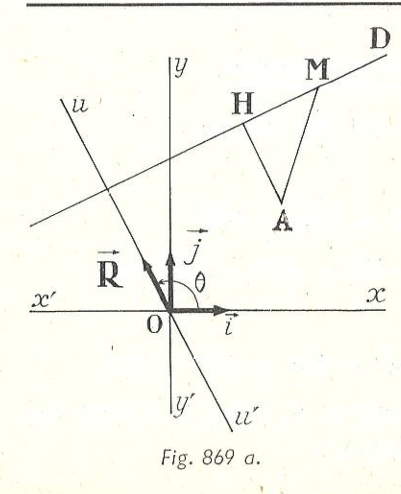


Fig. 869 a.

1° Dans le plan rapporté à deux axes orthonormés on considère la droite D d'équation $ux + vy + r = 0$ et le point A $(x_0;\ y_0)$. Le point A se projette orthogonalement en H sur D (fig. 869 *a*).

Le vecteur $\vec{N}\,(u;\ v)$ est normal à D; soient $\vec{R} = \dfrac{\vec{N}}{\|\vec{N}\|}$ le vecteur unitaire associé à $\vec{N}$, et $u'Ou$ l'axe de vecteur unitaire R. Les coordonnées de $\vec{R}$ sont $\left(\dfrac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}};\ \dfrac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}}\right)$.

On appelle $\overline{AH}$ la distance algébrique de A à D relativement au vecteur $\vec{R}$.

On a, si M est point quelconque de D :

$$\overline{AH} = \vec{R} \cdot \overrightarrow{AM}$$

$$= \frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}}(x - x_0) + \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}}(y - y_0)$$

$$= \frac{ux + vy - (ux_0 + vy_0)}{\sqrt{u^2 + v^2}}$$

Or puisque M $(x; y)$ appartient à D, on a $ux + vy + r = 0$ ou $ux + vy = -r$.

D'où :

$$\overrightarrow{AH} = -\frac{\mathbf{u}\mathbf{x}_0 + \mathbf{v}\mathbf{y}_0 + \mathbf{r}}{\sqrt{\mathbf{u}^2 + \mathbf{v}^2}} \qquad (869 ; 1)$$

2° Le même raisonnement est valable dans l'espace pour le point A $(x_0; y_0; z_0)$ et le plan P d'équation $ux + vy + wz + r = 0$.

Si $\vec{R} = \frac{\vec{N}}{\|\vec{N}\|}$, on a :

$$\overline{AH} = -\frac{\mathbf{u}\mathbf{x}_0 + \mathbf{v}\mathbf{y}_0 + \mathbf{w}\mathbf{z}_0 + \mathbf{r}}{\sqrt{\mathbf{u}^2 + \mathbf{v}^2 + \mathbf{w}^2}} \qquad (869 ; 2)$$

870. Conditions de rectangularité d'un triangle.

Soit un triangle ABC et sa hauteur AH (fig. 870 *a*).

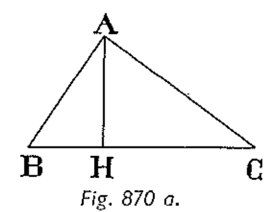


Fig. 870 a.

1° On a :

$$BC^2 = (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})^2$$

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$$

ou :

$$2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB^2 + AC^2 - BC^2.$$

Pour que le triangle ABC soit rectangle en A, il faut et il suffit que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$, donc que $AB^2 + AC^2 - BC^2 = 0$.

Et on peut énoncer :

Une condition nécessaire et suffisante pour que le triangle ABC soit rectangle en A est que l'on ait la relation :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 \qquad (870 ; 1)$$

2° On a :

$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BA}(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA}) = \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} - BA^2$$
$$= \overline{BC} \cdot \overline{BH} - BA^2.$$

Pour que le triangle ABC soit rectangle en A, il faut et il suffit que $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$, donc que

$$\overline{BC} \cdot \overline{BH} - BC^2 = 0.$$

Et on peut énoncer :

Une condition nécessaire et suffisante pour que le triangle ABC, de hauteur AH, soit rectangle en A est que l'on ait la relation algébrique :

$$BA^2 = \overline{BC} \cdot \overline{BH} \qquad (870 ; 2)$$

De même :

$$CA^2 = \overline{CB} \cdot \overline{CH} \qquad (870 ; 3)$$

est une autre condition nécessaire et suffisante.

3° On a :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = (\overrightarrow{HB} - \overrightarrow{HA})(\overrightarrow{HC} - \overrightarrow{HA})$$
$$= \overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{HC} - \overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{HA} - \overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{HC} + HA^2$$
$$= \overline{HB} \cdot \overline{HC} + HA^2$$

car $\quad \overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{HA} = 0 \quad$ et $\quad \overrightarrow{HC} \cdot \overrightarrow{HA} = 0.$

Pour que le triangle ABC soit rectangle en A il faut et il suffit que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$, donc que $\overline{HB} \cdot \overline{HC} = -HA^2$.

Et on peut énoncer :

Une condition nécessaire et suffisante pour que le triangle ABC, de hauteur AH, soit rectangle en A, est que l'on ait la relation algébrique

$$\overline{HB} \cdot \overline{HC} = -HA^2. \qquad (870 ; 4)$$

871. Relations arithmétiques dans le triangle rectangle.

Soit un triangle ABC, rectangle en A et de hauteur AH.

On pose :

$$BC = a \qquad CA = b \qquad AB = c$$
$$AH = h \qquad HC = b' \qquad HB = c'.$$

On a évidemment :

$$\mathbf{b' + c' = a.} \qquad (871;1)$$

1° De (870; 1) on tire la formule (théorème de Pythagore) :

$$\mathbf{a^2 = b^2 + c^2.} \qquad (871;2)$$

2° De (870; 2) et (870; 3) on tire :

$$\mathbf{b^2 = ab'} \qquad (871;3)$$
$$\mathbf{c^2 = ac'.} \qquad (871;4)$$

D'où l'énoncé :

Dans un triangle rectangle le carré d'un côté de l'angle droit est égal au produit de l'hypoténuse et de sa projection sur l'hypoténuse.

3° De (870; 4) on tire :

$$\mathbf{b'c' = h^2.} \qquad (871;5)$$

D'où l'énoncé :

Dans un triangle rectangle, le carré de la hauteur est égal au produit des longueurs des segments déterminés par la hauteur sur l'hypoténuse.

4° En faisant le rapport des égalités (871; 3) et (871; 4), on obtient :

$$\mathbf{\frac{b^2}{c^2} = \frac{b'}{c'}} \qquad (871;6)$$

D'où l'énoncé :

Dans un triangle rectangle, le rapport des carrés des côtés de l'angle droit est égal au rapport des projections de ces côtés sur l'hypoténuse.

5° En faisant le produit des égalités (871; 3) et (871; 4) on obtient :

$$b^2c^2 = a^2b'c'$$

ou :

$$b^2c^2 = a^2h^2$$

et enfin :

$$\mathbf{bc = ah} \qquad (871;7)$$

D'où l'énoncé :

Dans un triangle rectangle, le produit des deux côtés de l'angle droit est égal au produit de l'hypoténuse et de la hauteur.

6° De la relation (871 ; 7) on déduit :

$$\frac{a^2}{b^2} = \frac{c^2}{h^2} \quad \text{et} \quad \frac{a^2}{c^2} = \frac{b^2}{h^2}.$$

D'où par addition :

$$\frac{a^2}{b^2} + \frac{a^2}{c^2} = \frac{b^2 + c^2}{h^2}$$

$$= \frac{a^2}{h^2}.$$

En divisant par a^2, on obtient :

$$\frac{1}{\mathbf{b}^2} + \frac{1}{\mathbf{c}^2} = \frac{1}{\mathbf{h}^2}. \qquad (871 ; 8)$$

D'où l'énoncé :

Dans un triangle rectangle, la somme des inverses des carrés des côtés de l'angle droit est égale à l'inverse du carré de la hauteur.

872. Relations trigonométriques dans le triangle rectangle.

A un triangle ABC rectangle en A on associe une base orthonormée d'origine B; le vecteur $\vec{i}$ est porté par la demi-droite BA et le vecteur $\vec{j}$ est parallèle à $\overrightarrow{AC}$ et de même sens (fig. 872 *a*).

En posant BC = a, les coordonnées du point C sont :

$$x = a \cos B \qquad (872; 1)$$

$$y = a \sin B. \qquad (872; 2)$$

Par suite :

$$c = a \cdot \cos B \qquad (872; 3)$$

$$b = a \cdot \sin B \qquad (872; 4)$$

Fig. 872 a.

et on peut énoncer :

Dans un triangle rectangle, un côté de l'angle droit est égal au produit de l'hypoténuse et du cosinus de l'angle aigu adjacent.

Dans un triangle rectangle, un côté de l'angle droit est égal au produit de l'hypoténuse et du sinus de l'angle opposé.

Les formules (872 ; 3) et (872 ; 4) s'écrivent :

$$\cos B = \frac{c}{a} \qquad (872\,;\,5)$$

$$\sin B = \frac{b}{a} \qquad (872\,;\,6)$$

et on peut énoncer :

Un angle aigu d'un triangle rectangle a pour cosinus le rapport du côté de l'angle droit adjacent à l'angle et de l'hypoténuse.

Un angle aigu d'un triangle rectangle a pour sinus le rapport du côté opposé à l'angle et de l'hypoténuse.

Des relations (872; 1) et (872; 2) on tire encore par division

$$\operatorname{tg} B = \frac{b}{c}\cdot \qquad (872\,;\,7)$$

D'où l'énoncé :

Un angle aigu d'un triangle rectangle a pour tangente le rapport du côté opposé à l'angle et de l'autre côté de l'angle droit.

La formule (872; 7) s'écrit :

$$b = c \,.\, \operatorname{tg} B. \qquad (872;\,8)$$

D'où l'énoncé :

Dans un triangle rectangle, un côté de l'angle droit est égal au produit de l'autre côté de l'angle droit par la tangente de l'angle aigu opposé.

Les angles B et C étant complémentaires tg B = cotg C, et la relation (872; 8) devient :

$$b = c \cdot \operatorname{cotg} C. \qquad (872;\,9)$$

D'où l'énoncé :

Dans un triangle rectangle, un côté de l'angle droit est égal au produit de l'autre côté de l'angle droit par la cotangente de l'angle aigu adjacent.

La formule (872 ; 9) s'écrit encore :

$$\operatorname{cotg} C = \frac{b}{c}\cdot \qquad (872\,;\,10)$$

D'où l'énoncé :

Un angle aigu d'un triangle rectangle a pour cotangente le rapport du côté de l'angle droit adjacent à l'angle et de l'autre côté de l'angle droit.

873. Relations trigonométriques dans un triangle quelconque.

1° Soit un triangle ABC quelconque; on a (fig. 873 *a*, *b*) :

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$$

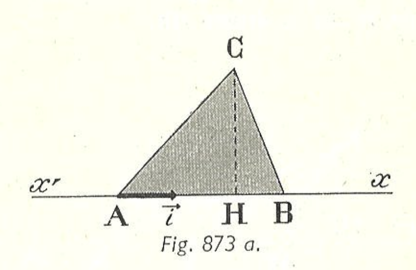


Fig. 873 a.

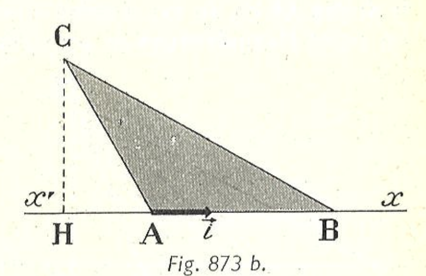


Fig. 873 b.

En élevant au carré il vient :

$$BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2\,\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}$$

ou

$$\mathbf{a^2 = b^2 + c^2 - 2\,bc \cos A} \qquad (873;\ 1)$$

Par permutation circulaire on obtient deux autres formules :

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2\,ca \cos B$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\,ab \cos C.$$

En remarquant que $b \cos A = \overline{AH}$ (H, projection de C sur l'axe $x'ABx$), la formule (873; 1) s'écrit :

$$\boldsymbol{BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\,\overline{AB} \cdot \overline{AH}} \qquad (873\ ;\ 2)$$

2° On a :

$$\overrightarrow{BC}^2 = \overrightarrow{BC} \cdot (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})$$
$$= \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AC}$$
$$= \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA}$$

ou

$$a^2 = ac \cdot \cos B + ab \cdot \cos C$$

En divisant par a, on obtient :

$$\mathbf{a = b \cdot \cos \mathit{C} + c \cdot \cos \mathit{B}}.$$

Par permutation circulaire on obtient deux autres formules :

$$b = c \cdot \cos A + a \cdot \cos C$$
$$c = a \cdot \cos B + b \cdot \cos A.$$

874. Somme et différence des carrés des distances d'un point à deux autres points.

Soient un segment AB et son milieu I (fig. 874 *a*, *b*). On transforme la droite AB en un axe orienté positivement de A vers B. On considère un point M quelconque se projetant en H sur la droite AB.

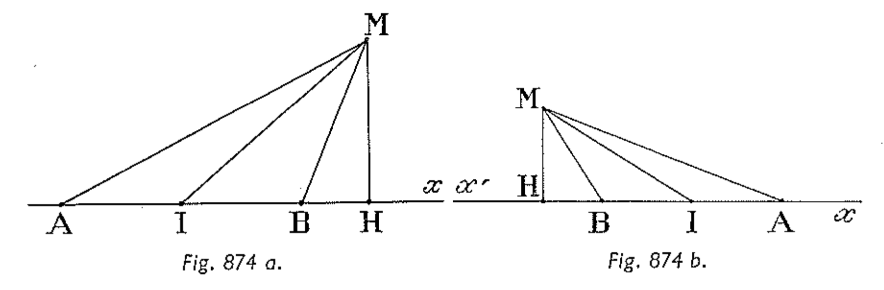


Fig. 874 a. *Fig. 874 b.*

Dans les triangles MAI et MBI, on a :

$$MA^2 = IM^2 + IA^2 - 2\cdot\overline{IA}\cdot\overline{IH}$$

et :

$$MB^2 = IM^2 + IB^2 - 2\cdot\overline{IB}\cdot\overline{IH}$$
$$= IM^2 + IA^2 + 2\cdot\overline{IA}\cdot\overline{IH}$$

car $\overline{IB} = -\overline{IA}$.

Par addition on obtient :

$$\mathbf{MA^2 + MB^2 = 2\cdot IM^2 + 2\cdot IA^2} \qquad (874;1)$$

Par soustraction on obtient :

$$MA^2 - MB^2 = -4\cdot\overline{IA}\cdot\overline{IH}$$

ou :

$$\boldsymbol{MA^2 - MB^2 = 2\cdot\overline{AB}\cdot\overline{IH}} \qquad (874;2)$$

car $\overline{AB} = -2\cdot\overline{IA}$.

Ces relations (874; 1) et (874; 2) donnent la somme et la différence des carrés des distances d'un point M à deux autres points A et B.

875. Expressions des médianes d'un triangle en fonction des côtés.

Dans le triangle ABC, de médiane AI $= m_a$ (fig. 875 *a*) on a d'après (874; 1) :

$$AB^2 + AC^2 = 2\cdot IA^2 + 2\cdot IB^2$$

ou :

$$b^2 + c^2 = 2m_a^2 + \frac{a^2}{2}\cdot \qquad (875;1)$$

On a tiré :

$$m_a^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4}. \qquad (875\,;\,1)$$

D'où :

$$m_a = \sqrt{\frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4}} \qquad (875\,;\,2)$$

On déduit les médianes m_b et m_c par permutation circulaire.

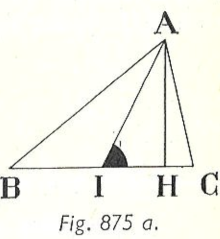


Fig. 875 a.

876. Hauteurs d'un triangle.

Soit un triangle ABC et la hauteur AH.

Si l'angle B est aigu (fig. 876 *a*), dans le triangle rectangle HAB on a :

$$AH = AB \,.\, \sin B.$$

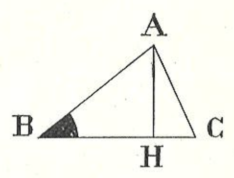


Fig. 876 a.

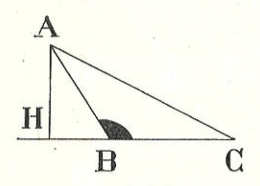


Fig. 876 b.

Si l'angle B est obtus (fig. 876 *b*), dans le triangle rectangle HAB, on a :

$$AH = AB \,.\, \sin (\pi - B)$$
$$= AB \,.\, \sin B.$$

Dans les deux cas, on a donc :

$$AH = AB \,.\, \sin B$$

c'est-à-dire : $h_a = c \,.\, \sin B$ (876; 1)

De même : $h_a = b \,.\, \sin C.$ (876; 2)

On déduit h_b et h_c des formules précédentes par permutations circulaires.

877. Etude de deux ensembles de points.

1° ***Ensemble des points M du plan tels que $MA^2 - MB^2 = k$, k étant un nombre relatif donné et A, B deux points fixes donnés.***

Une condition nécessaire et suffisante pour que M soit un point de l'ensemble est évidemment que (fig. 877 *a*) :

$$MA^2 - MB^2 = k \qquad (877;\,1)$$

En remarquant que

$$MA^2 - MB^2 = 2 \cdot \overline{AB} \cdot \overline{IH},$$

I étant le milieu de AB et H la projection de M sur la droite AB, la condition (877; 1) est équivalente à la condition :

$$2 \cdot \overline{AB} \cdot \overline{IH} = k \qquad (877;2)$$

ou :

$$\overline{IH} = \frac{k}{2 \cdot AB} \qquad (877;3)$$

c'est-à-dire que la projection H de M sur la droite AB est fixe. Donc :

L'ensemble des points M du plan tels que $MA^2 - MB^2 = k$ est la perpendiculaire (D) à la droite AB au point H déterminé par la relation (877; 3).

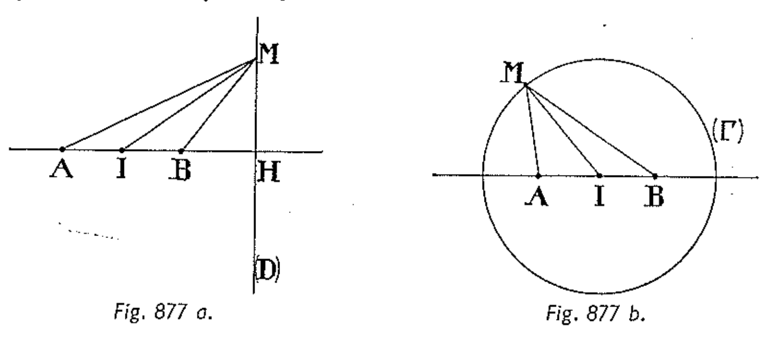


Fig. 877 a. *Fig. 877 b.*

Remarque. Dans l'espace, le lieu cherché est le plan perpendiculaire en H à la droite AB. Et :

L'ensemble des points M de l'espace tels que $MA^2 - MB^2 = k$ est le plan (P) perpendiculaire à la droite AB au point H déterminé par la relation (877; 3).

2° ***Ensemble des points M du plan tels que***

$$MA^2 + MB^2 = k^2,$$

k^2 étant un nombre positif donné et A, B deux points fixes donnés.

Une condition nécessaire et suffisante pour que M soit un point de l'ensemble est évidemment que (fig. 877 *b*) :

$$MA^2 + MB^2 = k^2 \qquad (877;4)$$

En remarquant que $MA^2 + MB^2 = 2 \cdot IM^2 + 2 \cdot IA^2$, I étant le milieu de AB, la condition (877; 1) est équivalente à la condition :

$$2 \cdot IM^2 + 2 \cdot IA^2 = k^2 \qquad (877;5)$$

ou :

$$IM^2 = \frac{k^2 - 2 \cdot IA^2}{2} \qquad (877;6)$$

D'où la discussion suivante :

Si $k^2 < 2 \cdot IA^2$, le second membre de (877; 6) est négatif; l'ensemble est vide.

Si $k^2 = 2 \cdot IA^2$, le second membre de (877; 6) est nul, et on a $IM = 0$. L'ensemble ne contient que le seul point I.

Si $k^2 > 2 \cdot IA^2$, le second membre de (877; 6) est positif, et on a :

$$IM = \sqrt{\frac{k^2 - 2 \cdot IA^2}{2}}$$

La distance IM est constante. L'ensemble est le cercle (L) de centre I et de rayon

$$\rho = \sqrt{\frac{k^2 - 2 \cdot IA^2}{2}}.$$

Dans le cas particulier, où $k^2 = 4 \cdot IA^2 = AB^2$, l'ensemble est le cercle de diamètre AB.

Remarque. Dans l'espace, on a le résultat suivant :

Si $k^2 < 2 \cdot IA^2$, l'ensemble est vide.

Si $k^2 = 2 \cdot IA^2$, l'ensemble ne contient que le point I.

Si $k^2 > 2 \cdot IA^2$, l'ensemble est constitué par les points de l'espace situés à la distance ρ de I, c'est-à-dire par la sphère de centre I et de rayon ρ.

878. Valeurs des fonctions circulaires des arcs remarquables.

On établit facilement le tableau suivant (1) :

Angles									
degrés	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
radians	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
Sinus	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
Cosinus	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
Tangente	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
Cotangente	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$\sqrt{3}$	∞

(1) Cf. Classes de Seconde et de Première.

879. Tables trigonométriques.

En dehors des arcs simples et remarquables précédents (fig. 879 *a*), le calcul des fonctions circulaires d'un arc est compliqué. Aussi les valeurs des fonctions circulaires ont été groupées dans des tables. Ces tables donnent les valeurs des fonctions circulaires des angles de degré en degré, ou des angles de grade en grade, avec trois décimales.

On trouvera ces tables à la fin de ce manuel.

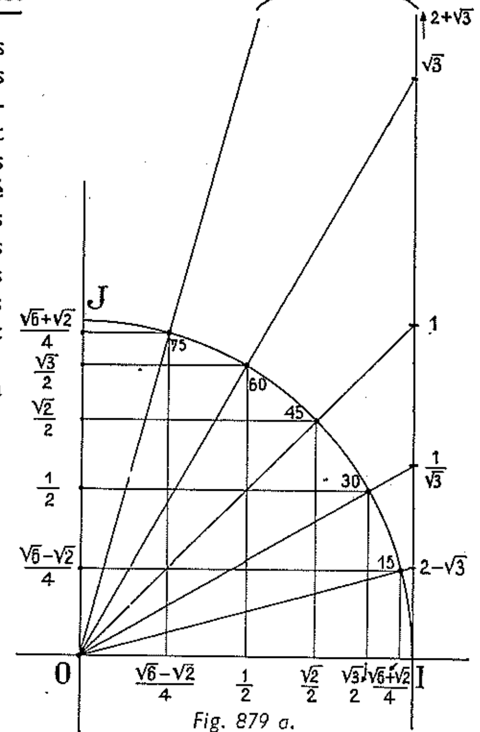


Fig. 879 a.

880. Disposition des tables.

On réduit les tables de moitié; en remarquant que, si deux angles sont complémentaires, le sinus de l'un est égal au cosinus de l'autre, et la tangente de l'un égale à la tangente de l'autre.

La table est à double entrée.

Il faut lire, bien entendu, les indications des colonnes toutes en haut pour les arcs inférieurs à 45°, toutes en bas pour les arcs supérieurs à 45°.

Voici un extrait de la table correspondant aux angles en degrés.

Degrés	Sinus	D	Tangente	D	Cotangente	D	Cosinus	D	
0 1	....	... ...	....	... ...	....	... ...	....	... ...	90 89
27 28	0,454 0,469	15	0,510 0,532	22	1,963 1,881	82	0,891 0,883	8	63 62
44 45	....	... ...	....	... ...	....	... ...	....	... ...	46 45
	Cosinus	D	Cotangente	D	Tangente	D	Sinus	D	Degrés

881. Interpolation.

1° La table donne, par exemple :

$$\sin 27^\circ = 0{,}454$$
$$\sin 28^\circ = 0{,}469.$$

Elle ne donne pas les sinus des arcs compris entre 27° et 28°. Cependant il est possible de calculer, avec une précision convenable, les sinus des arcs compris entre 27° et 28° de minute en minute.

Pour cela, on admet qu'entre 27° et 28° les variations de l'arc et du sinus sont proportionnelles. On fait une interpolation.

La colonne D relative au sinus, donne la différence en millièmes entre sin 27° et sin 28°. On lit ici 15.

Pour obtenir la valeur de sin 27° 23′, par exemple, on ajoute à sin 27° la correction :

$$c = \frac{15 \times 23}{60} = \frac{23}{4} \# 6$$

On obtient ainsi :

$$\sin 27^\circ 23' = 0{,}454 + 0{,}006$$

ou :

$$\sin 27^\circ 23' = 0{,}460$$

2° De même la table donne :

$$\cos 27^\circ = 0{,}891$$
$$\cos 28^\circ = 0{,}883$$

La différence tabulaire D est 8; lorsque l'arc augmente (de 27° à 28°) le cosinus diminue.

Pour obtenir, par exemple, cos 27° 41′ il faut ajouter à cos 28° une correction correspondant à 60 — 41 = 19′, soit :

$$c = \frac{8 \times 19}{60} = \frac{152}{60} \# 2{,}53 \# 3$$

On a donc :

$$\cos 27^\circ 41' = 0{,}886.$$

On voit donc que, pour une interpolation, il convient de prendre dans la table la valeur à un degré près par défaut pour le sinus et la tangente, la valeur par excès pour le cosinus et la cotangente.

882. Problème inverse.

La table permet de résoudre le problème inverse.

Etant donnée la valeur d'une fonction circulaire d'un angle, trouver cet angle.

Exemple. — On donne $\operatorname{tg} x = 1{,}904$. Calculer x.

On voit dans la table que :

$$\operatorname{tg} 62^\circ < \operatorname{tg} x < \operatorname{tg} 63^\circ.$$

La différence tabulaire est $D = 82$. La différence δ en millièmes entre $\operatorname{tg} 62^\circ$ et $\operatorname{tg} x$ est 23. Il faut donc ajouter à 62° une correction :

$$\alpha = \frac{60' \times 23}{82} \# 17'$$

On a donc :

$$x = 62^\circ\, 17'$$

CHAPITRE LXII

LE CERCLE

883. Définition algébrique de la tangente en un point d'un cercle (1).

1° Soient un cercle C, de centre Ω et de rayon R, et un point A de ce cercle (fig. 883 *a*).

On appelle tangente en A au cercle C la perpendiculaire en A à la droite ΩA.

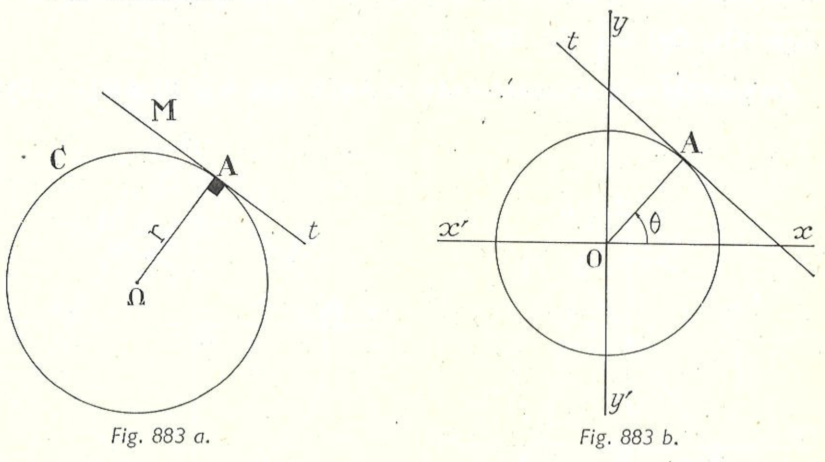


Fig. 883 a. *Fig. 883 b.*

L'équation vectorielle de la tangente est

$$\overrightarrow{\Omega A} \cdot \overrightarrow{AM} = 0 \qquad (883\,;\,1)$$

2° On suppose maintenant que le cercle est centré en O (fig. 883 *b*). On pose $\overline{\text{angle}}\left(Ox; \overrightarrow{OA}\right) = \theta$. L'équation de la tangente est obtenue immédiatement par son équation normale :

$$x \cos \theta + y \sin \theta - R = 0$$

---

(1) Cette définition est algébrique, car elle n'utilise pas la notion de limite. On montrera plus loin qu'elle est conforme à la définition topologique de la tangente à une courbe.

3° Soient une droite D d'équation $ux + vy + r = 0$ et le cercle $C = C(\Omega; R)$, le centre Ω ayant pour coordonnées $(x_0; y_0)$.

Pour que D soit tangente au cercle il faut et il suffit que la distance de Ω à D soit égale à R, c'est-à-dire :

$$\frac{|ux_0 + vy_0 + r|}{\sqrt{u^2 + v^2}} = R$$

884. Étude d'un ensemble de points. Cercle de Poncelet.

Soient, dans le plan euclidien, deux points A et B, et un angle θ. On se propose d'étudier l'ensemble des points M du plan tels que

$$\overline{\text{angle}}\,(MA; MB) = \theta, \bmod \pi.$$

Soit O le milieu du segment AB. On repère le plan par rapport à deux axes orthonormés $x'Ox$ et $y'Oy$; $x'Ox$ passant par A et B, avec $\overline{\text{angle}}\,(Ox; Oy) = \frac{\pi}{2}$ (fig. 884 *a*, *b*).

On pose $\overline{OA} = a$; les coordonnées de A et B sont A $(a; 0)$ et B $(-a; 0)$.

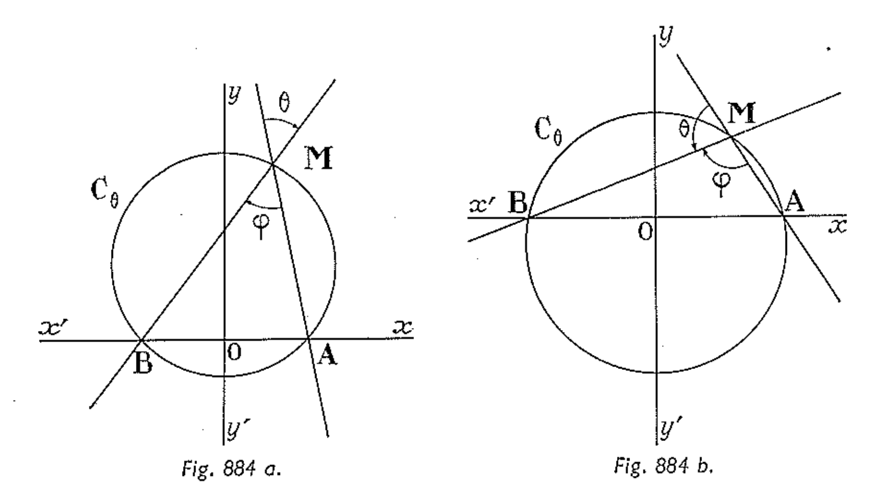


Fig. 884 a. *Fig. 884 b.*

Les vecteurs $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB}$ ont pour coordonnées :

$$\overrightarrow{MA}\left|\begin{matrix} a - x \\ -y \end{matrix}\right. \qquad \overrightarrow{MB}\left|\begin{matrix} -a - x \\ -y \end{matrix}\right.$$

En posant angle $(\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MB}) = \varphi$, on a $\theta = \varphi$, mod π.

D'autre part :

$$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = (a - x)(-a - x) + (-y)(-y) = x^2 + y^2 - a^2$$
$$= \left\|\overrightarrow{MA}\right\|\cdot\left\|\overrightarrow{MB}\right\|\cdot\cos\varphi$$

et

$$\text{Det}\left(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}\right) = \begin{vmatrix} a - x & -a - x \\ -y & -y \end{vmatrix} = -2ay = \left\|\overrightarrow{MA}\right\|\cdot\left\|\overrightarrow{MB}\right\|\cdot\sin\varphi.$$

D'où par division :

$$\text{tg}\,\varphi = \text{tg}\,\theta = \frac{-2ay}{x^2 + y^2 - a^2}.$$

L'équation de l'ensemble C_θ est donc :

$$\text{tg}\,\theta\cdot(x^2 + y^2 - a^2) = -2ay$$

ou

$$\mathbf{x^2 + y^2 + 2a\,\text{cotg}\,\theta\cdot y - a^2 = 0} \qquad (884;1)$$

C_θ est un cercle de centre Ω $(0; -a\,\text{cotg}\,\theta)$. Il passe par A et B. Le rayon R de ce cercle est donné par

$$R^2 = a^2\,\text{cotg}^2\,\theta + a^2$$
$$= a^2(1 + \text{cotg}^2\,\theta)$$
$$= \frac{a^2}{\sin^2\theta}$$

Le rayon est donc :

$$R = \frac{\mathbf{a}}{|\sin\theta|} = \frac{AB}{2\cdot|\sin\theta|} \qquad (884;2)$$

C_θ *est appelé un cercle de Poncelet.*

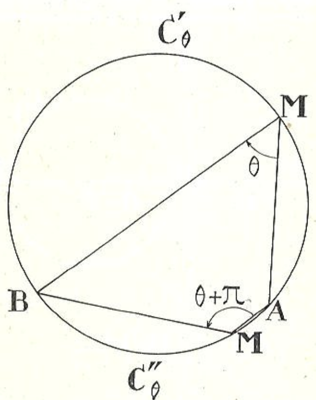


Fig. 884 c.

Remarque 1. Les points A et B déterminent sur le cercle C_θ deux arcs de cercle C'_θ et C''_θ : $C_\theta = C'_\theta \cup C''_\theta$ (fig. 884 c).

L'un est l'ensemble des points tels que $\overline{\text{angle}}\left(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}\right) = \theta$, mod 2π.

L'autre est l'ensemble des points tels que $\overline{\text{angle}}\left(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}\right) = \theta + \pi$, mod 2π (1).

---

(1) De ces résultats on peut aisément déduire les propriétés des angles inscrits et des quadrilatères inscriptibles, étudiées en seconde.

Remarque 2. Si $0 = 0$, l'ensemble C_0 des points M tels que $\overline{\text{angle}}$ (MA; MB) $= 0$, mod π est la droite AB (fig. 884 *d*).

x' B O A x

Fig. 884 d.

L'ensemble C'_0 des points M tels que $\overline{\text{angle}}\,(\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MB}) = 0$, mod 2π est l'ensemble des deux demi-droites (Ax; Bx') (fig. 884 e).

x' B O A x

Fig. 884 e.

L'ensemble C''_0 des points M tels que $\overline{\text{angle}}\,(\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MB}) = \pi$, mod 2π est l'ensemble des points du segment AB (fig. 884 *f*).

x' B O A x

Fig. 884 f.

885. Étude d'un ensemble de points. Cercle d'Apollonius.

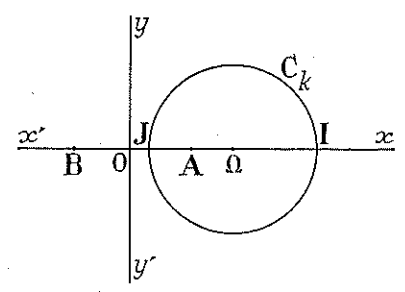


Fig. 885 a.

Soient dans le plan euclidien deux points A et B, et un nombre réel $k \neq 1$ (1). On se propose d'étudier l'ensemble C_k des points M tels que $\frac{MA}{MB} = k$.

On rapporte le plan à deux axes orthonormés $x'Ox$ et $y'Oy$, O étant le milieu de AB et $x'Ox$ passant par A et B, avec $\overline{\text{angle}}$ $(Ox; Oy) = +\frac{\pi}{2}$ (fig. 885 *a*).

Les coordonnées de A et B sont A $(a; 0)$ et B $(-a; 0)$; les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB}$ sont

$$\overrightarrow{MA}\left|\begin{matrix} a - x \\ -y \end{matrix}\right. \qquad \overrightarrow{MB}\left|\begin{matrix} -a - x \\ -y \end{matrix}\right.$$

D'où :

$$MA^2 = (x - a)^2 + y^2$$
$$MB^2 = (x + a)^2 + y^2$$

(1) Si $k = 1$, l'ensemble C_1 est la médiatrice du segment AB.

L'ensemble C_k est défini par $MA = k \cdot MB$ ou $MA^2 = k^2 \cdot MB^2$. D'où l'équation :

$$(x - a)^2 + y^2 = k^2 [(x + a)^2 + y^2]$$

ou

$$x^2 - 2\,ax + a^2 + y^2 = k^2 (x^2 + 2\,ax + a^2 + y^2)$$

ou
$$(1 - k^2)(x^2 + y^2) - 2\,a\,(1 + k^2)\,x + a^2 (1 - k^2) = 0$$

ou
$$\mathbf{x^2 + y^2 - 2\,a \cdot \frac{1 + k^2}{1 - k^2} \cdot x + a^2 = 0} \qquad (885\,;\,1)$$

C_k est donc un cercle de centre $\Omega\left(a \cdot \dfrac{1 + k^2}{1 - k^2};\ 0\right)$. Le rayon R de ce cercle est donné par :

$$R^2 = \frac{(1 + k^2)^2}{(1 - k^2)^2} \cdot a^2 - a^2$$
$$= a^2 \cdot \frac{(1 + k^2)^2 - (1 - k^2)^2}{(1 - k^2)^2} = a^2 \cdot \frac{4\,k^2}{(1 - k^2)^2}$$

Le rayon est donc :

$$R = \frac{2\,k}{|1 - k^2|} \cdot |a| \qquad (885\,;\,2)$$

C_k est appelé un cercle d'Apollonius.

Les abscisses des points d'intersection I et J du cercle C_k et de l'axe $x'Ox$ sont les points qui partagent le vecteur $\overrightarrow{AB}$ dans les rapports $+ k$ et $- k$; donc :

$$\frac{\overline{IA}}{\overline{IB}} = - \frac{\overline{JA}}{\overline{JB}}$$

et (AB; IJ) est un quaterne harmonique. Le centre Ω partage $\overrightarrow{AB}$ dans le rapport k^2.

886. Équation d'un cercle connaissant un diamètre.

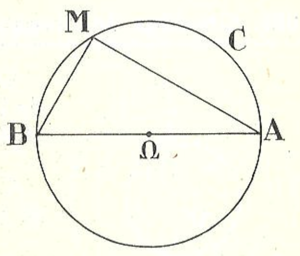
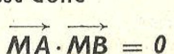


Fig. 886 a.

Soit le cercle C de diamètre AB (fig. 886 *a*). C'est l'ensemble des points M tels que $\overline{\text{angle}}\,(MA; MB) = \frac{\pi}{2}$.

Son équation vectorielle est donc



$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0 \qquad (886\,;\,1)$$

887. Définition.

Soit un cercle C de centre O et de rayon R (fig. 887 *a*).

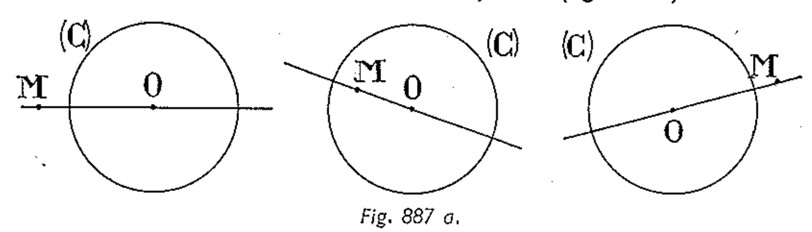


Fig. 887 a.

A tout point M du plan Π de ce cercle on associe le nombre algébrique $d^2 - R^2$, d désignant la distance de M au centre O du cercle ($d = OM$). On définit ainsi une fonction numérique du point M (ou champ scalaire) :

$$f: \qquad M \in (\pi) \longrightarrow f(M) = d^2 - R^2.$$

Le nombre f (M) = d² — R² est la* puissance du point M *par rapport au cercle C, ou pour le cercle C.

On note :

$$f(M) = d^2 - R^2 = \mathcal{P}_{(C)}(M) = \overline{M}_C = \overline{M} \qquad (887; 1)$$

888. Signe de la puissance.

Si le point M est intérieur au cercle, d est inférieur à R, et la puissance est négative.

Si le point M est sur le cercle, d est égal à R, et la puissance est nulle.

Si le point M est extérieur au cercle, d est supérieur à R, et la puissance est positive.

On peut remarquer que la puissance du centre O par rapport à C est :

$$\overline{O} = -R^2 \qquad (888; 1)$$

889. Courbes de niveau du champ.

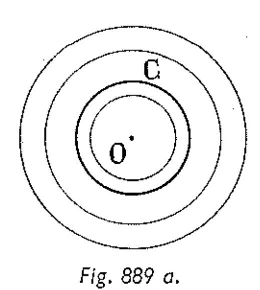


Fig. 889 a.

On se propose de rechercher le lieu des points de P pour lesquels $f(M) = \lambda$, λ étant un nombre algébrique donné (fig. 889 *a*).

Ce lieu est défini par la condition nécessaire et suffisante :

$$f(M) = \lambda \quad \text{ou} \quad d^2 - R^2 = \lambda$$

ou encore :

$$d^2 = \lambda + R^2$$

Si $\lambda > -R^2$, on a $d = \sqrt{\lambda + R^2}$; d étant constant, le lieu est le cercle de centre O et de rayon $\sqrt{\lambda + R^2}$.

Si $\lambda = -R^2$, on a $d = 0$; et le lieu se réduit au centre O du cercle.

Si $\lambda < -R^2$, $\lambda + R^2$ est négatif et le lieu n'existe pas.

Les courbes de niveau du champ sont donc les cercles de centre O.

890. Remarque.

Si le cercle C est un cercle-point ($R = 0$) on a :

$$f(M) = MO^2 \qquad (890;\ 1)$$

Cette remarque est utile dans certains problèmes.

891. Puissance et produit scalaire.

Sur le cercle C on considère deux points quelconques P et Q diamétralement opposés (fig. 891 *a*). On a :

$$\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OP} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{MO} - \overrightarrow{OP}$$

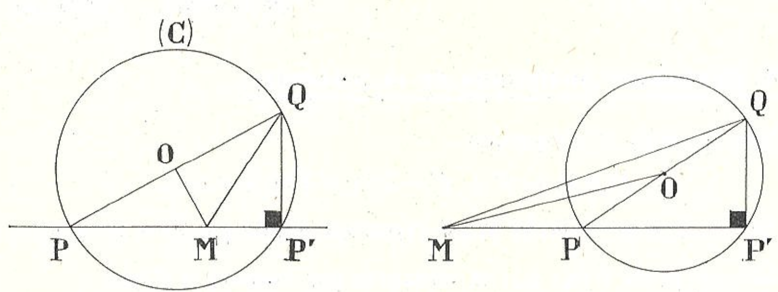


Fig. 891 a.

D'où :

$$\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{MQ} = (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OP})(\overrightarrow{MO} - \overrightarrow{OP}) = \overrightarrow{MO}^2 - \overrightarrow{OP}^2$$
$$= d^2 - R^2$$

Et on a la formule :

$$\overline{\mathcal{M}} = \overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{MQ} \qquad (891;\ 1)$$

892. Puissance et sécante.

La droite MP recoupe le cercle C en P' (fig. 891 *a*). L'angle PP'Q est droit, et P' est la projection de Q sur MP, et puisque

$$\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{MP'},$$

on a la formule :

$$\overline{M} = \overline{MP} \cdot \overline{MP'} \qquad (892\,;1)$$

Les formules (891; 1) et (892; 1) sont valables quelle que soit la position de P sur le cercle C.

893. Puissance et tangente.

D'autre part, lorsque le point M est extérieur au cercle C si MC est une des tangentes issues de M, on a, dans le triangle MOC rectangle en C (fig. 893 *a*) :

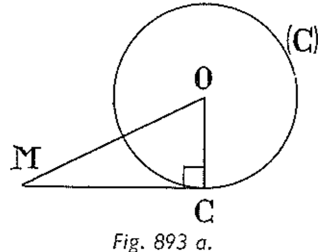


Fig. 893 a.

$$MC^2 = OM^2 - OC^2$$
$$= d^2 - R^2$$

D'où la formule :

$$\overline{M} = MC^2. \qquad (893\,;1)$$

894. Expression analytique de la puissance.

Soit le cercle C d'équation

$$f(x; y) = x^2 + y^2 - 2\,ax - 2\,by + c = 0.$$

Son centre est $\Omega\,(a; b)$ et son rayon est donné par $R^2 = a^2 + b_2 - c$.

Soit un point P $(x_0; y_0)$; sa puissance par rapport à C est

$$\overline{M} = d^2 - R^2$$
$$= (x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 - (a^2 + b^2 - c)$$
$$= x_0^2 + y_0^2 - 2\,ax_0 - 2\,by_0 + C$$

D'où la formule :

$$\overline{M} = f(x_0; y_0) \qquad (894\,;1)$$

En particulier :

$$\overline{O}_{(C)} = c \qquad (894\,;2)$$

895. Condition pour qu'un point soit sur un cercle.

Soient un cercle C et un point M.

A étant un point de C, pour qu'un point B autre que A de la droite MA soit sur C, il faut et il suffit que $\overline{M} = \overline{MA} \cdot \overline{MB}$ (fig. 895 *a*).

1° *Cette condition est nécessaire*, c'est-à-dire que si B est sur le cercle on a $\overline{M} = \overline{MA} \cdot \overline{MB}$.

En effet $\overline{MA} \cdot \overline{MB}$ est une des expressions de la puissance $\overline{M}$.

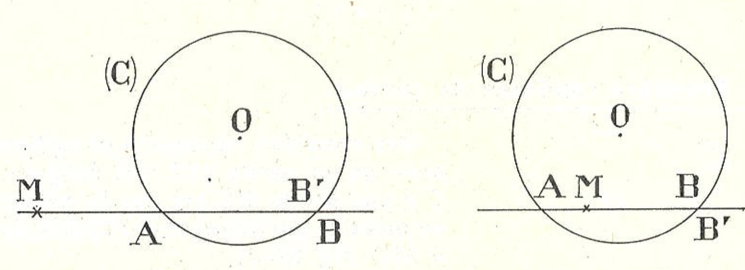


Fig. 895 a.

2° *Cette condition est suffisante*, c'est-à-dire que si $\overline{M} = \overline{MA} \cdot \overline{MB}$ le point B est sur C.

En effet la droite MA coupe C en B′ et on a d'après la formule (891; 1)

$$\overline{M} = \overline{MA} \cdot \overline{MB'}$$

Par comparaison on voit que $\overline{MB'} = \overline{MB}$; les points B et B′ sont donc confondus, autrement dit, comme B′, le point B est sur C.

896. Points cocycliques.

Une condition nécessaire et suffisante pour que quatre points A, B, C, D soient cocycliques, M étant le point d'intersection des droites AB et CD, est que l'on ait :

$$\overline{MA} \cdot \overline{MB} = \overline{MC} \cdot \overline{MD}$$

En effet on considère le cercle (ACD) (fig. 896 *a*). La puissance de M par rapport à ce cercle est $\overline{M} = \overline{MC} \cdot \overline{MD}$. La condition s'écrit :

$$\overline{M} = \overline{MA} \cdot \overline{MB}$$

et c'est une condition nécessaire et suffisante pour que le point B soit sur le cercle (ACD).

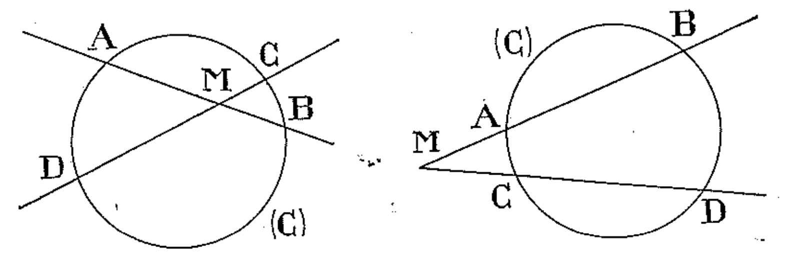


Fig. 896 a.

897. Première condition de contact.

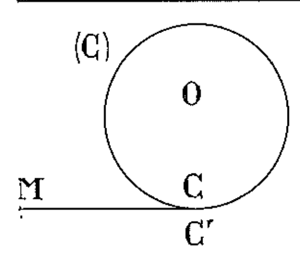


Fig. 897 a.

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un cercle (C) soit tangent en C à une droite MC est que la puissance du point M par rapport à (C) soit égale à MC^2 (fig. 897 *a*).

1° *Cette condition est nécessaire*, c'est-à-dire que si le cercle (C) est tangent en C à la droite MC, la puissance de M est égale à MC^2. En effet, dans ces conditions, la formule (892; 1) montre que $\overline{M} = MC^2$.

2° *Cette condition est suffisante*, c'est-à-dire que si $\overline{M} = MC^2$, le cercle (C) est tangent en C à la droite MC.

En effet la condition $\overline{M} = MC^2$ s'écrit :

$$MO^2 - OC^2 = MC^2$$

ou

$$MO^2 = MC^2 + OC^2$$

Le triangle MOC est alors rectangle en C, et le cercle (C) est bien tangent en C à la droite MC.

898. Seconde condition de contact.

Une condition nécessaire et suffisante pour que le cercle (ABC) soit tangent en C à la droite MC, le point M étant le point d'intersection des droites MAB et MC, est que l'on ait :

$$\overline{MA} \cdot \overline{MB} = MC^2$$

En effet, la puissance de M par rapport au cercle (ABC) est

$$\overline{M} = \overline{MA} \cdot \overline{MB}.$$

La condition s'écrit (fig. 898 *a*) :

$$\overline{M} = MC^2$$

et c'est une condition nécessaire et suffisante pour que le cercle (ABC) soit tangent en C à la droite MC.

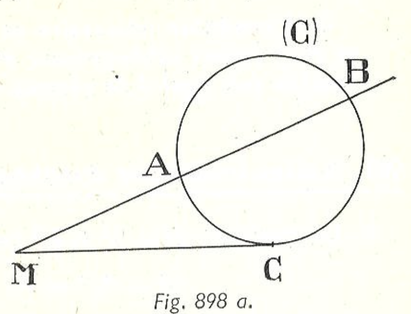


Fig. 898 a.

899. Angle de deux cercles.

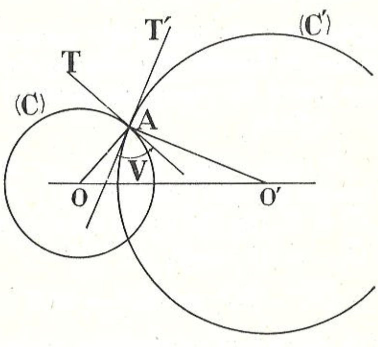


Fig. 899 a.

Soient deux cercles, (C) de centre O et de rayon R, et (C') de centre O' et de rayon R' se coupant en A, et les tangentes AT à (C), AT' à (C') (fig. 899 *a*).

On pose :

$$\text{angle } (AT; AT') = V$$

$$\left(0 \leqslant V \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$$

V est appelé l'angle des deux cercles.

Dans le triangle AOO' on a

$$OO'^2 = AO^2 + AO'^2 - 2 \cdot AO \cdot AO' \cdot \cos\left(\overrightarrow{AO}; \overrightarrow{AO'}\right)$$

ou

$$d^2 = R^2 + R'^2 - 2\,RR' \cdot \cos\left(\overrightarrow{AO}; \overrightarrow{AO'}\right)$$

D'où :

$$\cos V = \frac{R^2 + R'^2 - d^2}{2\,RR'} \qquad (899\,;\,1)$$

900. Cercles orthogonaux.

Deux cercles sont orthogonaux si leur angle est égal à $\frac{\pi}{2}$.

$$V = \frac{\pi}{2}$$

Une condition nécessaire et suffisante pour que les deux cercles (C) et (C') soient orthogonaux est que $\cos V = 0$, c'est-à-dire en tenant compte de (899; 1) que $d^2 = R^2 + R'^2$.

Et :

Une condition nécessaire et suffisante pour que les cercles (C) et (C′) soient orthogonaux est que le carré de la distance des centres soit égal à la somme des carrés des rayons.

901. Autres conditions d'orthogonalité.

1° La condition $d^2 = R^2 + R'^2$ peut s'écrire :

$$d^2 - R'^2 = R^2 \quad \text{ou} \quad \overline{O}_{(C')} = R^2$$

D'où :

Une condition nécessaire et suffisante pour que deux cercles soient orthogonaux est que la puissance du centre d'un des cercles par rapport à l'autre soit égale au carré du rayon du premier cercle.

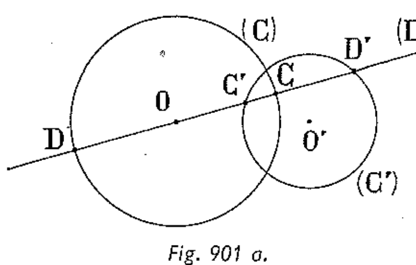


Fig. 901 a.

2° Une droite passant par O coupe (C) en C et D et (C′) en C′ et D′ (fig. 901 *a*). La condition $\overline{O}_{(C')} = R^2$ s'écrit :

$$\overline{OC'} \cdot \overline{OD'} = OC^2 = OD^2$$

ce qui est une condition nécessaire et suffisante d'harmonicité du quaterne (C, D; C′, D′). Et :

Une condition nécessaire et suffisante pour que deux cercles soient orthogonaux est qu'un diamètre de l'un des cercles soit partagé harmoniquement par l'autre cercle.

902. Condition analytique d'orthogonalité.

Les deux cercles (C) et (C′) sont donnés par leurs équations :

(C) $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ $\quad$ O $(a; b)$ $\quad$ $R^2 = a^2 + b^2 - c$

(C′) $x^2 + y^2 - 2a'x - 2b'y + c' = 0$ $\quad$ O′ $(a'; b')$ $\quad$ $R'^2 = a'^2 + b'^2 - c'$.

La condition $d^2 = R^2 + R'^2$ s'écrit alors

$$(a' - a)^2 + (b' - b)^2 = (a^2 + b^2 - c) + (a'^2 + b'^2 - c')$$

c'est-à-dire :

$$\mathbf{2\,(aa' + bb') = c + c'}. \qquad (902;\ 1)$$

903. Définition.

Soient deux cercles (C) et (C′), de centres O et O′, de rayons R et R′. On les suppose non concentriques (fig. 903 *a*).

A tout point M du plan (P), on fait correspondre un nombre relatif δ, différence entre la puissance de M par rapport à (C) et la puissance de M par rapport à (C′) :

$$\delta = \overline{M}_{(C)} - \overline{M}_{(C')}$$

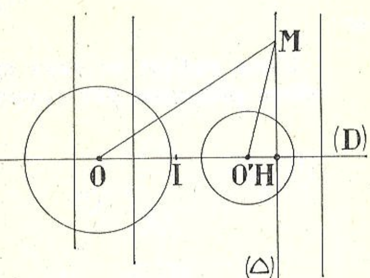


Fig. 903 a.

Ainsi on définit un champ scalaire, ou une fonction numérique f du point M :

$$f : \quad M \in (P) \longrightarrow \delta = f(M) = \overline{M}_{(C)} - \overline{M}_{(C')} \in R$$

On a :

$$\delta = f(M) = (MO^2 - R^2) - (MO'^2 - R'^2) \qquad (903;\ 1)$$

$$= (MO^2 - MO'^2) - (R^2 - R'^2) \qquad (903;\ 2)$$

904. Courbes de niveau du champ.

Les courbes de niveau du champ scalaire sont définies par :

$$f(M) = \lambda$$

ou :

$$(MO^2 - MO'^2) - (R^2 - R'^2) = \lambda$$

ou encore :

$$MO^2 - MO'^2 = R^2 - R'^2 + \lambda \qquad (904;\ 1)$$

On est ramené au lieu des points M tels que

$$MO^2 - MO'^2 = R^2 - R'^2 + \lambda$$

(cf. n° 877, 1°).

Ce lieu est une droite (Δ) perpendiculaire à OO′ en un point H défini par :

$$2 \cdot \overline{OO'} \cdot \overline{IH} = R^2 - R'^2 + \lambda \qquad (904;\ 2)$$

L'ensemble des courbes de niveau n'est autre que l'ensemble des droites perpendiculaires à OO′ (fig. 903 *a*).

905. Axe radical de deux cercles.

La courbe de niveau $\lambda = 0$ prend une importance particulière dans un certain nombre de problèmes.

On lui donne le nom d'axe radical des deux cercles (C) et (C′).

On a :
$$f(M) = \overline{M}_{(C)} - \overline{M}_{(C')} = 0$$
donc :
$$\overline{M}_{(C)} = \overline{M}_{(C')}$$
et :

L'axe radical de deux cercles est le lieu des points ayant la même puissance par rapport aux deux cercles (fig. 905 *a*, *b*).

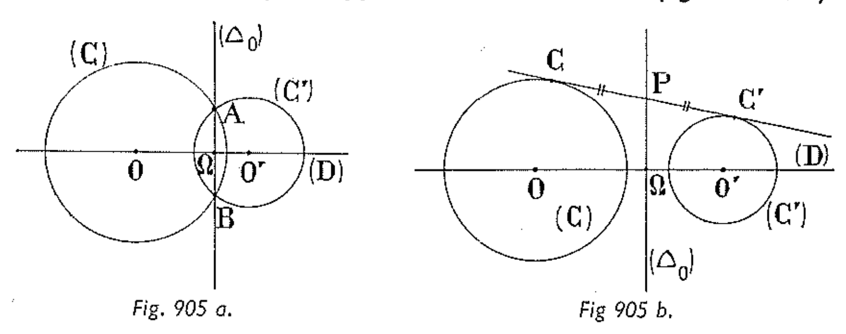


Fig. 905 a. *Fig 905 b.*

906. Équation de l'axe radical.

Soient deux cercles (C) et (C') d'équation

(C) $f(x; y) = x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$

(C') $g(x; y) = x^2 + y^2 - 2a'x - 2b'y + c' = 0$

L'équation $\overline{M}_{(C)} = \overline{M}_{(C')}$ qui définit l'axe radical se traduit analytiquement par
$$f(x; y) = g(x; y)$$

D'où l'équation de l'axe radical :
$$\mathbf{2(a' - a)x + 2(b' - b)y + c - c' = 0.} \qquad (906;\ 1)$$

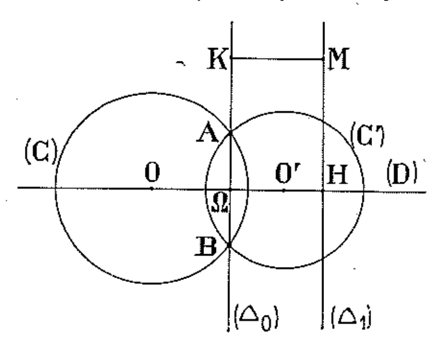


Fig. 907 a.

907. Autre expression de f(M).

On a (fig. 907 *a*) :
$$f(M) = (MO^2 - MO'^2) - (R^2 - R'^2)$$
Or :
$$MO^2 - MO'^2 = 2\,\overline{OO'}\cdot\overline{IH}$$
et, si Ω est le pied de l'axe radical sur OO' on a aussi (formule 904; 2) :
$$2\cdot\overline{OO'}\cdot\overline{I\Omega} = R^2 - R'^2$$

Par suite :

$$f(\text{M}) = 2 \cdot \overline{\text{OO}'} \cdot \overline{\text{IH}} - 2 \cdot \overline{\text{OO}'} \cdot \overline{\text{I}\Omega}$$
$$= 2 \cdot \overline{\text{OO}'} \cdot (\overline{\text{IH}} - \overline{\text{I}\Omega})$$
$$= 2 \cdot \overline{\text{OO}'} \cdot \overline{\Omega\text{H}}$$
$$= 2 \cdot \overline{\text{OO}'} \cdot \overline{\text{KM}}$$

K étant la projection de M sur l'axe radical (Δ_0).

D'où finalement la formule :

$$\overline{M}_{(C)} - \overline{M}_{(C')} = 2 \cdot \overline{OO'} \cdot \overline{KM} \qquad (907\,;\,1)$$

908. Centre radical de trois cercles.

Soient trois cercles (C), (C′), (C″) dont les centres O, O′ et O″ ne sont pas alignés (fig. 908 *a*). L'axe radical (Δ″) de (C) et (C′) et l'axe radical (Δ′) de (C) et (C″) se coupent en ω. Le point ω, appartenant à (Δ″) est tel que :

$$\overline{\omega}_{(C)} = \overline{\omega}_{(C')}$$

ce point ω, appartenant aussi à (Δ′), est tel que :

$$\overline{\omega}_{(C)} = \overline{\omega}_{(C'')}$$

Par comparaison on déduit :

$$\overline{\omega}_{(C')} = \overline{\omega}_{(C'')}$$

Fig. 908 a.

Autrement dit, ω appartient à l'axe radical (Δ) de (C′) et (C″).

Donc :

Les axes radicaux de trois cercles pris deux à deux et dont les centres ne sont pas alignés, sont concourants en un point appelé centre radical des trois cercles.

Remarque. — Si les centres O, O′, O″ sont alignés les axes radicaux (Δ), (Δ′), (Δ″) sont parallèles; le point ω n'existe pas.

909. Détermination de l'axe radical de deux cercles.

1° Si les deux cercles (C) et (C′) sont sécants en A et B, on a :

$$\overline{\text{A}}_{(C)} = \overline{\text{A}}_{(C')} = 0 \qquad \text{et} \qquad \overline{\text{B}}_{(C)} = \overline{\text{B}}_{(C')} = 0$$

Les points A et B appartiennent à l'axe radical, qui n'est autre que la droite AB (fig. 905 *a*).

2° *Si les deux cercles (C) et (C′) sont tangents en A, l'axe radical est la tangente commune* (fig. 909 *a*).

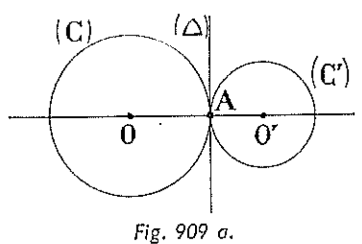


Fig. 909 a.

3° Si les cercles sont extérieurs l'un à l'autre, le milieu P du segment compris entre les points C et C′ de contact d'une tangente commune a même puissance par rapport aux deux cercles :

$$\overline{P}_{(C)} = \overline{P}_{(C')}$$

car $PC^2 = PC'^2$.

Le point P appartient à l'axe radical. Le milieu Q d'une seconde tangente commune appartient aussi à l'axe radical; cet axe est donc la droite PQ (fig. 905 *b*).

4° Dans tous les cas, on mène un cercle (Γ) sécant à (C) et (C′). Soit ω le centre radical de ces trois cercles; c'est le point d'intersection de l'axe radical de (Γ) et (C) et de l'axe radical de (Γ) et (C′). La droite (Δ) passant par ω et perpendiculaire à la droite des centres OO′ est l'axe radical de (C) et (C′) (fig. 909 *b*).

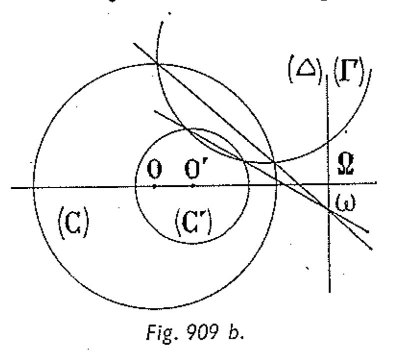


Fig. 909 b.

910. Équation polaire d'un cercle.

1° Soit un cercle C de centre Ω (a; 0) et passant par O; donc $R = a$ (fig. 910 *a*). Son équation cartésienne est

$$\mathbf{x^2 + y^2 - 2\,ax = 0} \qquad (910;\ 1)$$

ou en polaires :

$$r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta - 2\,ar \cos \theta = 0.$$

D'où :

$$\mathbf{r = 2\,a \cos \theta.} \qquad (910;\ 2)$$

Si le point A a pour coordonnées ($2a$; 0), cette équation exprime que le triangle OAM est rectangle en M.

2° Soit un cercle C de centre Ω (0; a) et passant par O (fig. 910 *b*). Son équation cartésienne est

$$\mathbf{x^2 + y^2 - 2\,ay = 0} \qquad (910;\ 3)$$

Et son équation polaire est

$$r = 2\,a \sin \theta. \qquad (910;\ 4)$$

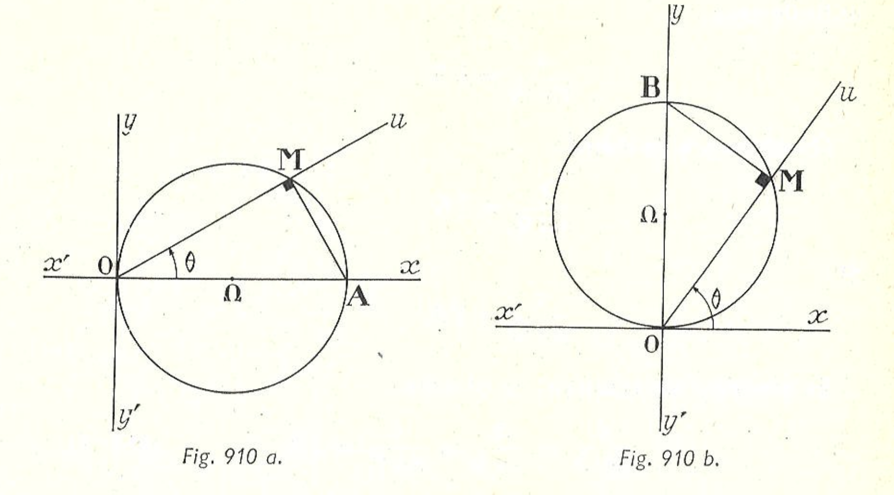


Fig. 910 a. *Fig. 910 b.*

911. Relation entre les sinus des angles d'un triangle.

Soit un triangle ABC et le cercle circonscrit, de centre O et de rayon R. On trace le diamètre BC.

Deux cas de figures sont possibles selon que l'angle A est aigu ou obtus (fig. 911 *a* et *b*).

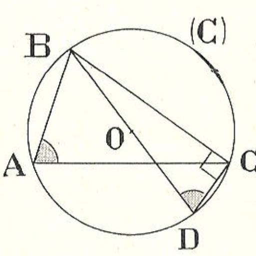


Fig. 911 a.

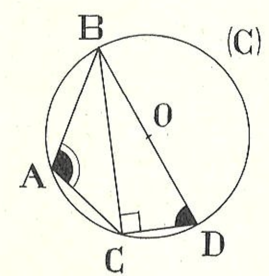


Fig. 911 b.

Dans le premier cas, les angles A et D sont égaux; dans le deuxième cas, ils sont supplémentaires. Donc dans les deux cas, on a :

$$\sin A = \sin D.$$

D'autre part, dans le triangle BCD, rectangle en C, on a :

$$BC = BD \cdot \sin D$$

ou :

$$a = 2\,\mathrm{R} \cdot \sin \mathrm{A}$$

et finalement :

$$\frac{a}{\sin \mathrm{A}} = 2\,\mathrm{R}.$$

On démontre de même :

$$\frac{b}{\sin \mathrm{B}} = 2\,\mathrm{R}$$

et :

$$\frac{c}{\sin \mathrm{C}} = 2\,\mathrm{R}.$$

En groupant ces résultats, on obtient :

$$\frac{a}{\sin \mathrm{A}} = \frac{b}{\sin \mathrm{B}} = \frac{c}{\sin \mathrm{C}} = 2\,\mathrm{R}. \qquad (911\,;\,1)$$

Et on peut énoncer :

Dans un triangle quelconque, le rapport d'un côté au sinus de l'angle opposé est égal au diamètre du cercle circonscrit.

CHAPITRE LXIII

ISOMÉTRIES DANS LE PLAN

912. Symétrie pour un point.

1° Dans le plan euclidien R^2, on donne un point fixe S (fig. 912 *a*). A un point M du plan on fait correspondre un point M′ tel que

$$\overrightarrow{SM'} = -\overrightarrow{SM} \qquad (912\,;1)$$

On définit ainsi une transformation f du plan :

$$f: \qquad M \in R^2 \longrightarrow M' = f(M) \in R^2$$

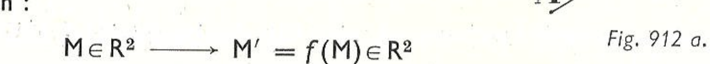


Fig. 912 a.

f est appelée une symétrie pour le point S (ou par rapport à S).

Le point S est le centre de cette symétrie.

On note :

$$f = \text{sym}\,(S)$$

2° f n'est autre que l'homothétie de centre S et de rapport -1 :

$$f = \text{sym}\,(S) = \text{hom}\,(S; -1). \qquad (912; 2)$$

Par suite :

Dans le plan euclidien, toute symétrie pour un point est une transformation affine.

3° La formule (912 ; 1) s'écrit :

$$\overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OS} = -\left(\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OS}\right)$$

D'où la formule fondamentale :

$$\overrightarrow{OM'} = -\overrightarrow{OM} + 2\cdot\overrightarrow{OS} \qquad (912\,;3)$$

Elle traduit le fait que S est le milieu du segment MM′.

4° Si le centre de la symétrie est O, on a (fig. 912 *b*) :

$$\overrightarrow{OM'} = -\overrightarrow{OM}$$

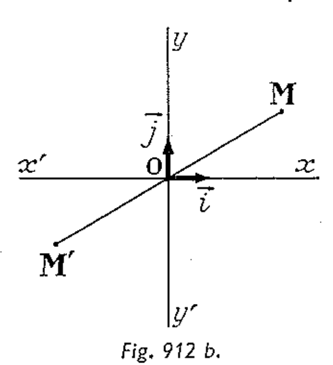


Fig. 912 b.

En traduisant analytiquement, on obtient :

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases} \qquad (912\,;\,4)$$

La matrice de la transformation (qui dans ce cas est linéaire), est

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

L'image $\mathcal{B}$ du repère canonique $\mathcal{B}_0$ est donc :

$$\overrightarrow{OU}(-1\,;0) \qquad \overrightarrow{OV}(0\,;-1).$$

On a :

$$\|\overrightarrow{OU}\| = \|\vec{u}\| = 1 \qquad \|\overrightarrow{OV}\| = \|\vec{v}\| = 1$$

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$$

Donc $\mathcal{B}$ est un repère orthonormé ; ainsi f est une isométrie (cf. n° 838).

De plus :

$$\text{Det } A = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = +1$$

Et :

Dans le plan, toute symétrie pour un point est une isométrie positive.

5° *La symétrie pour un point est involutive*, car $\overset{-1}{f} = f$.

913. Arcs qui diffèrent de π.

Soit sur le cercle trigonométrique (U) le point M tel que (fig. 913 *a*) :

$$\overline{\text{arc}}\ \text{IM} = \theta, \bmod 2\pi$$

Son symétrique M' pour le point O tel que $\overrightarrow{OM'} = -\overrightarrow{OM}$ appartient à (U) et on a :

$$\overline{\text{arc}}\ \text{IM}' = \theta + \pi, \bmod 2\pi$$

Les coordonnées de M sont

$$\begin{cases} x = \cos\theta \\ y = \sin\theta \end{cases}$$

Celles de M′ sont

$$\begin{cases} x' = \cos(\theta + \pi) \\ y' = \sin(\theta + \pi) \end{cases}$$

D'où d'après les formules (912 ; 4) :

$$\begin{cases} \mathbf{cos}\ (\theta + \pi) = -\ \mathbf{cos}\ \theta \\ \mathbf{sin}\ (\theta + \pi) = -\ \mathbf{sin}\ \theta \end{cases} \qquad (913\ ;\ 1)$$

Par division

$$\begin{cases} \mathbf{tg}\ (\theta + \pi) = \mathbf{tg}\ \theta \\ \mathbf{cotg}\ (\theta + \pi) = \mathbf{cotg}\ \theta \end{cases} \qquad (913\ ;\ 2)$$

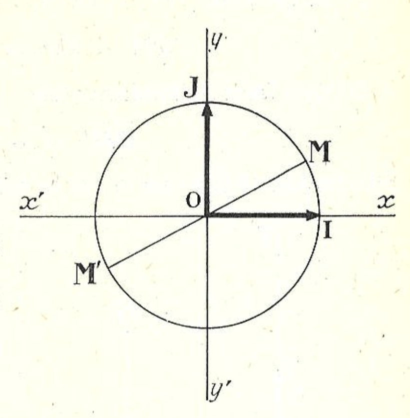


Fig 913 a.

914. Symétrie pour une droite.

1° Dans le plan euclidien, on donne une droite fixe D (fig. 914 *a*).
Soient un point M du plan, et sa projection orthogonale *m* sur la droite D.
Au point M on fait correspondre le point M′ tel que

$$\overrightarrow{mM'} = -\ \overrightarrow{mM} \qquad (914;\ 1)$$

On définit ainsi une transformation *f* du plan :

$$f: \qquad M \in R^2 \longrightarrow M' = f(M) \in R^2$$

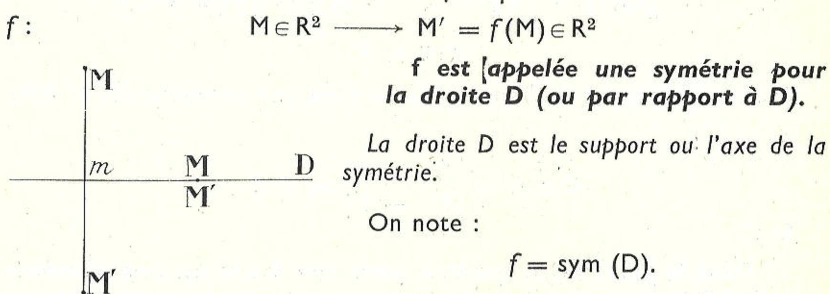


Fig. 914 a.

f est appelée une symétrie pour la droite D (ou par rapport à D).

La droite D est le support ou l'axe de la symétrie.

On note :

$$f = \text{sym (D)}.$$

2° *f* n'est autre que l'affinité orthogonale de support D et de rapport − 1,

$$f = \text{sym (D)} = \text{aff (D; − 1)}. \qquad (914;\ 2)$$

Par suite :

Dans le plan euclidien, toute symétrie pour une droite est une transformation affine.

3° La formule (914; 1) s'écrit :

$$\overrightarrow{OM'} - Om = -(\overrightarrow{OM} - Om)$$

D'où la formule fondamentale :

$$\overrightarrow{OM'} = -\overrightarrow{OM} + 2 \cdot \overrightarrow{Om} \qquad (914; 3)$$

Elle traduit le fait que m est le milieu du segment MM'. Évidemment m n'est pas fixe.

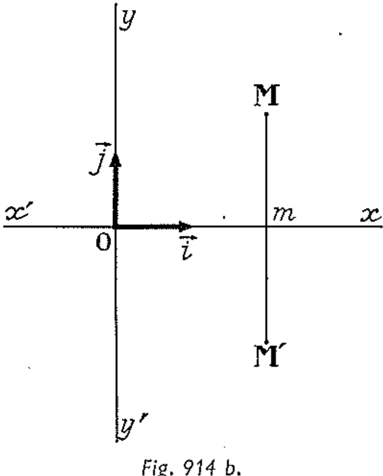


Fig. 914 b.

4° Si la droite D n'est autre que l'axe $x'Ox$ (fig. 914 b) en traduisant la formule (914 ; 1) on obtient :

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases} \qquad (914; 4)$$

La matrice de la transformation (qui est linéaire ici), est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

L'image $\mathcal{B}$ par f de la base canonique $\mathcal{B}_0$, est donc :

$$\overrightarrow{OU} = \vec{u} \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{OV} = \vec{v} \begin{vmatrix} 0 \\ -1 \end{vmatrix}$$

On a :

$$\|\overrightarrow{OU}\| = \|\vec{u}\| = 1, \quad \|\overrightarrow{OV}\| = \|\vec{v}\| = 1$$
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

Et $\mathcal{B}$ est un repère orthonormé; ainsi f est une isométrie (cf. n° 838).

De plus :

$$\text{Det } A = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1$$

Et :

Dans le plan, toute symétrie pour une droite est une isométrie négative.

4° *La symétrie pour une droite est involutive*, car $\overset{-1}{f} = f$.

915. Arcs opposés.

Soit sur le cercle trigonométrique (U) le point M tel que (fig. 915 a) :

$$\overline{\text{arc IM}} = \theta, \text{ mod } 2\pi$$

Son symétrique M′ pour l'axe $x'Ox$, tel que $\|\overrightarrow{OM'}\| = \|\overrightarrow{OM}\|$, appartient à (U) et on a :

$$\overline{\text{arc}}\ IM' = -\theta, \bmod 2\pi$$

Les coordonnées de M sont :

$$x = \cos\theta$$
$$y = \sin\theta\ ;$$

celles de M′ sont :

$$x' = \cos(-\theta)$$
$$y' = \sin(-\theta).$$

Fig. 915 a.

D'où d'après les formules (914 ; 4) :

$$\begin{cases} \mathbf{cos}\,(-\theta) = \mathbf{cos}\,\theta \\ \mathbf{sin}\,(-\theta) = -\,\mathbf{sin}\,\theta \end{cases} \qquad (915\,;\,1)$$

Par division :

$$\begin{cases} \mathbf{tg}\,(-\theta) = -\ \mathbf{tg}\,\theta \\ \mathbf{cotg}\,(-\theta) = -\,\mathbf{cotg}\,\theta \end{cases} \qquad (915\,;\,2)$$

916. Cosinus de l'angle de deux éléments linéaires orientés.

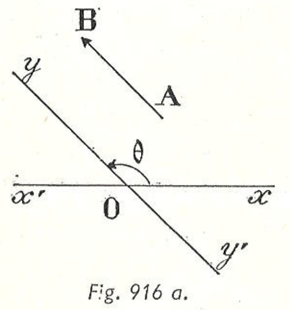


Fig. 916 a.

Soient $\overrightarrow{L_1}$ et $\overrightarrow{L_2}$ deux éléments linéaires orientés (axes, vecteurs, demi-droites) (fig. 916 *a*).

On a :

$$\overline{\text{angle}}\,(\overrightarrow{L_1}\,;\,\overrightarrow{L_2}) = \theta$$

et :

$$\overline{\text{angle}}\,(\overrightarrow{L_2}\,;\,\overrightarrow{L_1}) = -\theta$$

Comme $\cos\theta = \cos(-\theta)$, on peut énoncer :

Le cosinus de l'angle de deux éléments linéaires orientés est indépendant de l'ordre dans lequel on considère les deux éléments.

917. Compatibilité des deux définitions de la bissectrice d'un angle.

Aux nos 582 et 853 on a donné les deux définitions suivantes de la bissectrice d'un angle (A*x* ; A*y*).

1° Soient $\overrightarrow{AU} = \vec{u}$ le vecteur-unitaire de la demi-droite A*x*, et

$\overrightarrow{AV} = \vec{v}$ le vecteur unitaire de la demi-droite Ay. La bissectrice est la demi-droite Au, de vecteur unitaire $\vec{u} + \vec{v}$.

2° La bissectrice est la demi-droite Au telle que

$$\overline{\text{angle}}\,(Ax;\ Au) + \overline{\text{angle}}\,(Ay;\ Au) = 0, \text{ mod } 2\pi.$$

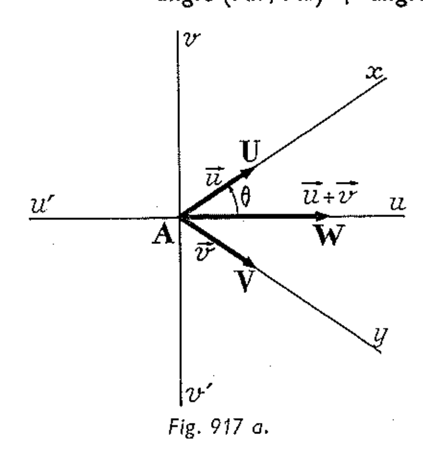


Fig. 917 a.

Ceci rappelé, on rapporte le plan à deux axes orthonormés $u'Au$, $v'Av$, Au étant la bissectrice suivant la deuxième définition (fig. 917 a).

On pose :

$$\overline{\text{angle}}\,(Au;\ Ax) = \theta, \text{ mod } 2\pi$$

Donc :

$$\overline{\text{angle}}\,(Au;\ Ay) = -\theta, \text{ mod } 2\pi.$$

Les coordonnées de $\overrightarrow{AU} = \vec{u}$ sont $\cos\theta$ et $\sin\theta$; celles de $\overrightarrow{AV} = \vec{v}$ sont $\cos(-\theta) = \cos\theta$ et $\sin(-\theta) = -\sin\theta$.

Par suite les coordonnées de $\overrightarrow{AW} = \vec{u} + \vec{v}$ sont $2\cos\theta$ et 0. Ce résultat montre que $\overrightarrow{Aw}$ est sur la demi-droite Au.

Les deux définitions sont donc équivalentes.

918. Addition des arcs.

Soient sur le cercle trigonométrique (U) les points A et B (fig. 918 a) tels que

$$\overline{\text{arc}}\ IA = \alpha, \text{ mod } 2\pi$$
$$\overline{\text{arc}}\ IB = \beta, \text{ mod } 2\pi$$

D'où :

$$\overline{\text{arc}}\ AB = \overline{\text{arc}}\ IB - \overline{\text{arc}}\ IA = \beta - \alpha, \text{ mod } 2\pi$$

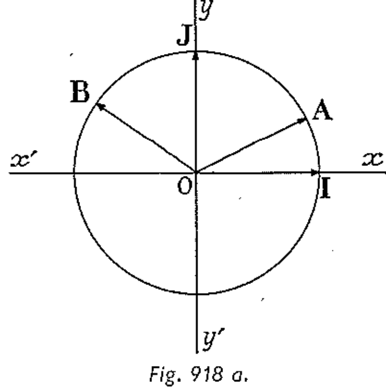


Fig. 918 a.

Les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ sont :

$$\overrightarrow{OA}\left|\begin{array}{l}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{array}\right. \qquad \overrightarrow{OB}\left|\begin{array}{l}\cos\beta\\ \sin\beta\end{array}\right.$$

1° On a :

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \cos(\beta - \alpha) = \cos(\alpha - \beta) \quad \text{(cf. formule 913 ; 1)}$$
$$= \cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta$$

D'où :

$$\mathbf{cos}\,(\alpha - \beta) = \mathbf{cos}\,\alpha \cdot \mathbf{cos}\,\beta + \mathbf{sin}\,\alpha \cdot \mathbf{sin}\,\beta. \qquad (918;\,1)$$

On en déduit, en remplaçant β par $-\beta$:

$$\mathbf{cos}\,(\alpha + \beta) = \mathbf{cos}\,\alpha \cdot \mathbf{cos}\,\beta - \mathbf{sin}\,\alpha \cdot \mathbf{sin}\,\beta. \qquad (918;\,2)$$

2° On a :

$$\text{Det}\,(\overrightarrow{OA}\,;\,\overrightarrow{OB}) = \sin(\beta - \alpha) = -\sin(\alpha - \beta)$$
$$= \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta \\ \sin\alpha & \sin\beta \end{vmatrix} = \cos\alpha \cdot \sin\beta - \sin\alpha \cdot \cos\beta$$

D'où :

$$\mathbf{sin}\,(\alpha - \beta) = \mathbf{sin}\,\alpha\,\mathbf{cos}\,\beta - \mathbf{cos}\,\alpha\,\mathbf{sin}\,\beta. \qquad (918;\,3)$$

On en déduit en remplaçant β par $-\beta$:

$$\mathbf{sin}\,(\alpha + \beta) = \mathbf{sin}\,\alpha \cdot \mathbf{cos}\,\beta + \mathbf{cos}\,\alpha \cdot \mathbf{sin}\,\beta. \qquad (918;\,4)$$

3° Par division (en supposant $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$, mod π, et $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$, mod π[1]), on a :

$$\text{tg}\,(\alpha + \beta) = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)}$$
$$= \frac{\sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta}{\cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta}$$
$$= \frac{\dfrac{\sin\alpha \cdot \cos\beta}{\cos\alpha \cdot \cos\beta} + \dfrac{\cos\alpha \cdot \sin\beta}{\cos\alpha \cdot \cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha \cdot \cos\beta}{\cos\alpha \cdot \cos\beta} - \dfrac{\sin\alpha \cdot \sin\beta}{\cos\alpha \cdot \cos\beta}}$$

ou

$$\mathbf{tg}\,(\alpha + \beta) = \frac{\mathbf{tg}\,\alpha + \mathbf{tg}\,\beta}{1 - \mathbf{tg}\,\alpha \cdot \mathbf{tg}\,\beta} \qquad (918\,;\,5)$$

On en déduit, en remplaçant β par $-\beta$:

$$\mathbf{tg}\,(\alpha - \beta) = \frac{\mathbf{tg}\,\alpha - \mathbf{tg}\,\beta}{1 + \mathbf{tg}\,\alpha \cdot \mathbf{tg}\,\beta} \qquad (918\,;\,6)$$

---

(1) Si $\alpha = \frac{\pi}{2}$, mod π ou $\beta = \frac{\pi}{2}$, mod π, l'étude est directe (nos suivants).

919. Arcs qui diffèrent de $\frac{\pi}{2}$.

On a :

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \cos\frac{\pi}{2}\cdot\cos\theta - \sin\frac{\pi}{2}\cdot\sin\theta$$
$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \sin\frac{\pi}{2}\cdot\cos\theta + \cos\frac{\pi}{2}\cdot\sin\theta$$

ou

$$\left\{\begin{array}{l}\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\sin\theta \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \cos\theta\end{array}\right. \qquad (919\,;1)$$

Par division :

$$\left\{\begin{array}{l}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\operatorname{cotg}\theta \\ \operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\operatorname{tg}\theta\end{array}\right. \qquad (919\,;2)$$

920. Arcs dont la somme est $\frac{\pi}{2}$. (Arcs complémentaires).

On a :

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\frac{\pi}{2}\cdot\cos\theta + \sin\frac{\pi}{2}\cdot\sin\theta$$
$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\frac{\pi}{2}\cdot\cos\theta - \cos\frac{\pi}{2}\cdot\sin\theta$$

ou

$$\left\{\begin{array}{l}\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta\end{array}\right. \qquad (920\,;1)$$

Par division :

$$\left\{\begin{array}{l}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \operatorname{cotg}\theta \\ \operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \operatorname{tg}\theta\end{array}\right. \qquad (920\,2)\,;$$

921. Arcs dont la somme est π. (Arcs supplémentaires).

On a :

$$\cos(\pi - \theta) = \cos\pi \cdot \cos\theta + \sin\pi \cdot \sin\theta$$
$$\sin(\pi - \theta) = \sin\pi \cdot \cos\theta - \cos\pi \cdot \sin\theta$$

ou

$$\begin{cases} \cos(\pi - \theta) = -\cos\theta \\ \sin(\pi - \theta) = \sin\theta \end{cases} \qquad (921\,;\,1)$$

Par division :

$$\begin{cases} \text{tg}(\pi - \theta) = -\text{tg}\,\theta \\ \text{cotg}(\pi - \theta) = -\text{cotg}\,\theta \end{cases} \qquad (921\,;\,2)$$

922. Rotation.

1° Dans le plan euclidien, on considère un point fixe Ω; soit un angle constant α (fig. 922 *a*).

A un point M du plan, on fait correspondre le point M′ tel que

$$\|\overrightarrow{\Omega M}\| = \|\overrightarrow{\Omega M'}\|$$

et

$$\overline{\text{angle}}\,(\overrightarrow{\Omega M}\,;\,\overrightarrow{\Omega M'}) = \alpha, \text{ mod } 2\pi.$$

On définit ainsi une transformation f du plan appelée **rotation.**

f : $M \in R^2 \longrightarrow M' \in R^2$.

Ω est le centre, et α l'angle de la rotation.

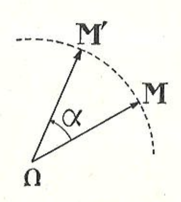


Fig. 922 a

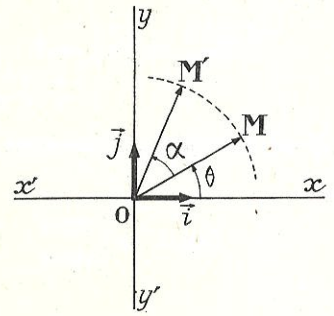


Fig. 922 b.

On note :

$$f = \text{rot}(\Omega\,;\,\alpha)$$

2° On suppose maintenant que le centre de la rotation est l'origine O du plan; le plan est rapporté à deux axes $x'Ox$ et $y'Oy$ orthonormés (fig. 922 *b*).

Les coordonnées polaires de M sont

$$\theta = \overline{\text{angle}}\,(Ox; \overrightarrow{OM}) \quad \text{et} \quad r = \left\| \overrightarrow{OM} \right\|.$$

Par suite les coordonnées cartésiennes de M sont

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

Les coordonnées polaires de $M' = f(M)$ sont $\overline{\text{angle}}\,(Ox; \overrightarrow{OM'}) = \alpha + \theta$, et $\left\| \overrightarrow{OM'} \right\| = r$. Par suite les coordonnées cartésiennes de M' sont :

$$\begin{aligned} x' = r\cos(\alpha+\theta) &= r\,[\cos\alpha \cdot \cos\theta - \sin\alpha \cdot \sin\theta] \\ &= r\cos\theta \cdot \cos\alpha - r\sin\theta \cdot \sin\alpha. \\ y' = r\sin(\alpha+\theta) &= r\,[\sin\alpha \cdot \cos\theta + \cos\alpha \cdot \sin\theta] \\ &= r\cos\theta \cdot \sin\alpha + r\sin\theta \cdot \cos\alpha. \end{aligned}$$

C'est-à-dire :

$$\begin{cases} \mathbf{x}' = \mathbf{x}\cos\alpha - \mathbf{y}\sin\alpha \\ \mathbf{y}' = \mathbf{x}\sin\alpha + \mathbf{y}\cos\alpha \end{cases} \qquad (922; 1)$$

La matrice de la transformation f (qui est linéaire ici), est

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

L'image $\mathcal{B}$ de la base canonique $\mathcal{B}_0$ est donc:

$$\overrightarrow{OU}\,(\cos\alpha; \sin\alpha) \qquad \overrightarrow{OV}\,(-\sin\alpha; \cos\alpha)$$

On a :

$$\left\| \overrightarrow{OU} \right\| = \left\| \vec{u} \right\| = 1 \qquad \left\| \overrightarrow{OV} \right\| = \left\| \vec{v} \right\| = 1$$
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

Donc $\mathcal{B}$ est un repère orthonormé ; ainsi f est une isométrie.

De plus :

$$\text{Det } A = \begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix} = +1$$

Et :

Dans le plan, toute rotation de centre O est une isométrie positive.

2° Si Ω est différent de 0, la rotation de centre Ω est une transformation affine (cf. nos 803 et 837).

Et :

Dans le plan, toute rotation est une isométrie.

923. Isométrie positive ayant un point double.

Soit une isométrie positive f, autre que la transformation identité e, admettant un point double Ω.

On rapporte le plan à deux axes $x'\Omega x$ et $y'\Omega y$ orthonormés; les vecteurs unitaires de ces axes sont $\overrightarrow{\Omega I} = \vec{i}$ et $\overrightarrow{\Omega J} = \vec{j}$ (fig. 923 *a*).

L'isométrie f transforme $\overrightarrow{\Omega I}$ en $\overrightarrow{\Omega U} = \vec{u}$, et $\overrightarrow{\Omega J}$ en $\overrightarrow{\Omega V} = \vec{v}$; le repère $\mathcal{B} = (\overrightarrow{\Omega U}; \overrightarrow{\Omega V})$ est orthonormé positif.

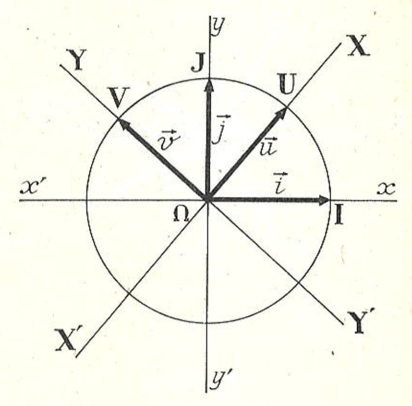


Fig. 923 a.

On pose :

$$\overline{\text{angle}}\,(\overrightarrow{\Omega I}; \overrightarrow{\Omega U}) = \theta, \text{ mod } 2\pi$$

Or :

$$\overline{\text{angle}}\,(\overrightarrow{\Omega I}; \overrightarrow{\Omega J}) = \frac{\pi}{2}, \text{ mod } 2\pi$$

et

$$\overline{\text{angle}}\,(\overrightarrow{\Omega U}; \overrightarrow{\Omega V}) = \frac{\pi}{2}$$

D'où :

$$\overline{\text{angle}}\,(\overrightarrow{\Omega J}; \overrightarrow{\Omega V}) = \overline{\text{angle}}\,(\overrightarrow{\Omega J}; \overrightarrow{\Omega I}) + \overline{\text{angle}}\,(\overrightarrow{\Omega I}; \overrightarrow{\Omega U}) + \overline{\text{angle}}\,(\overrightarrow{\Omega U}; \overrightarrow{\Omega V})$$

$$= -\frac{\pi}{2} + \theta + \frac{\pi}{2}$$

$$= \theta, \text{ mod } 2\pi$$

Par suite la rotation $g = \text{rot}\,(\Omega; \theta)$ transforme $\overrightarrow{\Omega I}$ en $\overrightarrow{\Omega U}$, et $\overrightarrow{\Omega J}$ en $\overrightarrow{\Omega V}$; par conséquent $f = g$.

Et :

> ***Si une isométrie positive, autre que l'identité, a un point double c'est une rotation ayant pour centre le point double, et son angle est l'angle d'un vecteur et de son image.***

924. Isométrie négative ayant un point double.

Soit une isométrie négative f admettant un point double Ω.

On rapporte le plan à deux axes $x'\Omega x$ et $y'\Omega y$ orthonormés; les vecteurs unitaires de ces axes sont $\overrightarrow{\Omega I} = \vec{i}$ et $\overrightarrow{\Omega J} = \vec{j}$ (fig. 924 *a*).

L'isométrie f transforme $\overrightarrow{\Omega I}$ en $\overrightarrow{\Omega U} = \vec{u}$, et $\overrightarrow{\Omega J}$ en $\overrightarrow{\Omega V} = \vec{v}$; le repère $(\overrightarrow{\Omega U}; \overrightarrow{\Omega V})$ est orthonormée négatif.

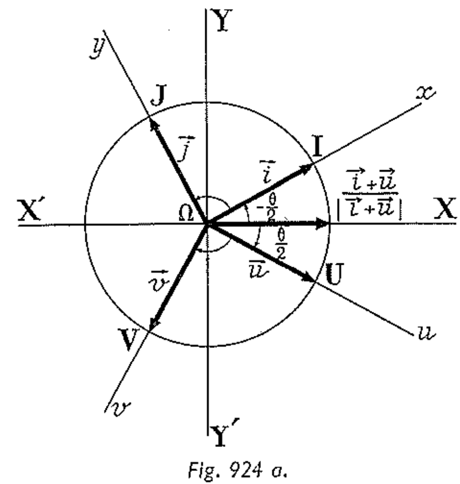


Fig. 924 a.

On pose :

$$\overline{\text{angle}}\,(\overrightarrow{\Omega I}; \overrightarrow{\Omega U}) = \theta, \text{ mod } 2\pi$$

Soit X'ΩX l'axe de vecteur unitaire $\dfrac{\vec{i} + \vec{u}}{\|\vec{i} + \vec{u}\|}$; X'ΩX est bissectrice de l'angle $(\vec{i}; \vec{u})$ (cf. n° 917) ; et on a :

$$\overline{\text{angle}}\,(\Omega X; \overrightarrow{\Omega U}) = \frac{\theta}{2}, \text{ mod } 2\pi$$

$$\overline{\text{angle}}\,(\Omega X; \overrightarrow{\Omega I}) = -\frac{\theta}{2}, \text{ mod } 2\pi$$

D'où :

$$\overline{\text{angle}}\,(\overrightarrow{\Omega X}; \overrightarrow{\Omega J}) = \overline{\text{angle}}\,(\overrightarrow{\Omega X}; \overrightarrow{\Omega I}) + \overline{\text{angle}}\,(\overrightarrow{\Omega I}; \overrightarrow{\Omega J})$$
$$= -\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{2}, \text{ mod } 2\pi$$

et

$$\overline{\text{angle}}\,(\overrightarrow{\Omega X}; \overrightarrow{\Omega V}) = \overline{\text{angle}}\,(\overrightarrow{\Omega X}; \overrightarrow{\Omega U}) + \overline{\text{angle}}\,(\overrightarrow{\Omega U}; \overrightarrow{\Omega V})$$
$$= \frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{2}, \text{ mod } 2\pi$$

Donc :

$$\overline{\text{angle}}\,(\Omega X; \overrightarrow{\Omega V}) = -\,\overline{\text{angle}}\,(\Omega X; \overrightarrow{\Omega J})$$

et $\overrightarrow{\Omega V}$ est le symétrique de $\overrightarrow{\Omega J}$ pour X'ΩX.

Donc le repère $(\overrightarrow{\Omega I}; \overrightarrow{\Omega J})$ a pour symétrique pour X'ΩX le repère $(\overrightarrow{\Omega U}; \overrightarrow{\Omega V})$; et $f = \text{sym}\,(X'\Omega X)$.

Et :

Si une isométrie négative a un point double, c'est une symétrie pour une droite passant par le point double.

925. Composée des deux symétries pour des points.

Soient les deux symétries $f = \text{sym}\,(S)$ et $g = \text{sym}\,(S')$ (fig. 925 *a*).

On a :

f ; $\quad M \longrightarrow M_1$

avec :

$$\overrightarrow{OM_1} = 2 \cdot \overrightarrow{OS} - \overrightarrow{OM}$$

g : $\quad M_1 \longrightarrow M'$

avec :

$$\overrightarrow{OM'} = 2 \cdot \overrightarrow{OS'} - \overrightarrow{OM_1}$$

Fig. 925 a.

D'où :

$$\overrightarrow{OM'} = 2 \cdot \overrightarrow{OS'} - 2 \cdot \overrightarrow{OS} + \overrightarrow{OM}$$
$$= 2\,(\overrightarrow{OS'} - \overrightarrow{OS}) + \overrightarrow{OM}$$

et enfin :

$$\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OM} + 2 \cdot \overrightarrow{SS'}$$

Ce résultat exprime que *M' est l'image de M par la translation* $t = t_{2\overrightarrow{SS'}}$. Donc :

$$g \circ f = t.$$

La composée de deux symétries pour des points est une translation.

Évidemment :

$$f \circ g = t_{-2\overrightarrow{SS'}}$$

926. Composée de deux symétries pour des droites parallèles.

Soient les deux symétries $f = \text{sym}\,(D_1)$ et $g = \text{sym}\,(D_2)$, D_1 et D_2 étant des droites parallèles (fig. 926 *a*).

On a, si M se projette orthogonalement en m_1 sur D_1

f : $\quad M \longrightarrow M_1$

avec

$$\overrightarrow{OM_1} = 2 \cdot \overrightarrow{Om_1} - \overrightarrow{OM}$$

et, si M et M_1 se projettent orthogonalement en m_2 sur D_2 :

g : $\quad M_1 \longrightarrow M'$

avec :

$$\overrightarrow{OM'} = 2 \cdot \overrightarrow{Om_2} - \overrightarrow{OM_1}$$

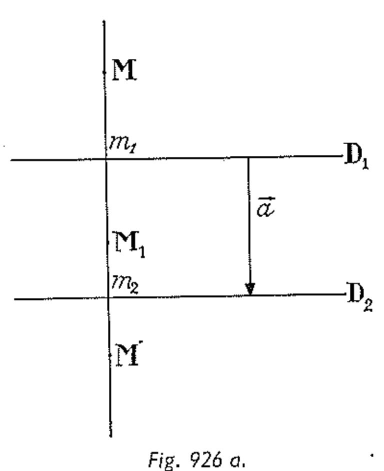


Fig. 926 a.

D'où :

$$\overrightarrow{OM'} = 2 \cdot \overrightarrow{Om_2} - 2\,\overrightarrow{Om_1} + \overrightarrow{OM}$$
$$= 2\left(\overrightarrow{Om_2} - \overrightarrow{Om_1}\right) + \overrightarrow{OM}$$

et enfin :

$$\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OM} + 2 \cdot \overrightarrow{m_1m_2}$$

Or $\overrightarrow{m_1m_2} = \vec{a}$, $\vec{a}$ étant le vecteur constant et orthogonal aux droites tel que la translation $t_{\vec{a}}$ transforme D_1 en D_2.

D'où :

$$\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OM} + 2\vec{a}$$

Ce résultat exprime que *M' est l'image de M par la translation* $t = t_{2\vec{a}}$.

Donc :

$$g \circ f = t.$$

La composée de deux symétries pour des droites parallèles est une translation.

Évidemment :

$$f \circ g = t_{-2\vec{a}}$$

Remarque. Soit une translation $t = t_{\vec{V}}$. On considère deux droites D_1 et D_2 orthogonales à $\vec{V}$ et telles que D_2 soit l'image de D_1 par la translation $t_{\frac{\vec{V}}{2}}$. Si $f = \text{sym}\,(D_1)$ et $g = \text{sym}\,(D_2)$, on a $g \circ f = t_{\vec{V}}$.

Donc :

Une translation est la composée de deux symétries pour des droites parallèles.

927. Composée de deux symétries pour des droites sécantes.

Soient les deux symétries $f = \text{sym}\,(D_1)$ et $g = \text{sym}\,(D_2)$; les droites D_1 et D_2 se coupent en Ω; on pose

$$\overline{\text{angle}}\,(D_1;\,D_2) = \theta, \bmod \pi \quad (\text{fig. } 927\,a).$$

$g_o f$ est une isométrie positive; et Ω, invariant par f et g, est un point double de $g_o f$. Par suite $g_o f$ est une rotation de centre Ω.

Soient :

$\overrightarrow{\Omega A}$ un vecteur de D_1 ; $f(\overrightarrow{\Omega A}) = \Omega A$, et $(g_o f)(\overrightarrow{\Omega A}) = g(\overrightarrow{\Omega A}) = \overrightarrow{\Omega A'}$, avec angle $(\overrightarrow{\Omega A}; \overrightarrow{\Omega A'})$

$= 2\,[\overline{\text{angle}}(D_1 ; D_2) + k\pi]$
$= 2 \cdot \overline{\text{angle}}(D_1 ; D_2) + k \cdot 2\pi$
$= 2\theta$; mod 2π

L'angle de la rotation est donc 2θ.

D'où :

$$g_o f = \text{rot}\,(\Omega \,;\, 2\theta).$$

La composée de deux symétries pour des droites sécantes est une rotation.

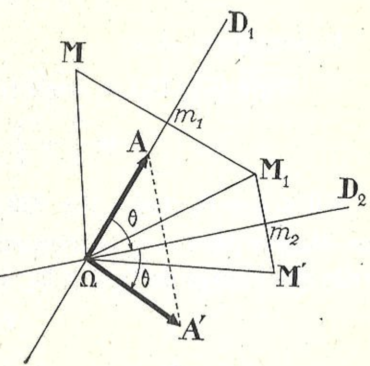
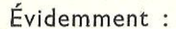


Fig. 927 a.



Évidemment :

$$f_o g = \text{rot}\,(\Omega \,;\, -2\theta).$$

Remarque. Soit un rotation $r = \text{rot}\,(\Omega; \alpha)$. On considère deux droites D_1 et D_2 passant par Ω et telles que D_2 soit l'image de D_1 par la rotation rot $\left(\Omega \,; \frac{\alpha}{2}\right)$. Si $f = \text{sym}\,(D_1)$ et $g = \text{sym}\,(D_2)$, on a $g_o f = \text{rot}\,(\Omega \,;\, \alpha)$. Donc :

Une rotation est la composée de deux symétries pour des droites passant par le centre de la rotation.

928. Composée de deux rotations.

Soient les deux rotations $f = \text{rot}\,(\Omega; \theta)$ et $g = \text{rot}\,(\Omega'; \varphi)$ $(\Omega \neq \Omega')$. On désigne par D_3, la droite $\Omega\Omega'$ (fig. 928 *a* et *b*).

Soient D_1 la droite image de D_3 par la rotation rot $\left(\Omega \,; -\frac{\theta}{2}\right)$ et D_2 la droite image de D_3 par la rotation rot $\left(\Omega' \,; \frac{\varphi}{2}\right)$.

On pose :

$$\alpha = \text{sym}\,(D_1) \qquad \beta = \text{sym}\,(D_2) \qquad \gamma = \text{sym}\,(D_3).$$

On a alors :

$$f = \gamma_o \alpha$$
$$g = \beta_o \gamma.$$

D'où :

$$\begin{aligned} g \circ f &= (\beta \circ \gamma) \circ (\gamma \circ \alpha) \\ &= \beta \circ (\gamma \circ \gamma) \circ \alpha \\ &= \beta \circ \alpha \end{aligned}$$

car $\gamma \circ \gamma = e$. Donc :

$$g \circ f = \beta \circ \alpha.$$

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned} \overline{\text{angle}}\,(D_1 ; D_2) &= \overline{\text{angle}}\,(D_1 ; D_3) + \overline{\text{angle}}\,(D_2 ; D_3), \bmod \pi \\ &= \frac{\theta}{2} + \frac{\varphi}{2} = \frac{\theta + \varphi}{2}, \bmod \pi, \end{aligned}$$

Si $\theta + \varphi = 0$, mod π (fig. 928 *a*), les droites D_1 et D_2 sont parallèles; on désigne par $t = t_{\vec{a}}$ la translation de vecteur $\vec{a}$ orthogonal à D_1 et D_2 telle que l'image de D_1 soit D_2; on a alors :

$$g \circ f = t_{2\vec{a}}$$

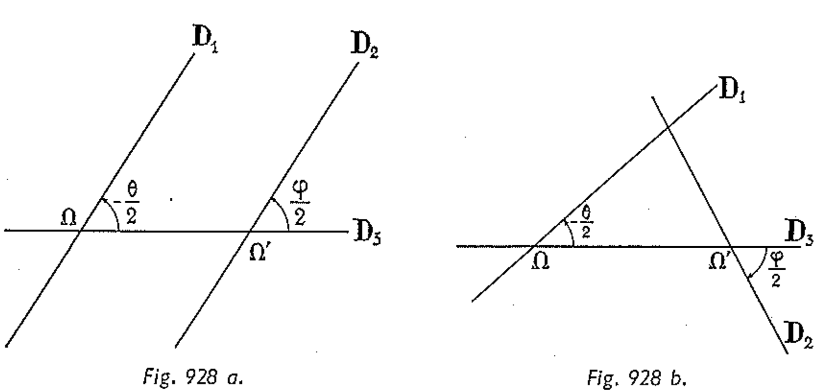


Fig. 928 a. *Fig. 928 b.*

Si $\theta + \varphi \neq 0$, *mod* π (fig. 928 *b*), les droites D_1 et D_2 se coupent en Ω ; on a alors :

$$g \circ f = \text{rot}\,(\Omega \,;\, \theta + \varphi).$$

D'où :

La composée de deux rotations de centres différents est une translation ou une rotation.

Cas particulier.

Soient les deux rotations $f = \text{rot}\,(\Omega ; \theta)$ et $g = \text{rot}\,(\Omega ; \varphi)$. Le raisonnement précédent est encore valable, D_3 étant une droite quelconque passant par Ω.

Si $\theta + \varphi = 0$, mod π, on a :

$$g_o f = e$$

Si $\theta + \varphi \neq 0$, mod π, on a :

$$g_o f = \text{rot}\ (\Omega\ ;\ \alpha + \beta).$$

En résumé :

La composée de deux rotations de même centre est une rotation de même centre.

929. Composée d'une translation et d'une rotation.

Soient la translation $t = t_{\vec{a}}$ et la rotation $f = \text{rot}\ (\Omega\ ;\ \theta)$ (fig. 929 *a*). On considère la droite D_3 passant par le point Ω et orthogonale au vecteur $\vec{a}$, la droite D_1 image de D_3 par la rotation rot $\left(\Omega\ ;\ \frac{\theta}{2}\right)$; et la droite D_2 image de D_3 par la translation $t_{-\frac{\vec{a}}{2}}$; soit Ω' le point d'intersection de D_1 et D_2.

On pose :

$$\alpha = \text{sym}\ (D_1) \qquad \beta = \text{sym}\ (D_2) \qquad \gamma = \text{sym}\ (D_3).$$

On a :

$$t = \gamma_o \beta$$

et

$$f = \alpha_o \gamma.$$

D'où :

$$f_o t = (\alpha_o \gamma)\ o\ (\gamma_o \beta)$$
$$= \alpha_o\ (\gamma_o \gamma)_o \beta$$

ou

$$f_o t = \alpha_o \beta$$

car $\gamma_o \gamma = e$.

Or :

$$\alpha_o \beta = \text{rot}\ (\Omega' ;\ \theta) = g.$$

Et :

$$f_o t = g$$

Fig. 929 a.

La composée d'une translation et d'une rotation est une rotation.

930. Composée d'une rotation et d'une translation.

Soient la rotation $f = \text{rot}\ (\Omega\ ;\ 0)$ et la translation $t = t_{\vec{a}}$. (fig. 930 *a*).

On considère la droite D_3 passant par le point Ω et orthogonale au vecteur $\vec{a}$, la droite D_1 image de D_3 par la translation $t_{\frac{\vec{a}}{2}}$, et la droite D_2 image de D_3 par la rotation $\text{rot}\left(\Omega\ ;\ -\frac{\theta}{2}\right)$. Soit Ω' le point d'intersection de D_1 et D_2.

On pose :

$$\alpha = \text{sym}\ (D_1) \qquad \beta = \text{sym}\ (D_2) \qquad \varphi = \text{sym}\ (D_3).$$

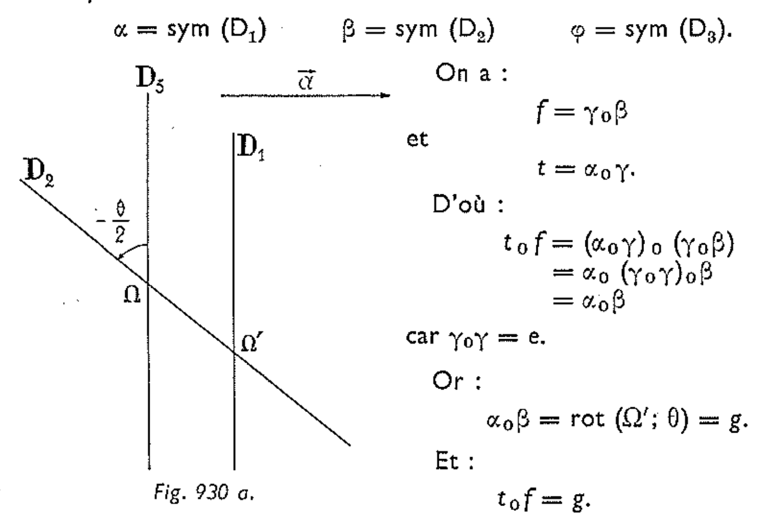


Fig. 930 *a*.

On a :

$$f = \gamma \circ \beta$$

et

$$t = \alpha \circ \gamma.$$

D'où :

$$t \circ f = (\alpha \circ \gamma) \circ (\gamma \circ \beta)$$
$$= \alpha \circ (\gamma \circ \gamma) \circ \beta$$
$$= \alpha \circ \beta$$

car $\gamma \circ \gamma = e$.

Or :

$$\alpha \circ \beta = \text{rot}\ (\Omega'\ ;\ \theta) = g.$$

Et :

$$t \circ f = g.$$

La composée d'une rotation et d'une translation est une rotation.

Remarque. Les deux études précédentes montrent que

$$f \circ t \neq t \circ f.$$

931. Composée d'une translation et d'une symétrie pour une droite.

Soient la translation $t = t_{\vec{a}}$ et la symétrie $f = \text{sym}\ (D)$.

1° Le vecteur $\vec{a}$ est orthogonal à D.

On considère la droite D', image de D par la translation $t_{-\frac{\vec{a}}{2}}$ (fig. 931 *a*).

On pose :

$$\sigma = \text{sym}\,(D').$$

On a :

$$t = f_o \sigma.$$

D'où :

$$f_o t = f_o\,(f_o \sigma) = (f_o f)_o \sigma$$

ou

$$f_o t = \sigma. \qquad (931\,;\,1)$$

2° **Le vecteur $\vec{a}$ n'est pas orthogonal à D.**

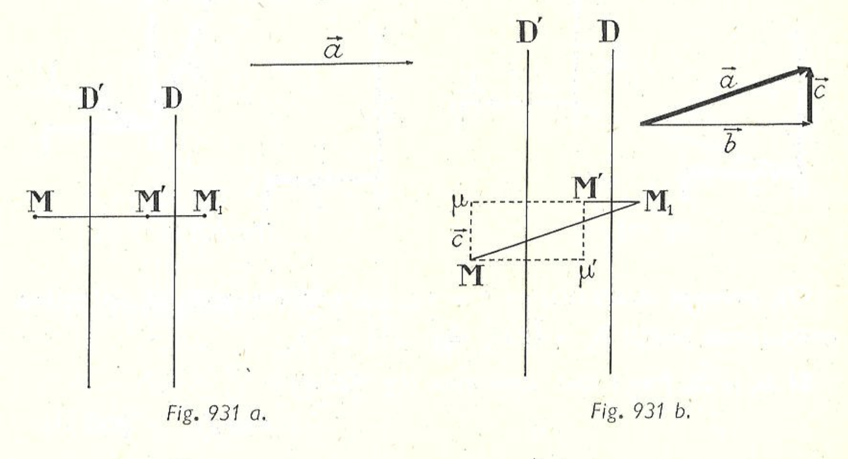


Fig. 931 a. *Fig. 931 b.*

Le vecteur $\vec{a}$ est la somme d'un vecteur $\vec{b}$ orthogonal à D et d'un vecteur $\vec{c}$ parallèle à D (fig. 931 *b*). On a :

$$t_{\vec{a}} = t_{\vec{b}}\,{}_o\, t_{\vec{c}}$$

D'où :

$$f_o t = f_o(t_{\vec{b}}\,{}_o\, t_{\vec{c}}) = (f_o t_{\vec{b}})_o\, t_{\vec{c}}$$

ou

$$f_o \mathbf{t} = \sigma_o \tau \qquad (931\,;\,2)$$

avec $\tau = t_{\vec{c}}$.

Et :

La composée d'une translation et d'une symétrie pour une droite est la composée d'une translation et d'une symétrie pour une droite, le vecteur de la translation étant parallèle à l'axe de la symétrie.

On a : $\sigma_o \tau = \tau_o \sigma$

On peut faire une étude analogue pour la composée d'une symétrie pour une droite et d'une translation.

932. Réduction canonique d'une isométrie positive.

Soit une isométrie positive f.

Elle transforme le repère canonique orthonormé $\mathcal{B}_0 = (\overrightarrow{OI} = \vec{i}\,;\ \overrightarrow{OJ} = \vec{j})$ en un repère orthonormé positif $\mathcal{B} = (\overrightarrow{\Omega U} = \vec{u}\,;\ \overrightarrow{\Omega V} = \vec{v})$ (fig. 932 *a*, *b*).

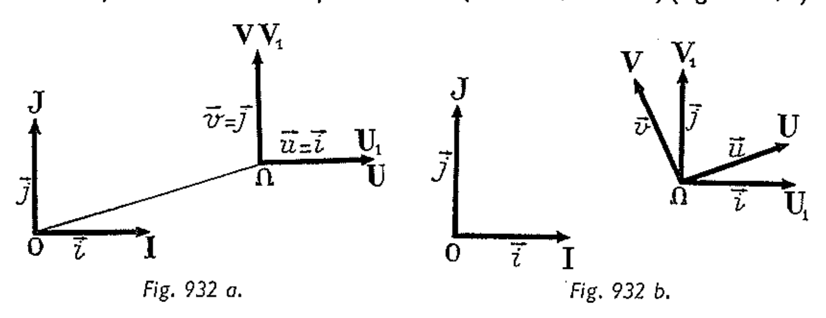


Fig. 932 a. *Fig. 932 b.*

On envisage la translation $t = t_{\overrightarrow{O\Omega}}$ qui transforme $\mathcal{B}_0$ en un repère orthonormé positif $\mathcal{B}_1 = (\overrightarrow{\Omega U_1} = \vec{i}\,;\ \overrightarrow{\Omega V_1} = \vec{\ })$.

Si $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}$**,** f et t sont identiques (fig. 932 *a*)

$$f = t \qquad (932\,;1)$$

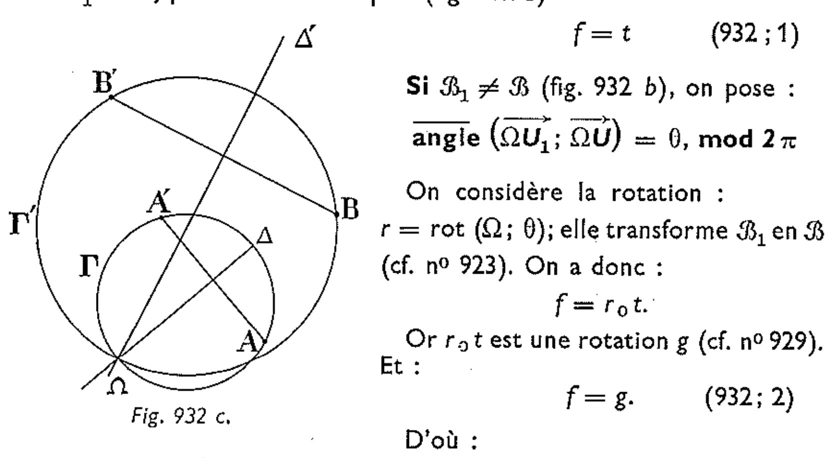


Fig. 932 c.

Si $\mathcal{B}_1 \neq \mathcal{B}$ (fig. 932 *b*), on pose :

$$\overline{\text{angle}}\,(\overrightarrow{\Omega U_1}\,;\ \overrightarrow{\Omega U}) = \theta, \text{ mod } 2\pi$$

On considère la rotation : $r = \text{rot}\,(\Omega\,;\ \theta)$; elle transforme $\mathcal{B}_1$ en $\mathcal{B}$ (cf. nº 923). On a donc :

$$f = r \circ t.$$

Or $r \circ t$ est une rotation g (cf. nº 929). Et :

$$f = g. \qquad (932\,;\ 2)$$

D'où :

Toute isométrie positive est une translation ou une rotation.

Remarque. Dans le cas où l'isométrie f se réduit à une rotation, on considère les points A et B et leurs images $A' = f(A)$ et $B' = f(B)$ (fig. 932 c).

Le centre Ω de la rotation appartient aux médiatrices Δ et Δ' des segments AA' et BB'.

Le centre Ω appartient aux cercles Γ et Γ', lieux des points M tels que

$$\overline{\text{angle}}\,(\text{MA}\,;\ \text{MA}') = \theta, \bmod \pi$$

$$\overline{\text{angle}}\,(\text{MB}\,;\ \text{MB}') = \theta, \bmod \pi.$$

Δ, Δ', Γ, Γ' ***servent à déterminer le centre*** Ω.

933. Réduction canonique d'une isométrie négative.

Soit une isométrie négative f.

Elle transforme le repère canonique orthonormé $\mathcal{B}_0 = (\overrightarrow{OI} = \vec{i}\,; \overrightarrow{OJ} = \vec{j})$ en un repère orthonormé négatif $\mathcal{B} = (\overrightarrow{\Omega U} = \vec{u}\,; \overrightarrow{\Omega V} = \vec{v})$ (fig. 933 *a*).

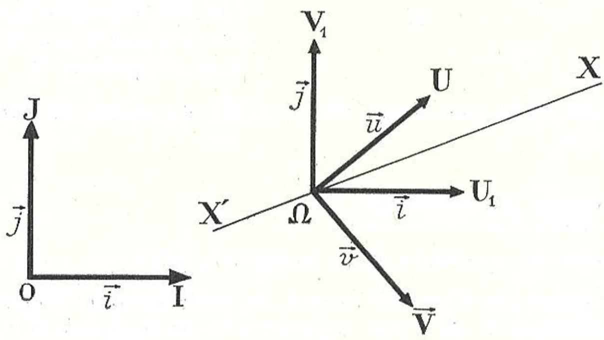


Fig. 933 a.

On envisage la translation $t = t_{\overrightarrow{O\Omega}}$ qui transforme $\mathcal{B}_0$ en un repère orthonormé positif $\mathcal{B}_1 = (\overrightarrow{\Omega U_1} = \vec{i}\,; \overrightarrow{\Omega V_1} = \vec{j})$.

Soit X'ΩX l'axe de vecteur unitaire $\dfrac{\vec{i} + \vec{u}}{\|\vec{i} + \vec{u}\|}$ (cf. nº 924). La symétrie s de support X'ΩX transforme $\mathcal{B}_1$ en $\mathcal{B}$. On a donc :

$$f = s \circ t$$

Or (cf. nº 931) $s \circ t$ est la composée d'une translation τ et d'une symétrie σ pour une droite, le vecteur de la translation étant parallèle à l'axe de la symétrie :

$$s \circ t = \sigma \circ \tau.$$

D'où :

$$f = \sigma \circ \tau.$$

Et :

Toute isométrie négative est la composée d'une translation et d'une symétrie pour une droite, le vecteur de la translation étant parallèle à l'axe de la symétrie.

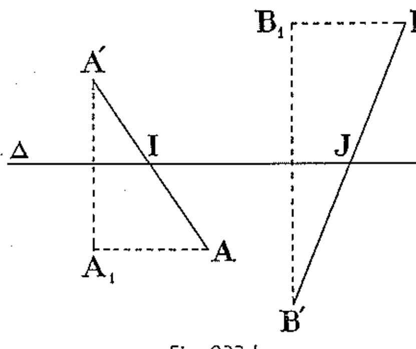


Fig. 933 b.

Remarque. On considère les points A et B, et leurs images $A' = f(A)$ et $B' = f(B)$ par l'isométrie négative f. On sait que

$$f = \sigma \circ \tau$$

$\sigma = \text{sym}(\Delta)$ et $\tau = t_{\vec{c}}$, $\vec{c}$ étant parallèle à Δ (fig. 933 *b*).

Le milieu I de AA′ et le milieu J de BB′ appartiennent à Δ. *Ces deux points déterminent donc l'axe Δ de la symétrie σ.*

Soient M et son image $M' = f(M)$. Le milieu de MM′ appartient à Δ.

934. Éléments de symétrie.

1° Centre de symétrie d'un ensemble plan.

Un point fixe O est un centre de symétrie pour l'ensemble V si le symétrique V′ de V par rapport à O est identique à V.

On a donc :

sym (O) : $\quad V \subset E \longrightarrow V' = V.$

Les figures 934 *a* et 934 *b* présentent un centre O de symétrie.



Fig. 934 a.

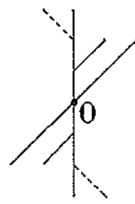


Fig. 934 b.

2° Axe de symétrie d'un ensemble plan.

Une droite fixe (Δ) est un axe de symétrie pour l'ensemble V si le symétrique V′ de V par rapport à (Δ) est identique à V.

On a donc :

sym (Δ) : $V \subset E \longrightarrow V' = V$.

Les figures 934, *b; c; d;* e présentent un axe (Δ) de symétrie.

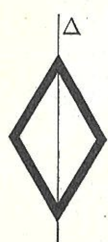


Fig. 934 c.

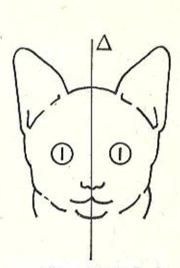


Fig. 934 d.

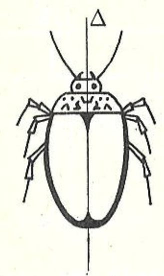


Fig. 934 e.

3° Éléments de symétrie d'une droite.

Soit une droite (D) (fig. 934 f).

Elle admet les éléments de symétrie suivants :

— la droite (D) est un axe de symétrie;

— toutes les perpendiculaires à (D) sont des axes de symétries;

— tous les points de (D) sont des centres de symétrie.

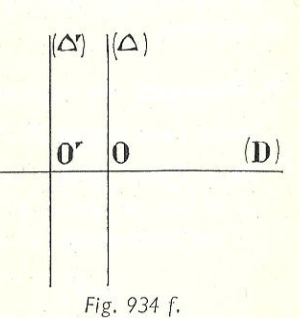


Fig. 934 f.

(Δ)
B I A

Fig. 934 g.

4° Éléments de symétrie d'un segment.

Soit un segment AB (fig. 934 g).

Il admet les éléments de symétrie suivants :

— la droite AB est un axe de symétrie;

— le milieu I du segment AB est un centre de symétrie;

— la médiatrice (Δ) du segment est un axe de symétrie.

5° Éléments de symétrie d'une bande.

Soit une bande (D; D') (fig. 934 h).

Elle admet les éléments de symétrie suivants :

— l'axe longitudinal Δ est un axe de symétrie;

— les points de Δ sont des centres de symétrie;

— les perpendiculaires communes aux bords de la bande sont des axes de symétrie.

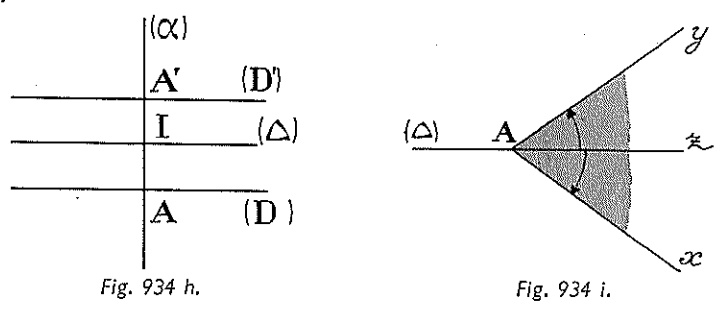


Fig. 934 h. *Fig. 934 i.*

6° Éléments de symétrie d'un secteur angulaire.

Soit un secteur angulaire (Ax; Ay) (*fig.* 934 *i*).

La droite Δ *qui porte la bissectrice* Az *de ce secteur angulaire est un axe de symétrie.*

7° Éléments de symétrie de deux droites sécantes.

Soient deux droites D et D' se coupant en O (fig. 934 j).

Cette figure admet les éléments de symétrie suivants :

— O est un centre de symétrie;

— les bissectrices Δ et Δ' sont des axes de symétrie.

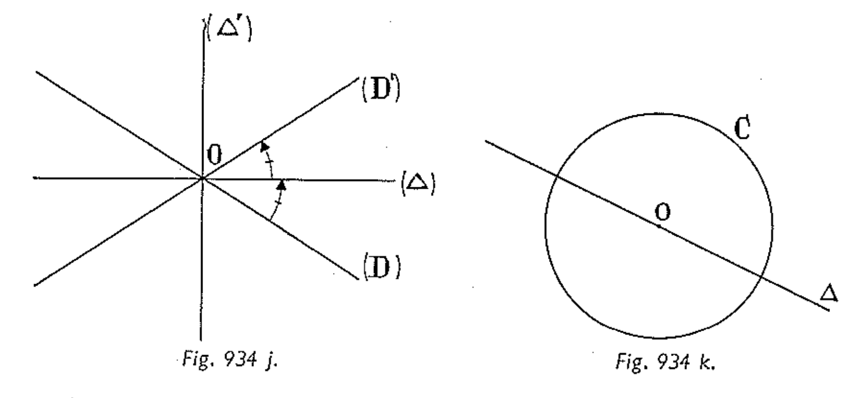


Fig. 934 j. *Fig. 934 k.*

8° Éléments de symétrie d'un cercle.

Soit un cercle C de centre O (fig. 934 k).

Il admet les éléments de symétrie suivants :

— O est un centre de symétrie;

— toutes les droites passant par O sont des axes de symétrie.

9° Axe de symétrie d'un triangle isocèle.

Un triangle ABC isocèle de sommet A, admet comme axe de symétrie le support de la bissectrice de son angle au sommet (fig. 934 l).

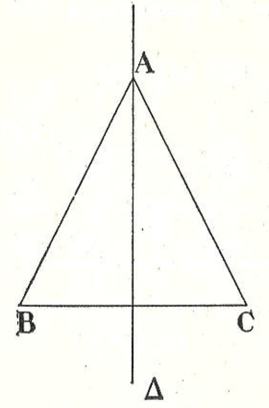


Fig. 934 l.

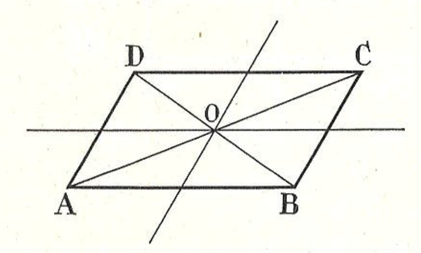


Fig. 934 m.

10° Centre de symétrie d'un parallélogramme.

Soit un parallélogramme ABCD. Il admet le milieu O des diagonales AC et BD comme centre de symétrie (fig. 934 m).

11° Éléments de symétrie d'un rhomboïde.

Le fer de lance et le cerf-volant ont un axe de symétrie (fig. 934 n, o).

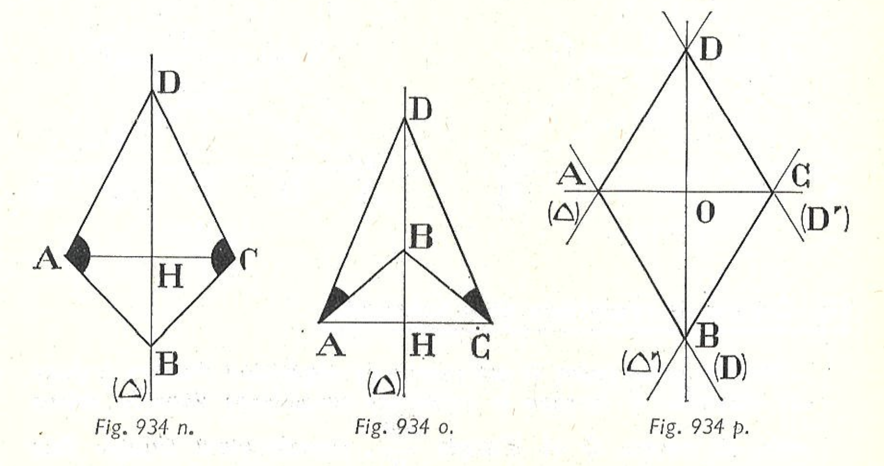


Fig. 934 n. Fig. 934 o. Fig. 934 p.

Le losange a un centre de symétrie et deux axes de symétrie (fig. 934 ; p).

12° Éléments de symétrie d'un rectangle.

Un rectangle a un centre de symétrie et deux axes de symétrie (fig. 934 q).

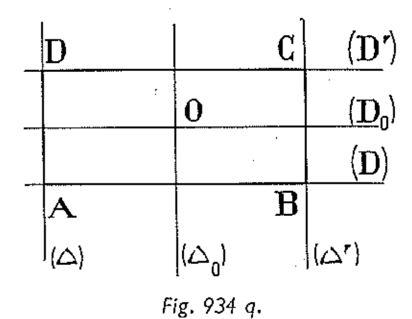


Fig. 934 q.

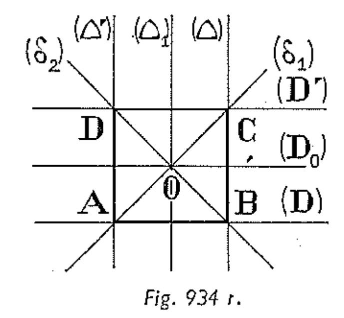


Fig. 934 r.

13° Éléments de symétrie d'un carré.

Un carré a un centre de symétrie et quatre axes de symétrie (fig. 934 r).

14° Axe de symétrie d'un trapèze isocèle.

Un trapèze isocèle a un axe de symétrie (fig. 934 s, t).

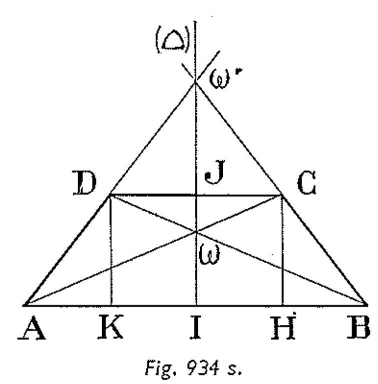


Fig. 934 s.

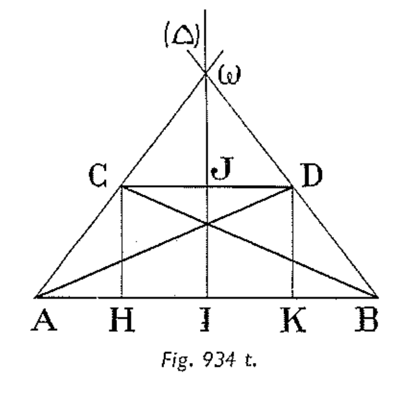
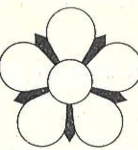


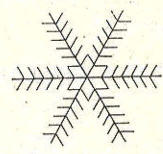
Fig. 934 t.

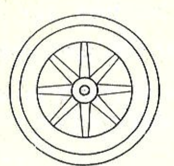
935. Centre de répétition d'un ensemble.

On dit qu'un point O est centre de répétition d'ordre n pour un ensemble E lorsque n rotations successives dans le même sens, de centre O et d'angle $\frac{360^\circ}{n}$, transforment chaque fois l'ensemble E en lui-même.

Les figures 935 *a*, *b*, *c*, présentent un centre de répétition.


Fig. 935 a.


Fig. 935 b.


Fig. 935 c.

Les polygones réguliers offrent des exemples de centre de répétition. Le centre O d'un polygone régulier de *n* côtés est un centre de répétition d'ordre *n*.

936. Éléments de symétrie d'un polygone régulier.

1° ***Le support de chaque rayon est axe de symétrie.***

Si *n* est pair, les supports des apothèmes sont des axes de symétrie, et O est un centre de symétrie (fig. 936 *a* et *b*).

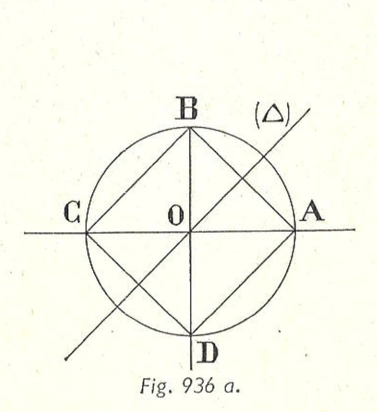


Fig. 936 a.

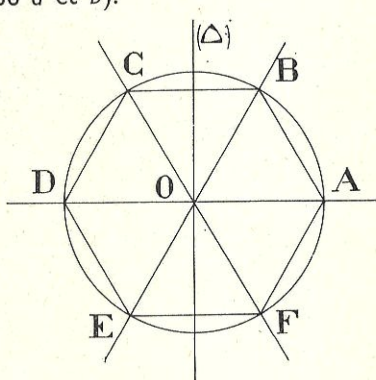


Fig. 936 b.

Si *n* est impair, les supports des apothèmes se confondent avec les supports des rayons. Ce sont *n* axes de symétrie. O n'est pas centre de symétrie (fig. 936 *c*).

Dans tous les cas, il y a *n* axes de symétrie.

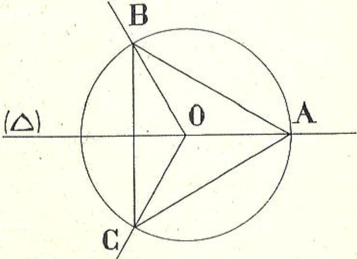


Fig. 936 c.

2° On envisage maintenant la somme vectorielle :

$$\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \ldots + \overrightarrow{OK} + \overrightarrow{OL}$$

Si (Δ) est un axe de symétrie du polygone, les vecteurs de la somme sont, ou bien sur (Δ), ou symétriques deux à deux pour (Δ). Le vecteur $\overrightarrow{OR}$ doit donc être sur (Δ).

Pour la même raison, il doit se trouver sur tous les axes de symétrie. Il est donc nul et :

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \ldots + \overrightarrow{OK} + \overrightarrow{OL} = 0 \qquad (936;1)$$

CHAPITRE LXIV

ISOMÉTRIES DANS L'ESPACE

937. Symétrie pour un point.

1° Dans l'espace euclidien R^3, on donne un point fixe S (fig. 937 *a*). A un point M de l'espace on fait correspondre un point M′ tel que

$$\overrightarrow{SM'} = -\overrightarrow{SM} \qquad (937\,;\,1)$$

On définit ainsi une transformation f de l'espace :

$$f: \qquad M \in R^3 \longrightarrow M' = f(M) \in R^3$$

f est appelée une symétrie pour le point S (ou par rapport à S).

Le point S est le centre de cette symétrie.

On note :

$$f = \text{sym}(S).$$

Fig. 937 a.

2° f n'est autre que l'homothétie de centre S et de rapport -1.

$$f = \text{sym}(S) = \text{hom}(S\,;-1). \qquad (937;2)$$

Par suite :

Dans l'espace euclidien, toute symétrie pour un point est une transformation affine.

3° La formule (937 ; 1) s'écrit :

$$\overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OS} = -\left(\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OS}\right)$$

D'où la formule fondamentale :

$$\boldsymbol{\overrightarrow{OM'} = -\overrightarrow{OM} + 2\cdot\overrightarrow{OS}} \qquad (937\,;\,3)$$

Elle traduit le fait que S est le milieu du segment MM′.

4° Si le centre de symétrie est O, on a (fig. 937 *b*) :

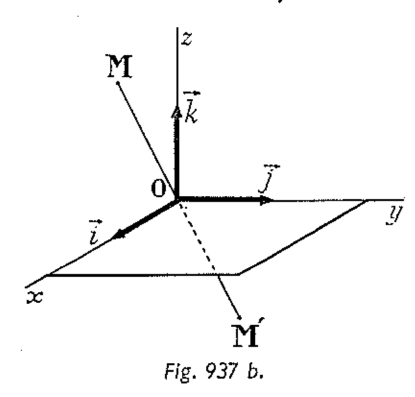


Fig. 937 b.

$$\overrightarrow{OM'} = -\overrightarrow{OM}$$

En traduisant analytiquement, on obtient :

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \\ z' = -z \end{cases} \qquad (937\,;\,4)$$

La matrice de la transformation (qui dans ce cas est linéaire) est

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

L'image $\mathcal{B}$ du repère canonique est donc :

$$\overrightarrow{OU}(-1\,;0\,;0) \quad \overrightarrow{OV}(0\,;-1\,;0) \quad \overrightarrow{OW}(0\,;0\,;-1)$$

On a :

$$\|\overrightarrow{OU}\| = \|\vec{u}\| = 1 \quad \|\overrightarrow{OV}\| = \|\vec{v}\| = 1 \quad \|\overrightarrow{OW}\| = \|\vec{u}\| = 1$$

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = 0 \qquad \vec{u}\cdot\vec{w} = 0 \qquad \vec{v}\cdot\vec{w} = 0$$

Donc, $\mathcal{B}$ est un repère orthonormé ; ainsi f est une isométrie.

De plus

$$\text{Det}\ A = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -1$$

Et :

Dans l'espace, toute symétrie pour un point est une isométrie négative.

5° *La symétrie pour un point est involutive,*

car $\overset{-1}{f} = f$.

938. Symétrie pour une droite.

1° Dans l'espace euclidien R^3, on donne une droite fixe D (fig. 938 *a*). Soient un point M quelconque de l'espace et *m* sa projection orthogonale sur D. Au point M on fait correspondre le point M' tel que

$$\overrightarrow{mM'} = -\overrightarrow{mM} \qquad (938\,;\,1)$$

On définit ainsi une transformation f de l'espace appelée ***symétrie pour la droite D*** (ou par rapport à D) :

$$f: \qquad M \in R^3 \longrightarrow M' = f(M) \in R^3$$

D est le support, ou l'axe de la symétrie.

On note :

$$f = \text{sym}(D).$$

2° La formule (938; 1) s'écrit :

$$\overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{Om} = -\left(\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{Om}\right)$$

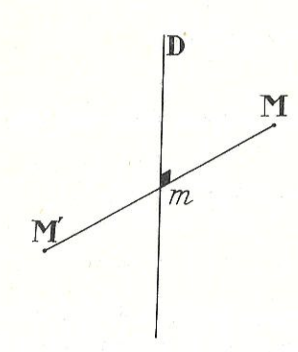


Fig. 938 a.

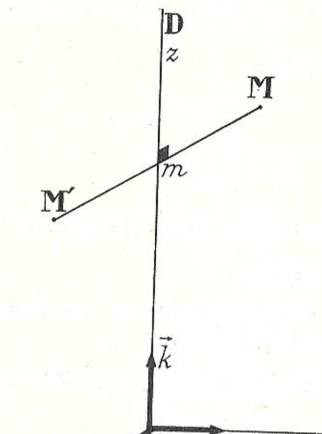


Fig. 938 b.

ou

$$\overrightarrow{\mathbf{OM}'} = -\overrightarrow{\mathbf{OM}} + 2 \cdot \overrightarrow{\mathbf{Om}} \qquad (938;2)$$

3° On suppose que D passe par O et on rapporte l'espace à trois axes orthonormés $x'Ox$, $y'Oy$, $z'Oz$, l'axe $z'Oz$ étant sur D; en traduisant analytiquement la formule (938; 2), on obtient :

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \\ z' = z \end{cases} \qquad (938;3)$$

$f = \text{sym}(z'Oz)$ est donc une transformation linéaire de R^3.

La matrice de f est

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

L'image $\mathcal{B}$ du repère canonique est

$\overrightarrow{OU} = \vec{u}(-1;0;0) \quad \overrightarrow{OV} = \vec{v}(0;-1;0) \quad \overrightarrow{OW} = \vec{w}(0;0;1)$

On a :

$$\|\vec{u}\| = 1 \qquad \|\vec{v}\| = 1 \qquad \|\vec{w}\| = 1$$

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = 0 \qquad \vec{u}\cdot\vec{w} = 0 \qquad \vec{v}\cdot\vec{w} = 0$$

$\mathcal{B}$ est un repère orthonormé ; et f est une isométrie.

De plus

$$\text{Det}\, A = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Et :

La symétrie $f = \text{sym}\,(z'Oz)$ *est une isométrie positive.*

Par suite :

Dans l'espace les symétries pour des droites sont des isométries positives.

4° *La symétrie* $f = \text{sym}\,(D)$ *est involutive, car* $\overset{-1}{f} = f$.

939. Symétrie pour un plan.

1° Dans l'espace euclidien R^3 on considère un plan fixe P (fig. 939 *a*). Soient M un point quelconque de l'espace, et m sa projection orthogonale sur P.

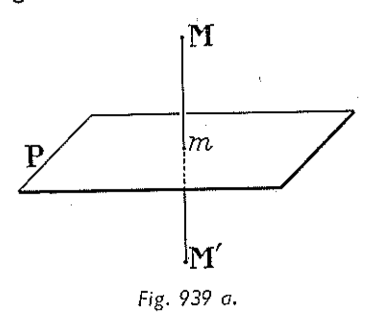


Fig. 939 a.

A ce point M on fait correspondre le point M' tel que

$$\overrightarrow{mM'} = -\overrightarrow{mM} \qquad (939\,;1)$$

On définit ainsi une transformation f de l'espace appelée **symétrie pour le plan P** (ou par rapport au plan).

$$f : \; M \in R^3 \longrightarrow M' = f(M) \in R^3$$

P est le support ou le plan de la symétrie.

On note :

$$f = \text{sym}(P).$$

2° La formule (939; 1) s'écrit :

$$\overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{Om} = -\left(\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{Om}\right)$$

ou

$$\overrightarrow{OM'} = -\overrightarrow{OM} + 2\cdot\overrightarrow{Om} \qquad (939\,;2)$$

3° On suppose que P passe par O et on rapporte l'espace à trois axes orthonormés : $x'Ox$, $y'Oy$, $z'Oz$ (fig. 939 *b*), les axes $x'Ox$ et $y'Oy$ étant dans le plan P; en traduisant analytiquement la formule (939; 2) on obtient :

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = y \\ z' = -z \end{cases} \qquad (939\,;\,3)$$

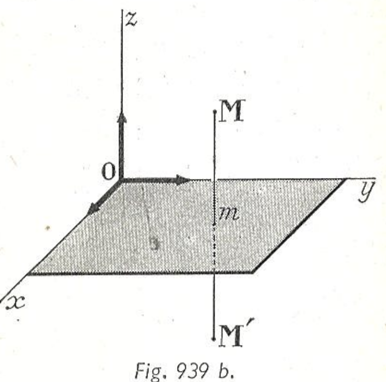


Fig. 939 b.

Donc :

La symétrie f = sym (xOy) *est une transformation linéaire de* R^3.

La matrice de cette transformation *f* est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

L'image $\mathcal{B}$ du repère canonique est

$$\overrightarrow{OU} = \vec{u}(1;0;0) \qquad \overrightarrow{OV} = \vec{v}(0;1;0) \qquad \overrightarrow{OW} = \vec{w}(0;0;-1)$$

On a :

$$\|\vec{u}\| = 1 \qquad \|\vec{v}\| = 1 \qquad \|\vec{w}\| = 1$$

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = 0 \qquad \vec{u}\cdot\vec{w} = 0 \qquad \vec{v}\cdot\vec{w} = 0$$

$\mathcal{B}$ est un repère orthonormé, et *f* est une isométrie.

De plus :

$$\operatorname{Det} A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -1$$

Et :

La symétrie f = sym (xOy) *est une isométrie négative.*

Par suite :

Dans l'espace, les symétries pour des plans sont des isométries négatives.

4° *La symétrie* f = sym *(P) est involutive*, car $\overset{-1}{f} = f$.

940. Rotation.

1° ***Dans l'espace euclidien*** R^3, **on considère un axe fixe** $u'\Omega u$ **de vecteur-unitaire** $\vec{R}$, **et un angle dièdre orienté de mesure algébrique** α (fig. 940 *a*).

Soient M un point quelconque de l'espace, et m sa projection orthogonale sur l'axe u'Ωu.

A ce point M on fait correspondre le point M' tel que

— ***M' se projette orthogonalement en m sur u'Ωu***

— $\|\overrightarrow{mM'}\| = \|\overrightarrow{mM}\|$

— $\overline{\textbf{dièdre}}$ ***(u' Ωu; M; M') = α.***

On définit ainsi une transformation f de l'espace, appelée ***rotation d'axe u'Ωu et d'angle α.***

$$f: \qquad M \in R^3 \longrightarrow M' = f(M) \in R^3$$

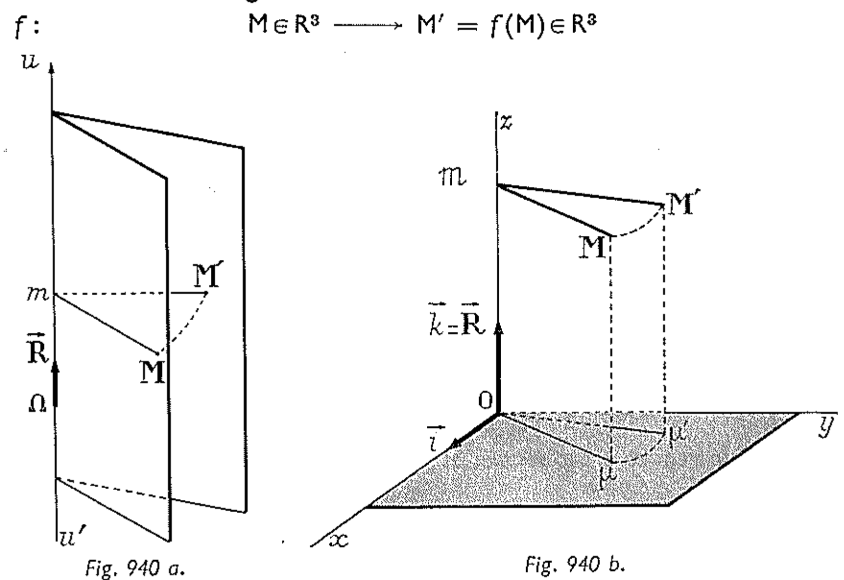


Fig. 940 a. *Fig. 940 b.*

On note : $f = \text{rot}\,(u'\Omega u\,;\,\alpha)$

2° L'espace étant rapporté aux axes orthonormés $x'Ox$, $y'Oy$, $z'Oz$, on se propose d'étudier la rotation $f = \text{rot}\ (z'Oz;\ \alpha)$ (fig. 940 *b*).

Si M et M' se projettent orthogonalement en μ et μ' sur le plan xOy, on a dans le plan xOy :

$$\overline{\text{angle}}\,(\overrightarrow{O\mu}\,;\,\overrightarrow{O\mu'}) = \alpha$$

Et dans le plan xO, μ' est l'image de μ par rot (O; α). Par conséquent les coordonnées de M' sont (cf. 922) :

$$\begin{cases} x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha \\ y' = x\sin\alpha + y\cos\alpha \\ z' = z \end{cases} \qquad (940\,;\,2)$$

Donc f = rot (z'Oz; α) *est une transformation linéaire de l'espace.*

La matrice de f est

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

L'image $\mathcal{B}$ du repère canonique est

$$\overrightarrow{OU} = \vec{u}(\cos\alpha;\ \sin\alpha;\ 0) \qquad \overrightarrow{OV} = \vec{v}(-\sin\alpha;\ \cos\alpha;\ 0)$$

$$\overrightarrow{OW} = \vec{w}(0;\ 0;\ 1)$$

On a :

$$\|\vec{u}\| = 1 \qquad \|\vec{v}\| = 1 \qquad \|\vec{w}\| = 1$$

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = 0 \qquad \vec{u}\cdot\vec{w} = 0 \qquad \vec{v}\cdot\vec{w} = 0$$

$\mathcal{B}$ est un repère orthonormé, et f *est une isométrie.*

De plus :

$$\text{Det } A = \begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Et :

La rotation $f = \text{rot}\,(z'Oz;\ \alpha)$ *est une isométrie positive.*

Par suite :

Dans l'espace les rotations sont des isométries positives.

4º Si $f = \text{rot}\,(u'\Omega u;\ \alpha)$, on a :

$$\overset{-1}{f} = \text{rot}\,(u'\Omega u;\ -\alpha).$$

5º On voit immédiatement que la symétrie pour la droite D est une rotation d'angle M :

$$\text{sym (D)} = \text{rot}\,(\vec{D};\ \pi)$$

941. Composée de deux symétries pour des points.

Soient les deux symétries $f = \text{sym (S)}$ et $g = \text{sym (S')}$ (fig. 941 *a*).

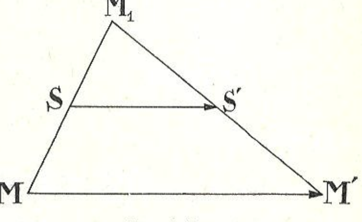


Fig. 941 a.

On a :

f : $\quad M \longrightarrow M_1$

avec :

$$\overrightarrow{OM_1} = 2\cdot\overrightarrow{OS} - \overrightarrow{OM}$$

g : $\quad M_1 \longrightarrow M'$

avec :

$$\overrightarrow{OM'} = 2\cdot\overrightarrow{OS'} - \overrightarrow{OM_1}$$

D'où :

$$\overrightarrow{OM'} = 2 \cdot \overrightarrow{OS'} - 2 \cdot \overrightarrow{OS} + \overrightarrow{OM}$$
$$= 2\left(\overrightarrow{OS'} - \overrightarrow{OS}\right) + \overrightarrow{OM}$$

ou

$$\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OM} + 2 \cdot \overrightarrow{SS'} \qquad 941\,;\,1)$$

Ce résultat exprime que *M' est l'image de M par la translation* $t = t_{2.\overrightarrow{SS'}}$.

Donc :

$$g \circ f = t.$$

La composée de deux symétries pour des points est une translation.

Évidemment :

$$f \circ g = t_{-2.\overrightarrow{SS'}}$$

942. Composée de deux symétries pour des plans parallèles.

Soient les deux symétries $f = \text{sym}(P_1)$ et $g = \text{sym}(P_2)$, P_1 et P_2 étant des plans parallèles (fig. 942 *a*).

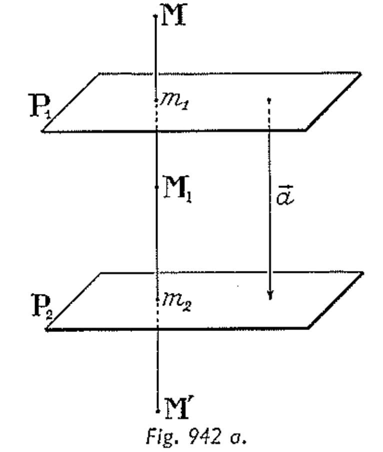


Fig. 942 a.

On a, si M se projette orthogonalement en m_1 sur P_1 :

$$f: \qquad M \longrightarrow M_1$$

avec :

$$\overrightarrow{OM_1} = 2 \cdot \overrightarrow{Om_1} - \overrightarrow{OM}$$

et, si M et M_1 se projettent orthogonalement en m_2 sur P_2 :

$$g: \qquad M_1 \longrightarrow M'$$

avec :

$$\overrightarrow{OM'} = 2 \cdot \overrightarrow{Om_2} - \overrightarrow{OM_1}$$

D'où :

$$\overrightarrow{OM'} = 2 \cdot \overrightarrow{Om_2} - 2 \cdot \overrightarrow{Om_1} + \overrightarrow{OM}$$
$$= 2 \cdot \left(\overrightarrow{Om_2} - \overrightarrow{Om_1}\right) + \overrightarrow{OM}$$

et enfin :

$$\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OM} + 2 \cdot \overrightarrow{m_1 m_2}$$

Or $\overrightarrow{m_1m_2} = \vec{a}$, $\vec{a}$ étant le vecteur constant et orthogonal aux plans tel que la translation $t_{\vec{a}}$ transforme P_1 en P_2.

D'où : $$\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OM} + 2 \cdot \vec{a}$$

Ce résultat exprime que *M′ est l'image de M par la translation* $t = t_{2\vec{a}}$.

Donc : $$g \circ f = t.$$

La composée de deux symétries pour des plans parallèles est une translation.

Évidemment : $$f \circ g = t_{-2\vec{a}}.$$

Remarque. Soit la translation $t = t_{\vec{V}}$. On considère deux plans P_1 et P_2 orthogonaux à $\vec{V}$ et tels que P_2 soit l'image de P_1 par la translation $t_{\frac{\vec{V}}{2}}$.

Si $f = \text{sym}(P_1)$ et $g = \text{sym}(P_2)$, on a $g \circ f = t_{\vec{V}}$. Donc :

Une translation est la composée de deux symétries pour des plans parallèles.

943. Isométrie positive ayant une droite de points doubles.

Soit une isométrie positive *f*, autre que l'identité e, admettant comme points doubles tous les points de la droite Δ.

On rapporte l'espace à trois axes $x'\Omega x$, $y'\Omega y$, $z'\Omega z$ orthonormés, l'axe $z'\Omega z$ étant sur la droite Δ; les vecteurs unitaires de ces axes sont

$$\overrightarrow{\Omega I} = \vec{i}, \overrightarrow{\Omega J} = \vec{j}, \overrightarrow{\Omega K} = \vec{k} \qquad \text{(fig. 943 } a\text{)}.$$

L'isométrie *f* transforme $\overrightarrow{\Omega I}$ en $\overrightarrow{\Omega U} = \vec{u}$, $\overrightarrow{\Omega J}$ en $\overrightarrow{\Omega V} = \vec{v}$, $\overrightarrow{\Omega K}$ en $\overrightarrow{\Omega W} = \overrightarrow{\Omega K}$; le repère $\mathcal{B} = (\overrightarrow{\Omega U}; \overrightarrow{\Omega V}; \overrightarrow{\Omega W})$ est orthonormé positif.

On pose :

$$\overline{\text{dièdre}}\ (z'\Omega z;\ I;\ U) = \alpha, \quad \text{mod } 2\pi$$

et

$$\overline{\text{dièdre}}\ (z'\Omega z;\ I;\ J) = \frac{\pi}{2}, \quad \text{mod } 2\pi$$

$$\overline{\text{dièdre}}\ (z'\Omega z;\ U;\ V) = \frac{\pi}{2}, \quad \text{mod } 2\pi$$

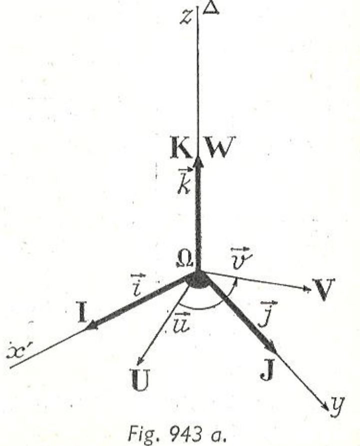


Fig. 943 a.

D'où :

$$\overline{\text{dièdre}}\,(z'z\,;\,J\,;\,V) = \overline{\text{dièdre}}\,(z'z\,;\,J\,;\,I) + \overline{\text{dièdre}}\,(z'z\,;\,I\,;\,U) + \overline{\text{dièdre}}\,(z'z:\,U\,;\,V)$$

$$= -\frac{\pi}{2} + \alpha + \frac{\pi}{2}$$

$$= \alpha, \text{ mod } 2\pi$$

Par suite la rotation $g = \text{rot}\,(z'z\,;\,\alpha)$, transforme $\overrightarrow{\Omega I}$ en $\overrightarrow{\Omega U}$, $\overrightarrow{\Omega J}$ en $\overrightarrow{\Omega V}$, le vecteur $\overrightarrow{\Omega K}$ étant invariant. Par conséquent $f = g$.

Et :

Si une isométrie positive, autre que l'identité, a une droite de points doubles, c'est une rotation ayant pour axe la droite de points doubles.

944. Composée de deux symétries pour des plans sécants.

Soient les deux symétries $f = \text{sym}\,(P_1)$ et $g = \text{sym}\,(P_2)$; les plans P_1 et P_2 se coupent suivant une droite Δ, que l'on transforme en axe $\vec{\Delta}$ (fig. 944 *a*).

On pose : $\overline{\text{dièdre}}\,(\vec{\Delta}\,;\,P_1\,;\,P_2) = \theta$, mod π

$g_o f$ est une isométrie positive; tous les points de Δ sont invariants par f et par g, donc sont invariants par $g_o f$. Δ est une droite de points doubles; et $g_o f$ est une rotation d'axe $\vec{\Delta}$.

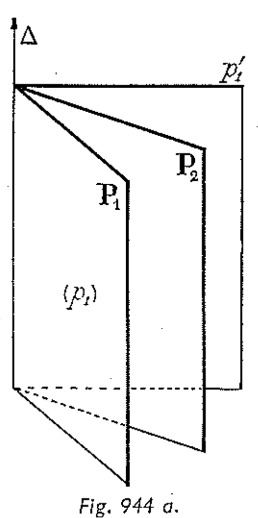


Fig. 944 *a*.

Soit p_1, un demi-plan de P_1 d'arêtes Δ; on a $f\,(p_1) = p_1$ et

$$g\,(p_1) = (g_o f)\,(p_1) = p_1',$$

avec :

$$\overline{\text{dièdre}}\,(\vec{\Delta}\,;\,p_1\,;\,p_1') = 2\left[\overline{\text{dièdre}}\,(\vec{\Delta}\,;\,P_1\,;\,P_2) + k\pi\right]$$

$$= 2\cdot\overline{\text{dièdre}}\,(\vec{\Delta}\,;\,P_1\,;\,P_2) + k\cdot 2\pi$$

$$= 2\theta, \text{ mod } 2\pi$$

L'angle de la rotation est donc 2θ.

D'où :

$$g_o f = \text{rot}\,(\vec{\Delta}\,;\,2\theta)$$

La composée de deux symétries pour des plans sécants est une rotation.

Évidemment :

$$f \circ g = \text{rot}\,(\vec{\Delta};\ -2\theta)$$

Remarque. Soit une rotation $r = \text{rot}\,(\vec{\Delta};\alpha)$. On considère deux plans P_1 et P_2 passant par $\vec{\Delta}$ et tels que P_2 soit l'image de P_1 par la rotation rot $\left(\vec{\Delta};\frac{\alpha}{2}\right)$.

Si $f = \text{sym}\ (P_1)$ et $g = \text{sym}\ (P_2)$, on a $g \circ f = \text{rot}\,(\vec{\Delta};\alpha)$. Donc :

Une rotation est la composée de deux symétries pour des plans passant par l'axe de la rotation.

945. Composée de deux rotations d'axes sécants.

Soient les deux rotations $f = \text{rot}\,(\vec{D};\theta)$ et $g = \text{rot}\,(\vec{D'};\varphi)$, les droites D et D' se coupant en Ω. On désigne par P_3 le plan des deux droites D et D'.

Soient P_1 le plan image de P_3 par la rotation rot $\left(\vec{D};\ -\frac{\theta}{2}\right)$ et P_2 le plan image de P_3 par la rotation rot $\left(\vec{D'};\ \frac{\varphi}{2}\right)$.

On pose :

$$\alpha = \text{sym}(P_1) \qquad \beta = \text{sym}(P_2) \qquad \gamma = \text{sym}(P_3).$$

On a alors :

$$f = \gamma \circ \alpha$$
$$g = \beta \circ \gamma.$$

D'où :

$$\begin{aligned} g \circ f &= (\beta \circ \gamma) \circ (\gamma \circ \alpha) \\ &= \beta \circ (\gamma \circ \gamma) \circ \alpha \\ &= \beta \circ \alpha \end{aligned}$$

car

$$\gamma \circ \gamma = e.$$

Donc :

$$g \circ f = \beta \circ \alpha$$

Les deux plans P_1 et P_2 se coupent suivant une droite Δ passant par le point Ω. Par suite $\beta \circ \alpha$ est une rotation d'axe $\vec{\Delta}$.

Donc :

La composée de deux rotations d'axes sécants est une rotation.

946. Composée de deux symétries pour des droites sécantes.

Soient les deux symétries $f = \text{sym}(D_1)$ et $g = \text{sym}(D_2)$, D_1 et D_2 étant sécantes en Ω.

Les symétries pour des droites étant des rotations d'angle π, la composée $g_0 f$ *est une rotation.*

La droite Δ perpendiculaire à D_1 et D_2 en Ω, est une droite de points doubles pour $g_0 f$, c'est donc *l'axe de la rotation.*

L'angle de la rotation est θ avec $|\theta| = 2 \cdot \text{angle}\,(D_1; D_2)$; le signe dépend de l'orientation choisie pour $\vec{\Delta}$.

947. Transformation hélicoïdale.

1° Soient un axe $\vec{\Delta}$ de vecteur unitaire $\vec{R}$ et un angle α. On considère la rotation $f = \text{rot}\,(\vec{\Delta}; \alpha)$ et la translation $t = t_{\vec{a}}$ avec $\vec{a} = \lambda \cdot \vec{R}$.

On appelle transformation hélicoïdale la composée h de la rotation f et de la translation t.

$$h = t_0 f.$$

Par suite :

Une transformation hélicoïdale est une isométrie.

2° On rapporte l'espace à trois axes orthonormés $x'Ox$, $y'Oy$, $z'Oz$, $z'Oz$ n'étant autre que l'axe $\vec{\Delta}$ (fig. 947 *a*).

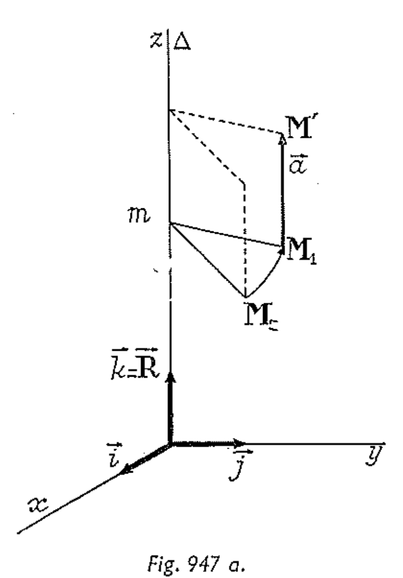


Fig. 947 a.

Le point M $(x; y; z)$ a pour image par f le point M_1 $(x_1; y_1; z_1)$ avec (cf. 941; 2) :

$$\begin{cases} x_1 = x\cos\alpha - y\sin\alpha \\ y_1 = x\sin\alpha + y\cos\alpha \\ z_1 = z \end{cases}$$

Le point M_1 a pour image par t, le point M' $(x'; y'; z')$ avec

$$x' = x_1$$
$$y' = y_1$$
$$z' = z_1 + \lambda$$

D'où :

$$\begin{cases} x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha \\ y' = x\sin\alpha + y\cos\alpha \quad (947; 1) \\ z' = z + \lambda \end{cases}$$

Ces formules montrent que

$$h = t_{\circ} f = f_{\circ} t$$

948. Angles et rotations d'Euler.

1° Soient trois axes orthonormés $x'Ox$, $y'Oy$, $z'Oz$ de vecteurs unitaires $\overrightarrow{OI} = \vec{i}$, $\overrightarrow{OJ} = \vec{j}$, $\overrightarrow{OK} = \vec{k}$, et trois autres axes orthonormés $x_1'Ox_1$; $y_1'Oy_1$; $z_1'Oz_1$ de vecteurs unitaires $\overrightarrow{OU} = \vec{u}$, $\overrightarrow{OV} = \vec{v}$, $\overrightarrow{OW} = \vec{w}$ (fig. 948 *a*). Les repères $\mathcal{B}_0 = (\overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OJ}; \overrightarrow{OK})$ et $\mathcal{B} = (\overrightarrow{OU}; \overrightarrow{OV}; \overrightarrow{OW})$ sont orthonormés positifs.

Le plan $(Ox_1; Oy_1)$ coupe le plan $(Ox; Oy)$ suivant l'axe $x_2'Ox_2$.

On pose :

$\overline{\text{angle}}\,(Ox;\ Ox_2) = \psi$

ψ est l'angle de précession

$0 \leqslant \psi \leqslant 2\pi$

$\overline{\text{angle}}\,(Ox_2;\ Ox_1) = \varphi$

φ est l'angle de rotation propre

$0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$

$\overline{\text{angle}}\,(Oz;\ Oz_1) = \theta$

θ est l'angle de nutation

$0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$

ψ, φ, θ ***sont les angles d'Euler.***

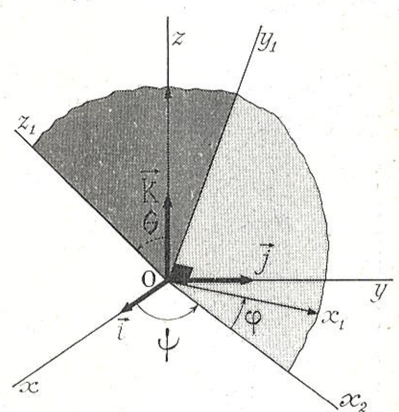


Fig. 948 a.

2° On pose :

$$\alpha = \text{rot}(\overrightarrow{Oz}; \psi) \qquad \beta = \text{rot}(\overrightarrow{Ox_2}; \theta) \qquad \gamma = \text{rot}(\overrightarrow{Oz_1}; \varphi).$$

La rotation α transforme $(Ox;\ Oy;\ Oz)$ en $(Ox_2;\ Oy_2;\ Oz)$.
La rotation β transforme $(Ox_2;\ Oy_2;\ Oz)$ en $(Ox_2;\ Oy_3;\ Oz_1)$.
La rotation γ transforme $(Ox_2;\ Oy_3;\ Oz_1)$ en $(Ox_1;\ Oy_1;\ Oz_1)$.

Les rotations α, β, γ sont les rotations d'Euler (précession, nutation et rotation propre).

3° La composée $\gamma_{\circ}\beta_{\circ}\alpha = C$ transforme donc $\mathcal{B}_0 = (\overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OJ}; \overrightarrow{OK})$ en $\mathcal{B} = (\overrightarrow{OU}; \overrightarrow{OV}; \overrightarrow{OW})$.

Comme le produit de deux rotations d'axes sécants est une rotation, $\gamma_{\circ}\beta_{\circ}\alpha = \rho$ est une rotation dont l'axe passe par O.

Et :

La composée des trois rotations d'Euler est une rotation.

949. Composée d'une translation et d'une rotation.

Soient la translation $t = t_{\vec{a}}$ et la rotation $f = \text{rot}\left(\vec{\Delta}\,;\,\theta\right)$ (fig. 949 *a*).

1° On suppose que le vecteur $\vec{a}$ est orthogonal à l'axe $\vec{\Delta}$.

On considère le plan P_3 passant par Δ et orthogonal au vecteur $\vec{a}$; le plan P_1 image de P_3 par la rotation rot $\left(\vec{\Delta};\frac{\theta}{2}\right)$ et le plan P_2 image de P_3 par la translation $t_{-\frac{\vec{a}}{2}}$.

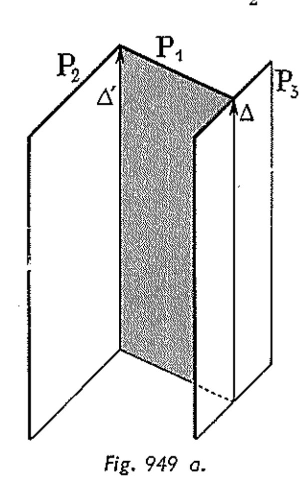


Fig. 949 a.

On pose :

$$\alpha = \text{sym}\,(P_1) \qquad \beta = \text{sym}\,(P_2)$$
$$\gamma = \text{sym}\,(P_3)$$

On a :

$$t = \gamma_o\beta$$

et

$$f = \alpha_o\gamma\,.$$

D'où :

$$f_o t = (\alpha_o\gamma)_o(\gamma_o\beta)$$
$$= \alpha_o(\gamma_o\gamma)_o\beta$$
$$= \alpha_o\beta$$

car

$$\gamma_o\gamma = e.$$

Si P_1 et P_2 se coupent suivant Δ', $\alpha_o\beta$ est identique à une rotation d'axe $\vec{\Delta}'$ (l'axe $\vec{\Delta}'$ étant équipollent à $\vec{\Delta}$) et d'angle θ.

$$f_o t = \text{rot}\left(\vec{\Delta}', \theta\right) = \rho \qquad (949\,;\,1)$$

2° On suppose que le vecteur $\vec{a}$ n'est pas orthogonal à l'axe $\vec{\Delta}$.

Le vecteur $\vec{a}$ est la somme d'un vecteur $\vec{b}$ orthogonal à $\vec{\Delta}$ et d'un vecteur $\vec{c}$ parallèle à $\vec{\Delta}$.

On a :

$$t = t_{\vec{a}} = t_{\vec{b}\,o}\,t_{\vec{c}}$$

D'où :

$$\begin{aligned} f_{\circ} t &= f_{\circ}(t_{\vec{b}} \circ t_{\vec{c}}) \\ &= (f_{\circ} t_{\vec{b}})_{\circ} t_{\vec{c}} \\ &= \rho_{\circ} t_{\vec{c}} \end{aligned}$$

Et :

La composée d'une rotation et d'une translation est une transformation hélicoïdale.

950. Réduction canonique d'une isométrie positive.

Soit une isométrie positive f.

Elle transforme le repère canonique orthonormé

$$\mathcal{B}_0 = (\overrightarrow{OI} = \vec{i}\,;\ \overrightarrow{OJ} = \vec{j}\,;\ \overrightarrow{OK} = \vec{k})$$

en un repère orthonormé positif $B = (\overrightarrow{\Omega U} = \vec{u}\,;\ \overrightarrow{\Omega V} = \vec{v}\,;\ \overrightarrow{\Omega W} = \vec{w})$

On envisage la translation $t = t_{\overrightarrow{O\Omega}}$ qui transforme $\mathcal{B}_0$ en un repère orthonormé positif $\mathcal{B}_1 = (\overrightarrow{\Omega U_1} = \vec{i}\,;\ \overrightarrow{\Omega V_1} = \vec{j}\,;\ \overrightarrow{\Omega W_1} = \vec{k})$.

Si $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}$, f et t sont identiques.

$$f = t \qquad (950\,;\,1)$$

Si $\mathcal{B}_1 \neq \mathcal{B}$, d'après la théorie des rotations d'Euler il existe une rotation ρ (cf. n° 948) qui transforme $\mathcal{B}_1$ en $\mathcal{B}$. On a donc :

$$f = \rho_{\circ} t$$

Or $\rho_{\circ} t$ est une transformation hélicoïdale (cf. n° 949).

D'où :

Toute isométrie positive de l'espace est une transformation hélicoïdale.

951. Éléments de symétrie dans l'espace.

1° Centre de symétrie.

Un point fixe O est un centre de symétrie pour l'ensemble V si le symétrique V′ de V par rapport à O est identique à V.

On a donc :

sym (O) : $\quad V \subset E \longrightarrow V' = V.$

2° Axe de symétrie.

Une droite fixe (Δ) est un axe de symétrie pour l'ensemble V si le symétrique V′ de V par rapport à (Δ) est identique à V.

On a donc :

sym (Δ) : $V \subset E \longrightarrow V' = V.$

3° Plan de symétrie.

Un plan fixe (Π) est un plan de symétrie pour l'ensemble V si le symétrique V′ de V par rapport à (Π) est identique à V.

On a donc :

sym (Π) : $V \subset E \longrightarrow V' = V$

4° Éléments de symétrie d'une droite.

Soit une droite (D).
Elle admet les éléments de symétrie suivants;
— tous les points de (D) sont des centres de symétrie;
— la droite (D) est un axe de symétrie;
— toutes les perpendiculaires à (D) sont des axes de symétrie :
— tous les plans contenant (D) sont des plans de symétrie; tous les plans perpendiculaires à (D) sont des plans de symétrie.

5° Éléments de symétrie d'un segment.

Soit un segment AB, de milieu I.
Il admet les éléments de symétrie suivants :
— le milieu I est un centre de symétrie;
— la droite AB est un axe de symétrie; toutes les médiatrices du segment sont des axes de symétrie;
— le plan médiateur de AB est un plan de symétrie; tous les plans contenant AB sont des plans de symétrie.

6° Éléments de symétrie d'un plan.

Soit un plan (P).
Il admet les éléments de symétrie suivants :
— tous les points de (P) sont des centres de symétrie;
— toutes les droites de (P) sont des axes de symétrie; toutes les perpendiculaires à (P) sont des axes de symétrie;
— le plan (P) est un plan de symétrie; tous les plans perpendiculaires à (P) sont des plans de symétrie.

7° Éléments de symétrie d'une bande.

Soit une bande de (D; D') et son axe longitudinal (Δ).
Elle admet les éléments de symétrie suivants :
— tous les points de (Δ) sont des centres de symétrie;
— la droite (Δ) est un axe de symétrie; toutes les perpendiculaires communes à (D) et (D') sont des axes de symétrie; toutes les perpendiculaires au plan de la bande en un point de Δ sont des axes de symétrie;
— le plan de la bande est un plan de symétrie;
— le plan perpendiculaire au plan de la bande le long de (Δ) est un plan de symétrie; tous les plans perpendiculaires à (D) et (D') sont des plans de symétrie.

8° Éléments de symétrie d'un mur.

Soit un mur (P; P) (fig. 951 *a*).

Le plan longitudinal Π est un plan de symétrie.

Tous les points du plan longitudinal d'un mur sont des centres de symétrie.

Toutes les droites de Π sont des axes de symétrie.

Toutes les perpendiculaires à P et P' sont des axes de symétrie.

Tous les plans perpendiculaires à P et P' sont des plans de symétrie.

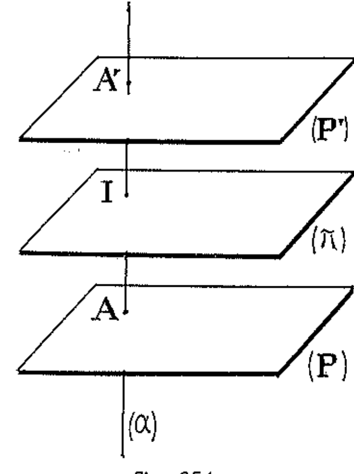


Fig. 951 a.

9° Éléments de symétrie d'un secteur angulaire.

Soit un secteur angulaire (Ax; Ay) et sa bissectrice Az.
— La droite (Δ) qui porte Az est un axe de symétrie du secteur angulaire.
— Le plan du secteur est un plan de symétrie.
— Le plan perpendiculaire au plan du secteur le long de (Δ) est un plan de symétrie.

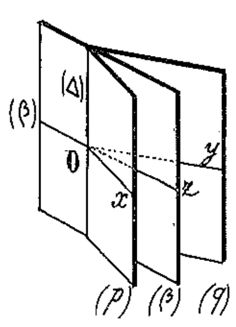


Fig. 951 b.

10° Éléments de symétrie d'un dièdre.

Soient un dièdre (*p*; Δ; *q*); une section droite (O*x*; O*y*), la bissectrice O*z* de cette section, et le plan bissecteur (β) (fig. 951 *b*).

Le plan bissecteur est un plan de symétrie.

Les plans perpendiculaires à (Δ) sont des plans de symétrie.

Les bissectrices des sections droites sont des axes de symétrie.

11° Éléments de symétrie d'un cercle.

Soit un cercle C de centre O du plan P.

Le point O est un centre de symétrie de C.

La droite Δ, perpendiculaire en O à P, appelée axe du cercle, est un axe de symétrie.

Toutes les droites de P, passant par O, sont des axes de symétrie.

Le plan P est un plan de symétrie.

Tous les plans passant par Δ sont des plans de symétrie.

12. Éléments de symétrie d'une sphère.

Soit une sphère S de centre O.

Le point O est un centre de symétrie.

Toutes les droites passant par O sont des axes de symétrie.

Tous les plans passant par O sont des plans de symétrie.

13° Axe de répétition d'un ensemble. Axe de révolution.

1° On dit qu'une droite Δ est un axe de répétition d'ordre n pour un ensemble E lorsque n rotations successives, dans le même sens, d'axe Δ et d'angle $\frac{360^\circ}{n}$, transforment chaque fois l'ensemble E en lui-même.

Ainsi si $f = \text{rot}\left(\vec{\Delta}\,;\, k \cdot \frac{360^\circ}{n}\right)$, on a :

$$(\forall k) \quad f(E) = E$$

Exemple. Si on considère un polygone régulier de *n* côtés, de centre O, du plan P. La droite Δ perpendiculaire en O à P est un axe de répétition d'ordre *n*.

2° Soient un ensemble E et une droite Δ; on envisage les rotations $f = \text{rot}\,(\vec{\Delta};\, \theta)$.

Si $$(\forall \theta) \quad f(E) = E$$

on dit que Δ ***est un axe de révolution de E.***

Exemple. Soit un cercle C; son axe Δ est un axe de révolution.

14° Éléments de symétrie d'un tétraèdre régulier [1].

Soit un tétraèdre régulier ABCD (fig. 951 c).

Les six plans médiateurs des arêtes sont des plans de symétrie.

Les trois droites déterminées par les milieux des arêtes opposées sont des axes de symétrie.

Les quatre hauteurs sont des axes de répétition d'ordre 3.

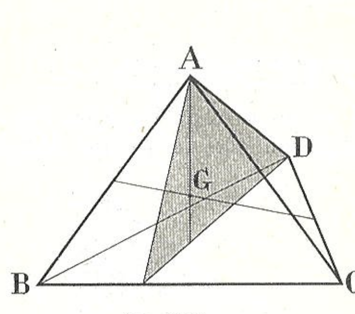
(1) Les démonstrations des paragraphes 14° et 15° sont laissées au soin du lecteur.

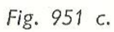
15º Eléments de symétrie d'un cube.

Soit un cube ABCDA'B'C'D'. Les diagonales sont concourantes en O (fig. 951 d).

Le point O est un centre de symétrie.

Les trois droites déterminées par les centres des facettes opposées sont des axes de symétrie. Ce sont des axes de répétition d'ordre 4.




Fig. 951 c.

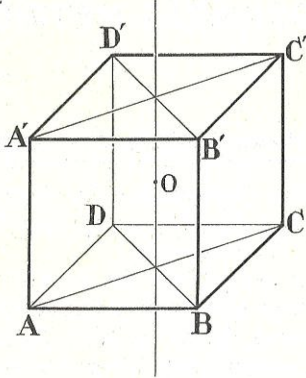


Fig. 951 d.

Les trois plans médiateurs des arêtes sont des plans de symétrie.

Les six plans diagonaux sont des plans de symétrie.

Les six droites déterminées par les milieux des arêtes sont des axes de symétrie.

Les quatre diagonales sont des axes de répétition d'ordre 4.

CHAPITRE LXV

PROPRIÉTÉS MÉTRIQUES DE L'HOMOTHÉTIE

952. Homothétique d'un secteur angulaire convexe.

Soient l'homothétie $f = \text{hom}(S; k)$ et un secteur angulaire convexe (Ax; Ay) (fig. 952 *a*, *b*). Son homothétique est un secteur angulaire (A'x'; A'y') convexe.

Si k est positif, Ax et A'x' sont parallèles et de même sens; il en est de même de Ay et A'y'. Donc les deux secteurs angulaires sont égaux.

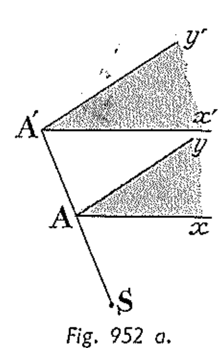


Fig. 952 a.

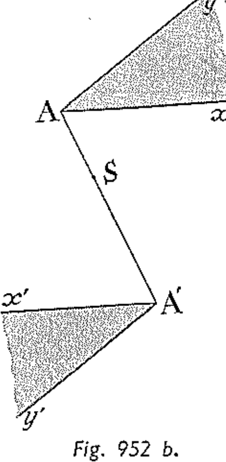


Fig. 952 b.

Si k est négatif, Ax et A'x' sont parallèles et de sens contraires; il en est de même de Ay et A'y'. Donc les deux secteurs angulaires sont égaux.

Et :

L'image d'un secteur angulaire convexe par une homothétie est un secteur angulaire égal.

Par suite :

Si l'image d'un triangle ABC par une homothétie est A'B'C' on a :

angle A = angle A'
angle B = angle B'
angle C = angle C'.

953. Homothétique d'un cercle.

1° Soient un cercle (C) de centre O et de rayon R situé dans le plan (P), et l'homothétie

$$\text{hom } (S; k).$$

M étant un point quelconque de (C), M' est son homothétique; de même O' est l'homothétique de O. L'homothétique du vecteur $\overrightarrow{OM}$ est le vecteur $\overrightarrow{O'M'}$ tel que (fig. 953 *a* et *b*) :

$$\overrightarrow{O'M'} = k \cdot \overrightarrow{OM}.$$

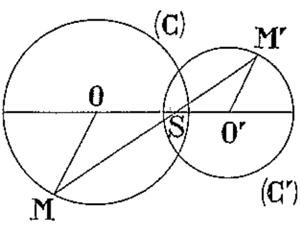


Fig. 953 a.

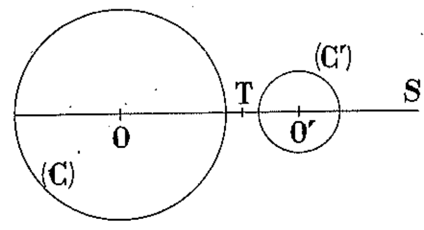


Fig. 953 b.

On a donc aussi :

$$O'M' = |k| . OM.$$
$$= |k| . R.$$

O'M' a une longueur constante, et si M décrit le cercle (C), M' décrit le cercle (C') de centre O' et de rayon $R' = |k| \cdot R$.

D'où :

L'homothétique hom (S; k) d'un cercle (O; R) est un cercle (O'; R'); les centres sont homothétiques et $R' = |k| \cdot R$.

2° Soient deux cercles (O; R) et (O'; R') de rayons différents.

On pose :

$$\frac{R'}{R} = k \qquad (k \neq 1)$$

Soient S et T les points divisant $\overrightarrow{O'O}$ dans les rapports opposés $+ k$ et $- k$. On a donc :

$$\frac{\overrightarrow{SO'}}{\overrightarrow{SO}} = k \qquad \text{et} \qquad \frac{\overrightarrow{TO'}}{\overrightarrow{TO}} = -k$$

et par suite le quaterne (OO'; ST) est harmonique.

Les homothéties hom (S; k) et hom (T; $-k$) transforment le point O en O′, et le cercle (O; R) en un cercle de centre O′ de rayon égal à

$$k \cdot R = \frac{R'}{R} \cdot R = R';$$

ce n'est autre que le cercle (O′; R′).

Donc :

Deux cercles donnés sont, en général, homothétiques de deux façons différentes.

3° *Les résultats précédents sont valables pour l'homothétique d'une sphère.*
L'homothétique d'une sphère (O; R) par $f = \text{hom}\,(S;\,k)$ est une sphère (O′; R′); O′ est l'homothétique de O, et $R' = |k| \cdot R$.
Deux sphères données sont, en général, homothétiques de deux façons différentes.

954. Cercle et droite d'Euler.

On envisage maintenant le cercle (C), de centre O et de rayon R, circonscrit au triangle ABC, et le cercle (Γ), de centre Ω et de rayon ρ, circonscrit au triangle médian A′B′C′. Ce cercle (Γ) est appelé le cercle d'Euler du triangle ABC (fig. 954 *a*).

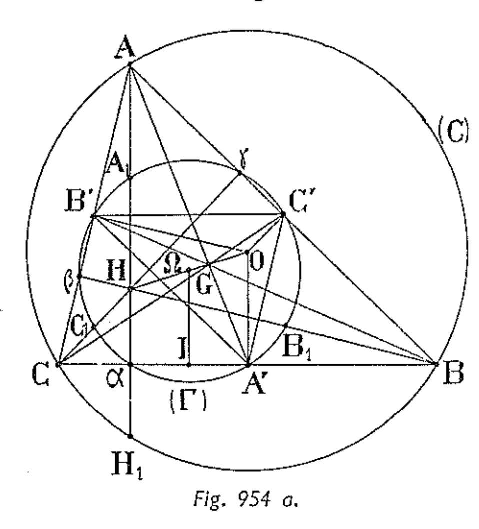


Fig. 954 a.

(Γ) est l'homothétique de (C) dans l'homothétie hom $\left(G;\,-\frac{1}{2}\right)$. Les centres O et Ω sont alignés avec G et on a :

$$\overrightarrow{G\Omega} = -\frac{1}{2}\,\overrightarrow{GO}.$$

Il existe une seconde homothétie hom $\left(H;\,\frac{1}{2}\right)$ transformant (C) en (Γ).

Son centre H est tel que :

$$\overrightarrow{H\Omega} = \frac{1}{2}\,\overrightarrow{HO}.$$

Les points OΩGH sont alignés sur une droite (Δ) dite droite d'Euler du triangle ABC. De plus :

$$\frac{\overrightarrow{G\Omega}}{\overrightarrow{GO}} = -\frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad \frac{\overrightarrow{H\Omega}}{\overrightarrow{HO}} = \frac{1}{2}$$

Donc :

Le quaterne (OΩ; GH) est harmonique.

D'autre part on a (fig. 954 *b*) :

H Ω G O

Fig. 954 b.

$$\overrightarrow{GO} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GH}$$

Le point O étant orthocentre du triangle A'B'C', son homothétique H est orthocentre du triangle ABC.

Le cercle d'Euler passe par les milieux A', B', C' des côtés du triangle ABC.

Il passe aussi par les milieux A_1, B_1, C_1 des segments HA, HB, HC; en effet A_1, B_1, C_1 sont les homothétiques de A, B, C dans hom $\left(H; \frac{1}{2}\right)$.

Enfin Ω étant le milieu de OH, sa projection sur BC est le milieu de αA' (fig. 954 *c*) et par suite ΩA' = Ωα, et le cercle d'Euler passe par les pieds α, β, γ des hauteurs.

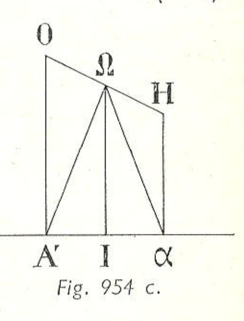


Fig. 954 c.

D'où l'énoncé :

Dans un triangle, les milieux des côtés, les pieds des hauteurs, les milieux des segments joignant l'orthocentre aux sommets sont situés sur un cercle appelé cercle d'Euler ou cercle des neuf points.

Le rayon du cercle d'Euler est moitié du rayon du cercle circonscrit au triangle.

Les centres des homothéties positive et négative transformant le cercle circonscrit en le cercle d'Euler sont respectivement l'orthocentre et le centre de gravité du triangle.

Le centre du cercle circonscrit, le centre du cercle d'Euler, l'orthocentre et le centre de gravité forment un quaterne harmonique situé sur une droite appelée droite d'Euler.

Si la hauteur $A\alpha$ recoupe le cercle circonscrit (C) en H_1, on a :

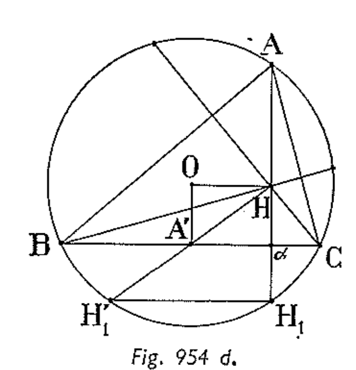


Fig. 954 d.

$$\overrightarrow{HH_1} = 2 \cdot \overrightarrow{H\alpha}$$

et :

Les symétriques de l'orthocentre d'un triangle pour les côtés sont situés sur le cercle circonscrit.

De même (fig. 954 *d*) :

Les symétriques de l'orthocentre pour les milieux des côtés sont situés sur le cercle circonscrit.

955. Centres d'homothéties de trois cercles, ou de trois sphères.

Soient trois cercles du plan : (C) de centre O et de rayon R;
(C') de centre O' et de rayon R';
(C") de centre O" et de rayon R".

Soient P et N les centres des homothéties de (C) et (C'); on a (fig. 955 *a*) :

$$\frac{\overline{NO}}{\overline{NO'}} = -\frac{R}{R'} \quad \text{et} \quad \frac{\overline{PO}}{\overline{PO'}} = \frac{R}{R'}$$

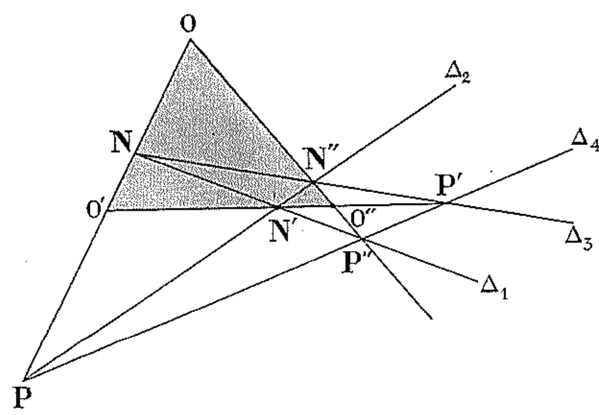


Fig. 955 *a*.

Soient P' et N' les centres des homothéties de (C') et (C"); on a :

$$\frac{\overline{N'O'}}{\overline{N'O''}} = -\frac{R'}{R''} \quad \text{et} \quad \frac{\overline{P'O'}}{\overline{P'O''}} = \frac{R'}{R''}$$

Soient P″ et N″ les centres des homothéties de (C″) et (C); on a :

$$\frac{\overline{N''O''}}{\overline{N''O}} = -\frac{R''}{R} \qquad \text{et} \qquad \frac{\overline{P''O''}}{\overline{P''O}} = \frac{R''}{R}$$

On considère le triangle OO′O″. On a :

$$\frac{\overline{NO}}{\overline{NO'}} \times \frac{\overline{N'O'}}{\overline{N'O''}} \times \frac{\overline{P''O''}}{\overline{P''O}} = -\frac{R}{R'} \times -\frac{R'}{R''} \times \frac{R''}{R}$$

$$= +1$$

Donc :

N, N′, P″ sont alignés sur Δ_1.

De même :

N′, N″, P sont alignés sur Δ_2.
N″, N, P′ sont alignés sur Δ_3.

D'autre part :

$$\frac{\overline{PO}}{\overline{PO'}} \times \frac{\overline{P'O'}}{\overline{P'O''}} \times \frac{\overline{P''O''}}{\overline{P''O}} = \frac{R}{R'} \cdot \frac{R'}{R''} \cdot \frac{R''}{R}$$

$$= +1$$

Donc :

P, P′, P″ sont alignés sur Δ_4.

Les droites Δ_1 ; Δ_2 ; Δ_3 ; Δ_4 sont les axes d'homothétie.

Remarque. Les trois cercles (C) (C′) (C″) peuvent être considérés comme les cercles équateurs de trois sphères. Donc les résultats précédents sont valables pour les centres d'homothétie de trois sphères prises deux à deux.

CHAPITRE LXVI

SIMILITUDES

956. Les similitudes.

On appelle similitude la transformation composée d'une homothétie et d'une isométrie.

Une similitude est donc une transformation affine.

1° Dans le plan R^2.

La composée d'une homothétie positive et d'une isométrie positive est une similitude positive.

La composée d'une homothétie positive et d'une isométrie négative est une similitude négative.

Comme une homothétie négative est la composée d'une homothétie positive et d'une symétrie pour le centre d'homothétie (symétrie qui est une isométrie positive), dans les deux définitions précédentes on pourrait prendre une homothétie négat ve.

2° Dans l'espace R^3.

La composée d'une homothétie positive et d'une isométrie positive est une similitude positive.

La composée d'une homothétie positive et d'une isométrie négative est une similitude négative.

Mais ici, contrairement au cas du plan R^2, l'homothétie est nécessairement positive, car une homothétie négative est la composée d'une homothétie positive et d'une symétrie pour le centre d'homothétie (symétrie qui est une isométrie négative).

3° Dans tous les cas :

La valeur absolue du rapport d'homothétie est le rapport de similitude.

957. Homothétie-Rotation.

On appelle homothétie-rotation la composée d'une homothétie et d'une rotation ayant le même centre.

1° On considère donc l'homothétie $h = \text{hom}(O;\ k)$ et la rotation $r = \text{rot}\ (O;\ \theta)$; on se propose l'étude de $f = r_{\circ} h$.

Le plan est repéré par rapport à des axes orthonormés $x'Ox$ et $y'Oy$ (fig. 957 *a*).

h : $\qquad M(x\,;y) \longrightarrow M_1(x_1 = kx\,;y_1 = ky)$

r : $\qquad M_1(x_1\,;y_1) \longrightarrow M'(x'\,;y')$

avec :

$$\begin{cases} x' = x_1 \cdot \cos\theta - y_1 \cdot \sin\theta \\ y' = x_1 \cdot \sin\theta + y_1 \cdot \cos\theta \end{cases}$$

D'où :

$$\begin{cases} x' = kx\cos\theta - ky\sin\theta \\ y' = kx\sin\theta + ky\cos\theta \end{cases}$$

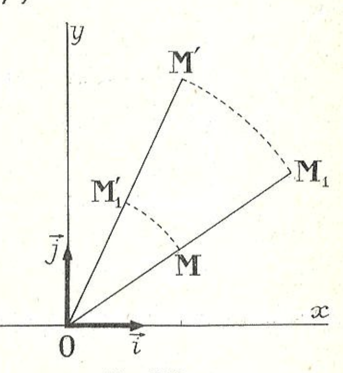


Fig. 957 a.

$f = r_{\circ} h$ est bien une transformation linéaire du plan. La matrice de cette transformation est

$$A = \begin{pmatrix} k\cos\theta & -k\sin\theta \\ k\sin\theta & k\cos\theta \end{pmatrix}$$

ou

$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{aligned} \text{Det } A &= a^2 + b^2 \\ &= (k\cos\theta)^2 + (k\sin\theta)^2 \\ &= k^2 \end{aligned}$$

et

$$|k| = \sqrt{\text{Det } A}$$

2° Il est immédiat que

$$r_{\circ} h = h_{\circ} r$$

De plus si M' est l'image de M par $f = r_{\circ} h$, on a :

$$\frac{OM'}{OM} = |k|$$

et

$$\overline{\text{angle}}\,(\overrightarrow{OM}\,;\,\overrightarrow{OM'}) = \theta, \bmod 2\pi.$$

3° Le repère orthonormé $\mathcal{B}_0 = (\overrightarrow{OI} = \vec{i}\,;\,\overrightarrow{OJ} = \vec{j})$ a pour image par h le repère orthogonal $\mathcal{B}_1 = (\overrightarrow{OU_1}\,;\,\overrightarrow{OV_1})$ avec $\overrightarrow{OU_1} = k \cdot \overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{OV_1} = k \cdot \overrightarrow{OJ}$. (fig. 957 *b*).

Le repère $\mathcal{B}_1$ a pour image par r le repère orthogonal $\mathcal{B}' = (\overrightarrow{OU}\,;\,\overrightarrow{OV})$ avec

$$\|\overrightarrow{OU}\| = \|\overrightarrow{OU_1}\| = |k|$$
$$\|\overrightarrow{OV}\| = \|\overrightarrow{OV_1}\| = |k|$$

et

$$\overline{\text{angle}}\,(\overrightarrow{OI}\,;\,\overrightarrow{OU}) = \overline{\text{angle}}\,(\overrightarrow{OJ}\,;\,\overrightarrow{OV}) = \theta, \bmod 2\pi.$$

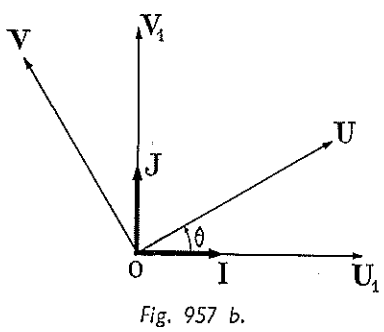


Fig. 957 b.

Réciproquement, *le repère orthogonal* $(\overrightarrow{OU}\,;\,\overrightarrow{OV})$ *image du repère* $\mathcal{B}_0$ *détermine une homothétie-rotation ; avec*

$$|k| = \|\overrightarrow{OU}\|$$

et

$$\theta = \overline{\text{angle}}\,(\overrightarrow{OI}\,;\,\overrightarrow{OU})$$

958. Similitude positive dans le plan.

On considère l'homothétie $f = \text{hom}\,(S; k)$ et la rotation $g = \text{rot}\,(O; \theta)$, les points O et S étant distincts; on se propose d'étudier la similitude $h = g_o f$.

Le plan est repéré par rapport à deux axes orthonormés $x'Ox$, $y'Oy$; l'axe $x'Ox$ passe par le point S (fig. 958; *a*). On pose $\overline{OS} = a$; les coordonnées de S sont donc $(a; 0)$.

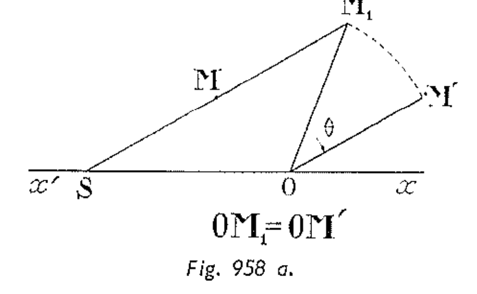


Fig. 958 a.

On a :

$$f: \; M(x\,;\,y) \longrightarrow M_1(x_1\,;\,y_1)$$

avec :

$$\overrightarrow{OM_1} = k \cdot \overrightarrow{OM} + (1 - k) \cdot \overrightarrow{OS}$$

Donc :

$$\begin{cases} x_1 = kx + (1-k)\,a \\ y_1 = ky \end{cases}$$

D'autre part :

g : $$M_1(x_1\,;\,y_1) \longrightarrow M'(x'\,;\,y')$$

avec :

$$\begin{cases} x' = x_1 \cdot \cos\theta - y_1 \cdot \sin\theta \\ y' = x_1 \cdot \sin\theta + y_1 \cdot \cos\theta \end{cases}$$

Par suite :

$$\begin{cases} x' = [kx + (1-k)\,a]\cos\theta - ky \cdot \sin\theta \\ y' = [kx + (1-k)\,a]\sin\theta + ky \cdot \cos\theta \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} x' = kx\cos\theta - ky\sin\theta + (1-k)\,a\cos\theta \\ y' = kx\sin\theta + ky\cos\theta + (1-k)\,a\sin\theta \end{cases}$$

Cette formule montre que $h = g_o f$ *est une transformation affine.*

La matrice de f est

$$A = \begin{pmatrix} k\cos\theta & -k\sin\theta \\ k\sin\theta & k\cos\theta \end{pmatrix}$$

et

$$\text{Det } A = k^2$$

Par suite :

Toute similitude positive est une transformation affine bijective.

959. Point double d'une similitude positive dans le plan.

Les points doubles sont donnés par le système :

$$\begin{cases} x = kx\cos\theta - ky\sin\theta + (1-k)\,a\cos\theta \\ y = kx\sin\theta + ky\cos\theta + (1-k)\,a\sin\theta \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} (1 - k\cos\theta)\cdot x + k\sin\theta \cdot y = (1-k)\,a\cos\theta \\ -kx\sin\theta + (1 - k\cos\theta)\cdot y = (1-k)\,a\sin\theta \end{cases}$$

Le déterminant de ce système est

$$D = \begin{vmatrix} 1 - k\cos\theta & k\sin\theta \\ -k\sin\theta & 1 - k\cos\theta \end{vmatrix}$$

$$= (1 - k\cos\theta)^2 + k^2\sin^2\theta$$

Il est donc positif; par suite :

Toute similitude positive plane a un point double unique.

960. Réduction canonique d'une similitude positive dans le plan.

Soit la similitude $h = g_o f$ et son point double Ω. On a :

$$\Omega \xrightarrow{f} \Omega_1 \xrightarrow{g} \Omega$$
$$h = g_o f$$

On considère le repère orthonormé $\mathcal{B}_0 = (\overrightarrow{\Omega I} = \vec{i}\,; \overrightarrow{\Omega J} = \vec{j})$. $\mathcal{B}_0$ a pour image par f le bivecteur orthogonal

$$\mathcal{B}_1 = (\overrightarrow{\Omega' U_1} = k.\vec{i}\,; \overrightarrow{\Omega' V_1} = k \cdot \vec{j}).$$

Le bivecteur orthogonal $\mathcal{B}_1$ a pour image par g le bivecteur orthogonal $\mathcal{B}\,(\overrightarrow{\Omega U}\,; \overrightarrow{\Omega V})$ avec :

$$\|\overrightarrow{\Omega U}\| = |k| \qquad \|\overrightarrow{\Omega V}\| = |k|$$
$$\overline{\text{angle}}\,(\overrightarrow{\Omega I}\,; \overrightarrow{\Omega U}) = \overline{\text{angle}}\,(\overrightarrow{\Omega J}\,; \overrightarrow{\Omega V}) = \theta, \text{ mod } 2\pi.$$

L'image de $\mathcal{B}_0$ par $h = g_o f$ est donc $\mathcal{B}$; h est donc une homothétie rotation de centre Ω, de rapport k et d'angle θ.

Ainsi :

$$h = g_o f = \text{rot}\,(\Omega;\, \theta)_o[\text{hom}\,(\Omega;\, k)].$$

Et :

Une similitude positive plane est une homothétie-rotation dont le centre est le point double de la similitude.

On note : $h = \text{sim}\,(\Omega\,; k\,; \theta)$

961. Détermination géométrique du point double.

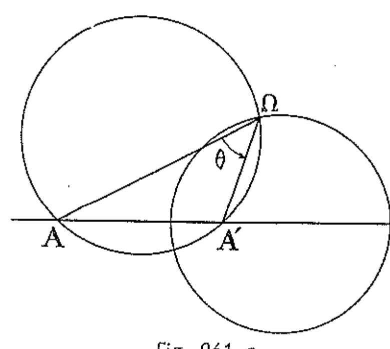


Fig. 961 a.

Soient un point A et son image $A' = f(A)$ par la similitude f (fig. 961 *a*). On a :

$$\begin{cases} \overline{\text{angle}}\,(\overrightarrow{\Omega A}\,; \overrightarrow{\Omega A'}) = \theta, \text{ mod } 2\pi \\ \dfrac{\Omega A'}{\Omega A} = |k| \end{cases}$$

Le point Ω est donc l'intersection de l'arc de cercle Γ, ensemble des points M tels que

$$\overline{\text{angle}}\,(\overrightarrow{MA}\,; \overrightarrow{MA'}) = 0,$$

mod 2π, *et du cercle C, ensemble des points M tels que* $\dfrac{MA}{MB} = |k|$.

962. Image d'un vecteur par une similitude.

1° La similitude f transforme $\overrightarrow{AB}$ en $\overrightarrow{A'B'}$. Si $f = r \circ h$, avec h = hom (S ; k) et r = rot(O ; θ), on a :

h : $$\overrightarrow{AB} \longrightarrow \overrightarrow{A_1B_1}$$

avec :

$$\overrightarrow{A_1B_1} = k \cdot \overrightarrow{AB}$$

r : $$\overrightarrow{A_1B_1} \longrightarrow \overrightarrow{A'B'}$$

avec :

$$\left\| \overrightarrow{A'B'} \right\| = \left\| \overrightarrow{A_1B_1} \right\|$$

et

$$\overline{\text{angle}} \left(\overrightarrow{A_1B_1} ; \overrightarrow{A'B'}\right) = \theta, \text{ mod } 2\pi$$

D'où :

$$\left\| \overrightarrow{A'B'} \right\| = |\mathbf{k}| \cdot \left\| \overrightarrow{AB} \right\|$$

et

$$\overline{\textbf{angle}} \left(\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{A'B'}\right) = \theta, \textbf{ mod } 2\pi$$

2° Réciproquement, soient deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{A'B'}$; on suppose que ces vecteurs ne sont pas parallèles ; on pose :

$$k = \frac{\left\| \overrightarrow{A'B'} \right\|}{\left\| \overrightarrow{AB} \right\|}$$

$$\theta = \overline{\text{angle}} \left(\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{A'B'}\right)$$

Il existe une similitude f de rapport k et d'angle θ telle que $\overrightarrow{A'B'} = f\left(\overrightarrow{AB}\right)$ Son centre Ω est déterminé comme au n° 961.

Ω appartient à Γ, ensemble des points M tels que

$$\overline{\text{angle}} \left(\overrightarrow{MA} ; \overrightarrow{MA'}\right) = \theta, \text{ mod } 2\pi ;$$

et à Γ', ensemble des points M tels que $\overline{\text{angle}} \left(\overrightarrow{MB} ; \overrightarrow{MB'}\right) = \theta$, mod 2π.

Or les cercles de Poncelet Γ_1 et Γ'_1, sur lesquels se trouvent les arcs Γ et Γ', passent par le point I d'intersection des droites AB et A'B'.

Donc :

Le centre de similitude d'une similitude positive est l'intersection, autre que I, des cercles circonscrits aux triangles IAA' et IBB'.

963. Étude d'un problème général.

Soit un point fixe O; un triangle OμM varie en restant constamment semblable à lui-même. Le point μ décrit une courbe Γ. Quel est le lieu du point M?

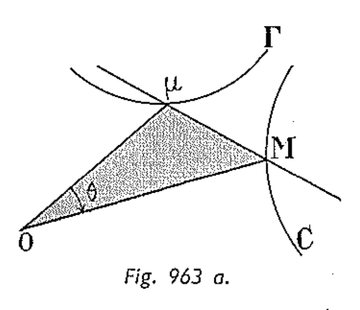


Fig. 963 a.

On a (fig. 963 *a*) :

$$\frac{OM}{O\mu} = k$$

et

$$\overline{\text{angle}}\,(\overrightarrow{O\mu}\,;\,\overrightarrow{OM}) = \theta, \text{ mod } 2\pi$$

Donc le point M est l'image du point μ par la similitude

$$f = \text{sim}\,(O;\, k;\, \theta).$$

Par suite :

Le lieu C du point M est l'image de la courbe Γ par la similitude f.

$$C = f(\Gamma)$$

964. Similitude négative dans le plan R^2.

1° Soit une similitude négative h. C'est la composée d'une homothétie positive f_1 et d'une isométrie négative de forme canonique $\sigma_o t$.

D'où :

$$\begin{aligned} h &= g_o f = (\sigma_o t)_o f_1 \\ &= \sigma_o (t_o f_1) \\ &= \sigma_o f \end{aligned}$$

car la composée $t_o f_1$ d'une homothétie et d'une translation est une homothétie f.

Donc :

Une similitude négative est la composée d'une homothétie positive et d'une symétrie pour une droite.

2° Soient donc (fig. 964 *a*) :

$$f = \text{hom}(O\,;\,k)$$

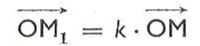
et

$$\sigma = \text{sym}(\Delta)$$

On a :

f : $\qquad M \longrightarrow M_1$

avec :



$$\overrightarrow{OM_1} = k \cdot \overrightarrow{OM}$$

σ : $\quad M_1 \longrightarrow M'$

avec :

$$\overrightarrow{OM'} = 2 \cdot \overrightarrow{Om} - \overrightarrow{OM_1},$$

m étant la projection orthogonale de M_1 sur Δ.

Finalement on obtient la formule :

$$\boldsymbol{\overrightarrow{OM'} = 2 \cdot \overrightarrow{Om} - k \cdot \overrightarrow{OM}} \qquad (964;1)$$

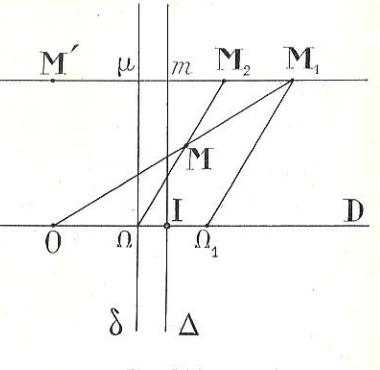


Fig. 964 a.

3° La perpendiculaire D à Δ menée par O coupe Δ en I. Si Ω est un point double, il est situé sur D; et il est donné par

$$\overrightarrow{O\Omega} = 2 \cdot \overrightarrow{OI} - k \cdot \overrightarrow{O\Omega}$$

D'où :

$$(1 + k)\,\overrightarrow{O\Omega} = 2 \cdot \overrightarrow{OI} \qquad (964;2)$$

et

$$\boldsymbol{\overrightarrow{O\Omega} = \frac{2}{1+k} \cdot \overrightarrow{OI}} \qquad (964;3)$$

4° Soient δ la parallèle à Δ menée par Ω, et μ la projection orthogonale de M_1 sur δ. On a :

$$\overrightarrow{Im} = \overrightarrow{\Omega\mu} \qquad (964;4)$$

L'égalité (964 ; 1) s'écrit :

$$\overrightarrow{O\Omega} + \overrightarrow{\Omega M'} = 2\left(\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{Im}\right) - k\left(\overrightarrow{O\Omega} + \overrightarrow{\Omega M}\right)$$

ou

$$\overrightarrow{\Omega M'} = -\overrightarrow{O\Omega} + 2 \cdot \overrightarrow{OI} + 2 \cdot \overrightarrow{\Omega\mu} - k \cdot \overrightarrow{O\Omega} - k \cdot \overrightarrow{\Omega M}$$

ou

$$\boldsymbol{\overrightarrow{\Omega M'} = 2 \cdot \overrightarrow{\Omega\mu} - k \cdot \overrightarrow{\Omega M}} \qquad (964;5)$$

car $-\overrightarrow{O\Omega} + 2 \cdot \overrightarrow{OI} - k \cdot \overrightarrow{O\Omega} = -(1 + k) \cdot \overrightarrow{O\Omega} + (1 + k)\,\overrightarrow{O\Omega}$

$$= 0$$

La formule (964; 5) montre que M′ est l'image de M par la composée de l'homothétie $\varphi = \text{hom}\ (\Omega;\ k)$ et de la symétrie $s = \text{sym}\ (\delta)$. Et :

$$f = s_0 \varphi.$$

Donc :

Une similitude négative dans le plan est la composée d'une homothétie positive φ et d'une symétrie pour une droite passant par le centre de l'homothétie.

CHAPITRE LXVII

INVERSION

965. Définition de l'inversion.

1° On donne un point fixe O et un nombre réel p. Soit un point M, autre que le point O; on considère un axe $u'Ou$ passant par M, de vecteur unitaire $\vec{R}$ (fig. 965; a; b).

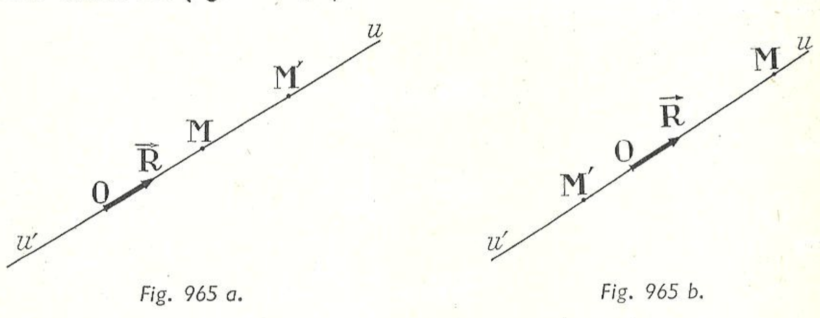


Fig. 965 a. *Fig. 965 b.*

Au point M on fait correspondre le point M' de l'axe $u'Ou$ tel que

$$\overline{OM} \cdot \overline{OM'} = p \qquad (965\,;1)$$

ou

$$r \cdot r' = p$$

On définit ainsi une transformation f de l'espace privé du point O (ou du plan privé du point O) car O n'a pas d'image par f :

$$f: \qquad M \in E - \{O\} \longrightarrow M' = f(M) \in E - \{O\}$$

f est appelée une inversion. Le point O est le centre ou le pôle de l'inversion; le nombre p est la puissance de l'inversion.

On note :

$$f = \text{inv}\,(O; p).$$

2° Si la puissance p est positive, l'inversion est dite positive.
Si la puissance p est négative, l'inversion est dite négative.

3° Si l'inversion est positive, $p = r^2$, le cercle (dans le cas du plan) ou la sphère (dans le cas de l'espace) de centre O et de rayon $r = \sqrt{p}$ est appelé le cercle ou la sphère d'inversion.

4° On a évidemment $\overset{-1}{f} = f$. Et :

L'inversion est une transformation involutive.

Si F est une partie de l'espace, on a :

$$F' = f(F) \quad \text{et} \quad F = f(F').$$

On dit que *f échange F et F'*.

5° ***Si les coordonnées polaires de M sont (θ; r) celles de M' sont*** $\left(\theta ; \dfrac{p}{r}\right)$

966. Formule fondamentale.

On a :

$$\overline{OM'} = \frac{p}{\overline{OM}}$$

ou

$$\overrightarrow{OM'} = \frac{p}{\overline{OM}} \vec{R}$$

ou

$$\overrightarrow{OM'} = \frac{p \cdot \overline{OM}}{\overline{OM}^2} \cdot \vec{R}$$

ou enfin

$$\overrightarrow{\boldsymbol{OM'}} = \frac{\mathbf{p}}{\boldsymbol{OM}^2} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{OM}} \qquad (966 ; 1)$$

En traduisant analytiquement, il vient :

$$\begin{cases} x' = \dfrac{px}{x^2 + y^2 + z^2} = \dfrac{px}{r^2} \\ y' = \dfrac{py}{x^2 + y^2 + z^2} = \dfrac{py}{r^2} \\ z' = \dfrac{pz}{x^2 + y^2 + z^2} = \dfrac{pz}{r^2} \end{cases} \qquad (966 ; 2)$$

Puisque f est involutive, on a :

$$\overrightarrow{\mathbf{OM}} = \frac{\mathbf{p}}{\mathbf{OM'}^2} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{OM'}} \qquad (966 ; 3)$$

et

$$\begin{cases} x = \dfrac{px'}{x'^2 + y'^2 + z'^2} \\ y = \dfrac{py'}{x'^2 + y'^2 + z'^2} \\ z = \dfrac{pz'}{x'^2 + y'^2 + z'^2} \end{cases} \qquad (966\,;\,4)$$

967. Composée de deux inversions de même pôle.

1° Soient les deux inversions $f = \text{inv}\ (O;\ p)$ et $g = \text{inv}\ (O;\ p')$ (fig. 967; *a*).

On a :

f : $\qquad M \longrightarrow M_1$

avec :

$$\overrightarrow{OM_1} = \frac{p}{OM^2} \cdot \overrightarrow{OM}.$$

g : $\qquad M' \longrightarrow M_1$

avec :

$$\overrightarrow{OM'} = \frac{p'}{OM_1^2} \cdot \overrightarrow{OM_1}$$

Fig. 967 *a*.

D'où :

$$\overrightarrow{OM'} = \frac{p'}{OM_1^2} \cdot \frac{p}{OM^2} \cdot \overrightarrow{OM}$$

$$= \frac{pp'}{(\overline{OM} \cdot \overline{OM_1})^2} \cdot \overrightarrow{OM}$$

$$= \frac{pp'}{p^2} \cdot \overrightarrow{OM}$$

ou

$$\overrightarrow{OM'} = \frac{p'}{p} \cdot \overrightarrow{OM}$$

Ce résultat montre que M' est l'image de M par l'homothétie $h = \text{hom}\left(O;\ \dfrac{p'}{p}\right)$.

Et :

$$[\textbf{inv}\,(O\,;\,p')] \circ [\textbf{inv}\,(O\,;\,p)] = \textbf{hom}\left(O\,;\,\frac{p'}{p}\right) \qquad (967\,;\,1)$$

La composée de deux inversions de même centre est une homothétie.

2° De

$$h = g_o f$$

on déduit :

$$g_o h = g_o(g_o f)$$
$$= (g_o g)_o f$$
$$= f$$

car, g étant involutive, $g_o g = e$.

La composée d'une homothétie et d'une inversion de même centre est une inversion.

3° De même :

$$h_o f = (g_o f)_o f$$
$$= g_o(f_o f)$$
$$= g$$

La composée d'une inversion et d'une homothétie de même centre est une inversion.

968. Inverse d'une droite dans le plan.

Le plan est rapporté à deux axes orthonormés $x'Ox$ et $y'Oy$ (fig. 968 *a*).

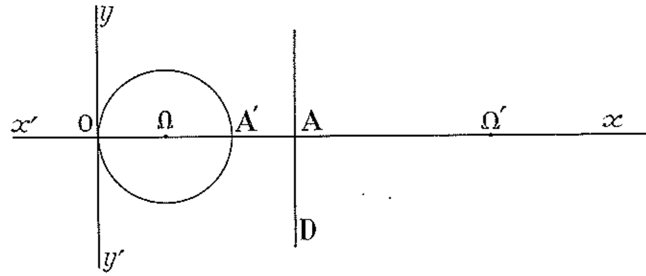


Fig. 968 a.

1° On considère la droite D d'équation $x = a$ coupant $x'Ox$ en A. Son équation en coordonnées polaires est $r \cos \theta = a$ ou

$$r = \frac{a}{\cos \theta}$$

Par suite l'inverse de D par inv (O ; p) a pour équation :

$$\frac{p}{r} = \frac{a}{\cos \theta}$$

ou

$$r = \frac{p \cdot \cos \theta}{a}$$

C'est donc un cercle C centré sur Ox et passant par O. Si A' est l'inverse de A, on a, $\overline{OA} \cdot \overline{OA'} = p$ *et* $\overline{OA'} = \frac{p}{a}$. *Le cercle C a pour diamètre OA'.*

Son centre Ω a pour abscisse, sur x'Ox, $\overline{O\Omega} = \frac{p}{2a}$.

2° L'inverse de Ω est Ω' avec $\overline{O\Omega} \cdot \overline{O\Omega'} = p$, ou

$$\overline{O\Omega'} = \frac{p}{\overline{O\Omega}}$$

ou

$$\overline{O\Omega'} = 2a$$

Le centre Ω du cercle C est l'inverse du symétrique de O pour D.

3° Comme l'inversion est involutive, de

$$C = f(D)$$

on déduit :

$$D = f(C)$$

Et :

L'inverse d'un cercle C passant par le pôle O de l'inversion est une droite D parallèle à la tangente en O au cercle C.

L'inverse du centre du cercle C est le symétrique de O pour la droite D.

4° Évidemment :

L'inverse d'une droite D passant par le pôle O est la droite elle-même.

969. Inverse d'un cercle dans le plan.

Le plan est rapporté à deux axes orthonormés $x'Ox$ et $y'Oy$ (fig. 969 *a*).

1° On considère le cercle C, ne passant pas par O, et centré en Ω sur $x'Ox$, de diamètre AB ($\overline{O\Omega} = a$). L'équation de C est

$$x^2 + y^2 - 2ax + c = 0$$

Le rayon est donc $R = \sqrt{a^2 - c}$, avec $a^2 - c \geqslant 0$.

Les formules de l'inversion $f = \text{inv}\ (O;\ p)$ sont :

$$\begin{cases} x = \dfrac{px'}{x'^2 + y'^2} \\ y = \dfrac{py'}{x'^2 + y'^2} \end{cases}$$

En remplaçant dans l'équation de C, on obtient :

$$\frac{p^2x'^2}{(x'^2+y'^2)^2}+\frac{p^2y'^2}{(x'^2+y'^2)^2}-\frac{2apx'}{x'^2+y'^2}+c=0$$

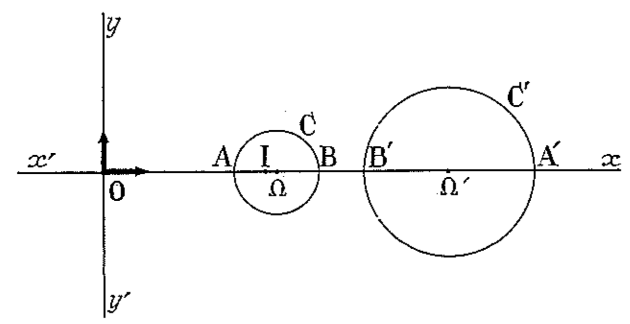


Fig. 969 a.

ou

$$p^2-2apx'+c(x'^2+y'^2)=0$$

ou

$$x'^2+y'^2-\frac{2ap}{c}\cdot x'+\frac{p^2}{c}=0$$

Donc :

L'inverse de C est un cercle C', de centre $\Omega'\left(\frac{ap}{c};0\right)$ ***et de rayon R' donné par***

$$R'=\sqrt{\frac{a^2p^2}{c^2}-\frac{p^2}{c}}=\frac{p}{c}\sqrt{a^2-c}\qquad\left(\overline{O\Omega'}=\frac{ap}{c}\right)$$

2° Si A' est l'inverse de A, et B' l'inverse de B, le cercle C' a pour diamètre A'B'.

On a :

$$\overline{OA}\cdot\overline{OA'}=\overline{OB}\cdot\overline{OB'}=p$$

ou

$$\frac{\overline{OB'}}{\overline{OA}}=\frac{\overline{OA'}}{\overline{OB}}=k$$

Par l'homothétie hom (O; k), l'image de A est B', l'image de B est A'; et l'image de C est C'. Par suite :

O est centre d'homothétie de C et C'.

3° Le point Ω' est l'inverse d'un point I de l'axe $x'Ox$; on a :

$$2\cdot\overline{O\Omega'}=\overline{OA'}+\overline{OB'}$$

ou

$$\frac{2p}{\overline{OI}} = \frac{p}{\overline{OA}} + \frac{p}{\overline{OB}}$$

ou

$$\frac{2}{\overline{OI}} = \frac{1}{\overline{OA}} + \frac{1}{\overline{OB}}$$

Donc :

Le quaterne (A, B; O, I) est harmonique.

Et :

Le centre Ω′ du cercle C′ inverse du cercle C est l'inverse du conjugué harmonique du pôle O par rapport aux points A et B.

4° Si le cercle C est le cercle de centre O et de rayon R, son inverse est le cercle C′ de centre O et de rayon $R' = \frac{|p|}{R}$.

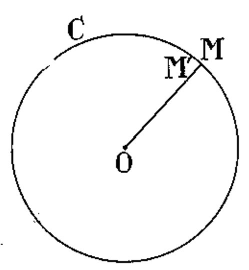


Fig. 969 b.

En particulier si C est le cercle d'inversion (si la puissance est $p = r^2$) on a $R = r$ et $R' = r$. Alors $C = f(C)$ (fig. 969 *b*).

Et :

Le cercle d'inversion (resp la sphère d'inversion) est un cercle (resp une sphère) de points doubles.

5° Si la puissance du point O par rapport au cercle C est égale à la puissance de l'inversion ($\overline{O}_C = p$), on a (fig. 969; *c*; *d*) :

$$\overline{OM} \cdot \overline{OM'} = p$$

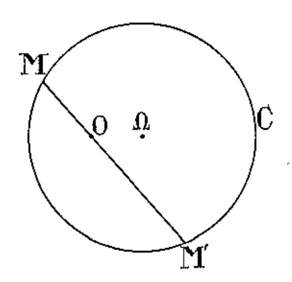


Fig. 969 c

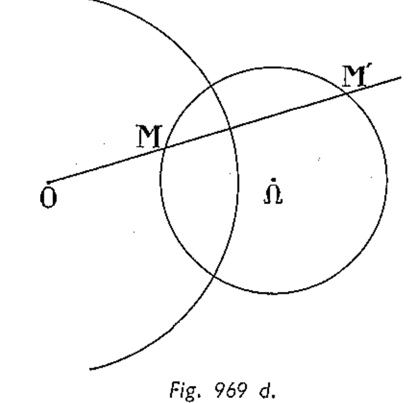


Fig. 969 d.

et M′ appartient à C. Autrement dit $C = f(C)$: le cercle C est conservé globalement.

Si la puissance du pôle pour un cercle est égale à la puissance d'inversion le cercle est globalement invariant.

En particulier *les cercles orthogonaux au cercle d'inversion sont invariants* (fig. 969 *d*).

970. Distance et inversion.

Soit l'inversion $f = \text{inv}(O;\ p)$. On considère deux points A et B, et leurs inverses A′ et B′ (fig. 970 *a*).

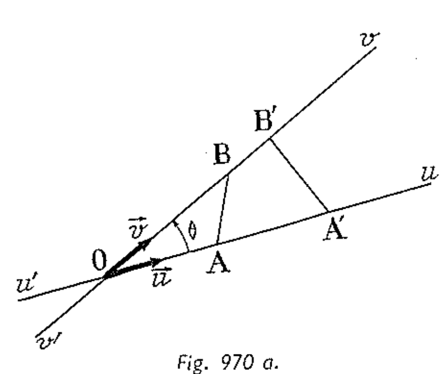


Fig. 970 a.

A et A′ sont sur l'axe $u'Ou$ de vecteur unitaire $\vec{u}$; B et B′ sont sur l'axe $v'Ov$ de vecteur unitaire $\vec{v}$. On a posé $\overline{\text{angle}}\,(\vec{u};\vec{v}) = \theta$.

On a :

$$\overline{OA'} = \frac{p}{\overline{OA}} \quad \text{et} \quad \overline{OB'} = \frac{p}{\overline{OB}}$$

D'autre part :

$$\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{OB'} - \overrightarrow{OA'}$$

D'où :

$$\overrightarrow{A'B'}^2 = \overrightarrow{OA'}^2 + \overrightarrow{OB'}^2 - 2\cdot\overrightarrow{OA'}\cdot\overrightarrow{OB'}$$

ou

$$A'B'^2 = \frac{p^2}{\overline{OA}^2} + \frac{p^2}{\overline{OB}^2} - 2\cdot\frac{p}{\overline{OA}}\cdot\frac{p}{\overline{OB}}\cos\theta$$

car $\overrightarrow{OA'}\cdot\overrightarrow{OB'} = \overline{OA'}\cdot\overline{OB'}\cos\theta$.

Donc :

$$A'B'^2 = \frac{p^2}{\overline{OA}^2\cdot\overline{OB}^2}\cdot\left[OA^2 + OB^2 - 2\cdot\overline{OA}\cdot\overline{OB}\cos\theta\right]$$

$$= \frac{p^2}{\overline{OA}^2\cdot\overline{OB}^2}\cdot\overrightarrow{AB}^2$$

et finalement

$$A'B' = \frac{p}{OA\cdot OB}\cdot AB \qquad (970;1)$$

971. Inversions pouvant échanger une droite et un cercle.

1° *Soient une droite D et un cercle C, la droite D n'étant pas tangente*

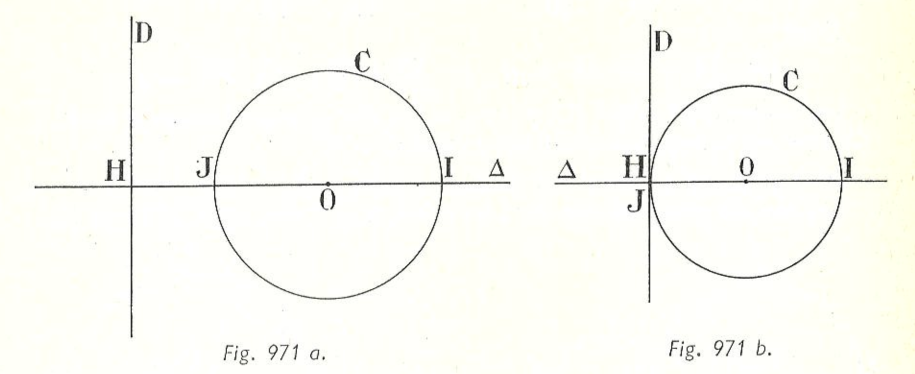


Fig. 971 a. Fig. 971 b.

au cercle C. L'axe de symétrie Δ passe par le centre O de C et est perpendiculaire à D (fig. 971 *a*). Δ coupe C en I et J, et coupe D en H.

Les inversions $f = \text{inv}\left(\text{I};\ p = \overline{\text{IJ}} \cdot \overline{\text{IH}}\right)$ et $g = \text{inv}\left(\text{J};\ q = \overline{\text{JI}} \cdot \overline{\text{JH}}\right)$ transforment D en C. Ce sont les seules inversions échangeant la droite D et le cercle C.

2° *Soient une droite D et un cercle C, la droite D étant tangente au cercle C en J.* L'axe de symétrie Δ est la perpendiculaire en J à D; il passe par le centre O de C et recoupe C en I (fig. 971 *b*).

L'inversion $f = \text{inv}\ (\text{I};\ p = \text{IJ}^2)$ transforme D en C. C'est la seule inversion échangeant la droite D et le cercle C.

972. Inversions pouvant échanger deux cercles.

Soient deux cercles C et C′, de centres O et O′, de rayons R et R′; la droite Δ des centres est un axe de symétrie.

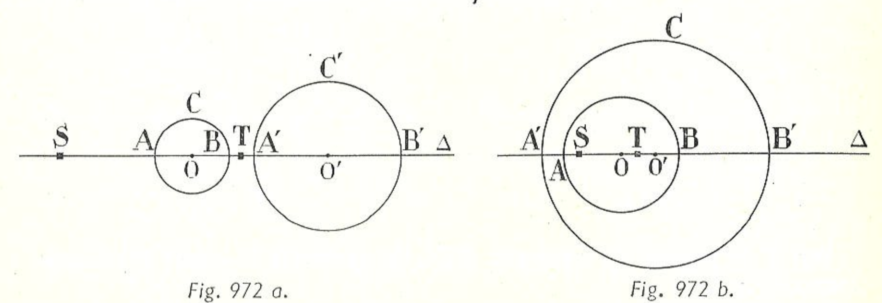


Fig. 972 a. Fig. 972 b.

1° *$R \neq R'$ et les cercles C et C′ ne sont pas tangents.*
Δ coupe C en A et B, et C′ en A′ et B′ (fig. 972 *a* et *b*).

Soient S et T les centres d'homothétie des deux cercles. On a :

$$\frac{\overline{SA'}}{\overline{SA}} = \frac{\overline{SB'}}{\overline{SB}} \quad \text{et} \quad \frac{\overline{TA'}}{\overline{TA}} = \frac{\overline{TB'}}{\overline{TB}}$$

D'où :

$$\overline{SA'} \cdot \overline{SB} = \overline{SA} \cdot \overline{SB'} = p \quad \text{et} \quad \overline{TA'} \cdot \overline{TB} = \overline{TA} \cdot \overline{TB'} = q$$

Les inversions $f = \text{inv}\ (O;\ p)$ et $g = \text{inv}\ (O;\ q)$ transforment C en C'. Ce sont les seules inversions échangeant C et C'.

2° *$R \neq R'$ et les cercles C et C' sont tangents en T.*

Les centres d'homothétie sont les points S et T. On a (fig. 972 *c* et *d*):

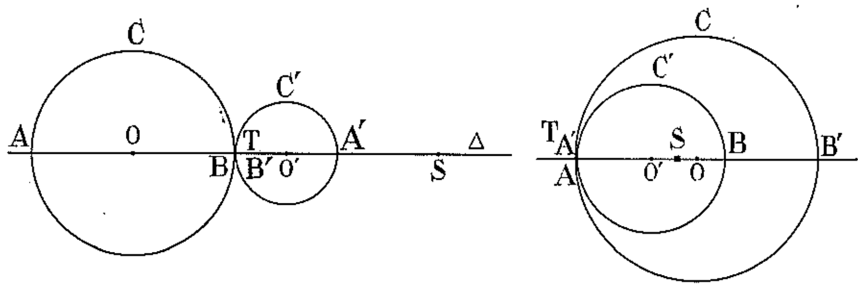


Fig. 972 c. *Fig. 972 d.*

$$\frac{\overline{SA'}}{\overline{ST}} = \frac{\overline{ST}}{\overline{SA}}$$

D'où :

$$\overline{SA} \cdot \overline{SA'} = \overline{ST}^2 = p$$

L'inversion $f = \text{inv}\ (O;\ p)$ transforme C en C'. C'est la seule inversion échangeant C et C'.

(L'inversion de centre T, transforme C en une droite.)

3° $R = R'$.

La translation $t = t_{\overrightarrow{OO'}}$ transforme C en C' (fig. 972 e et *f*).

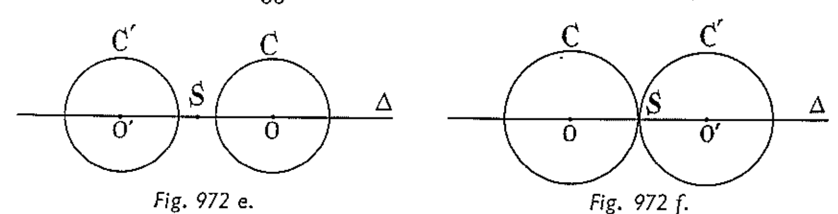


Fig. 972 e. *Fig. 972 f.*

Soit S le milieu du segment OO'; la symétrie $f = \text{sym}\ (S)$ transforme C en C'.

Lorsque le centre S de la symétrie n'est pas sur C (fig. 972 e) (cas des cercles C et C' non tangents), l'inversion $g = \text{inv}\ (S; -p)$, avec $p = \overline{S}_{(C)}$, transforme C en C'.

CHAPITRE LXVIII

LA DROITE COMPLEXE C

973. La droite complexe C.

L'ensemble C des nombres complexes[1] est appelée la droite complexe

1° On sait (cf. n° 504) que C est un espace vectoriel de dimension 2 sur le corps R des réels. On peut donc prendre comme diagramme de Venn de la droite C, le plan réel R^2 que l'on suppose rapporté à deux axes orthonormés $x'Ox$ et $y'Oy$ de vecteurs respectifs $\overrightarrow{OU} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{OV} = \vec{v}$ (fig. 973 *a*).

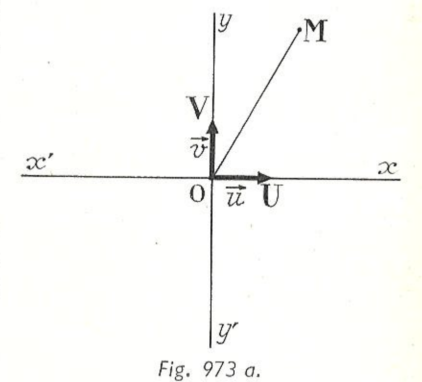


Fig. 973 a.

Soit un point z de la droite C. On a :

$$z = x + iy$$

L'image M de z dans le diagramme de C, c'est-à-dire dans le plan métrique R^2 est le point dont les coordonnées cartésiennes sont x et y.

z est appelé l'affixe du point M.

$x'Ox$ *s'appelle l'axe des réels;* si M appartient à $x'Ox$ son affixe est réelle : $z = x$.

$y'Oy$ *s'appelle l'axe des complexes purs, ou des imaginaires purs;* si M appartient à $y'Oy$ son affixe est de la forme $z = iy$.

2° On pose :

$$\overline{\text{angle}}\left(Ox\,;\overrightarrow{OM}\right) = \theta, \text{ mod } 2\pi$$

θ est appelé l'argument de z.

---

(2) Voir l'étude algébrique des nombres complexes (cf. nos 323 à 344).

On note :

$$\theta = \arg z$$

On pose :

$$\rho = OM$$

ρ ***est le module de z.***

On note :

$$\rho = |z|$$

On a :

$$x = \rho \cdot \cos \theta$$
$$y = \rho \cdot \sin \theta$$

Par suite le nombre complexe z s'écrit :

$$z = \rho \cos \theta + i \rho \sin \theta$$

ou

$$\mathbf{z = \rho \cdot (\cos \theta + i \sin \theta)} \qquad (973 ; 1)$$

Cette forme trigonométrique du nombre complexe z met l'argument et le module en évidence.

Si le module du nombre est $\rho = 1$***, on a***

$$\mathbf{z = \cos \theta + i \sin \theta} \qquad (973 ; 2)$$

et l'image M de ce nombre est sur le cercle trigonométrique (U).

974. Vecteur lié de la droite C.

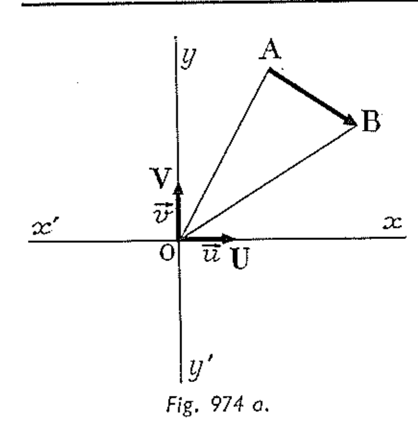


Fig. 974 a.

Soient deux points z_A et z_B de la droite C, et leurs images A et B (fig. 974 *a*).

L'affixe du vecteur lié $(z_A ; z_B)$ ***ou de son image*** $\overrightarrow{AB}$ ***est***

$$Z = z_B - z_A$$

On a :

$$Z = (x_B + y_B) - (x_A + iy_A)$$
$$= (x_B - x_A) + i(y_B - y_A)$$

ou

$$Z = X + iY$$

$X = x_B - x_A$ et $Y = y_B - y_A$ sont les coordonnées cartésiennes du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

975. Vecteur libre.

Tous les vecteurs liés au vecteur libre déterminé par le vecteur lié $\overrightarrow{AB}$ ont pour coordonnées X et Y.

Donc :

$Z = X + iY$ est l'affixe d'un vecteur libre de la droite C.

976. Images de deux nombres complexes opposés.

Soient les deux points M(z) et M'(z') avec $z' = -z$ (fig. 976 *a*). Si $z = x + iy$ les coordonnées de M sont $(x;\ y)$. On a :

$$z' = -z = -x - iy;$$

et les coordonnées de M' sont $(-x;\ -y)$. Par suite M et M' sont symétriques pour l'origine O.

Et :

Deux nombres complexes opposés ont des images symétriques pour l'origine du plan métrique R^2.

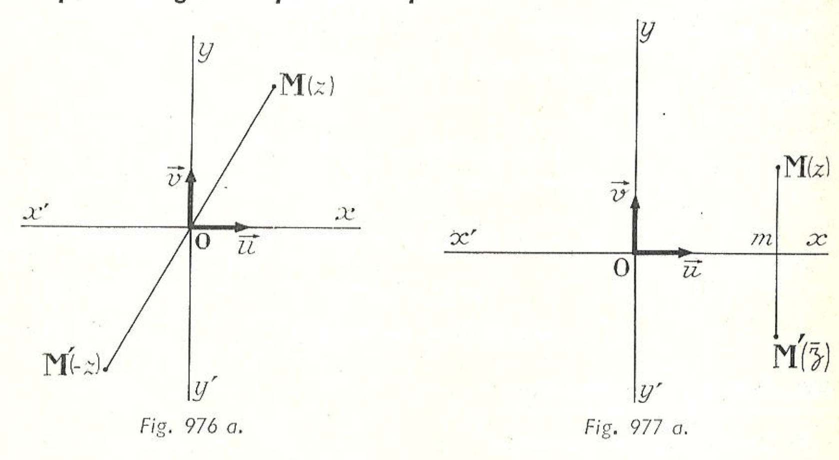


Fig. 976 a. *Fig. 977 a.*

977. Images de deux nombres complexes conjugués.

Soient les deux points M(z) et M'(z') avec $z' = \bar{z}$ (fig. 977 *a*).

Si $z = x + iy$ les coordonnées de M sont $(x;\ y)$. On a $z' = \bar{z} = x - iy$; et les coordonnées de M' sont $(x;\ -y)$. Par suite M et M' sont symétriques pour l'axe $x'Ox$.

Et :

Deux nombres complexes conjugués ont des images symétriques pour l'axe x'Ox des réels.

978. Produit de deux nombres complexes.

Soient les deux nombres complexes

$z = \rho\,(\cos\theta + i\sin\theta)$
$z' = \rho'\,(\cos\theta' + i\sin\theta')$.

D'où :

$$\begin{aligned} zz' &= \rho\rho'\,(\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\theta' + i\sin\theta') \\ &= \rho\rho'\,[(\cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta') + i\,(\sin\theta\cos\theta' + \cos\theta\sin\theta')] \\ &= \rho\rho'\,[\cos(\theta+\theta') + i\sin(\theta+\theta')]. \end{aligned}$$

Le module de zz' est donc $\rho\rho'$ et l'argument est $\theta + \theta'$:

$$|\mathbf{zz'}| = |\mathbf{z}|\cdot|\mathbf{z'}| \qquad (978\,;1)$$

$$\mathbf{arg\,(zz') = arg\,(z) + arg\,(z')} \qquad (978\,;2)$$

On généralise immédiatement à un produit de plus de deux nombres complexes.

979. Puissances entières d'un nombre complexe.

Soit le nombre complexe

$$z = \rho\,(\cos\theta + i\sin\theta).$$

On a :

$$\begin{aligned} z^2 &= z\,.\,z \\ &= \rho^2\,(\cos 2\,\theta + i\sin 2\,\theta) \\ z^3 &= \rho^3\,(\cos 3\,\theta + i\sin 3\,\theta) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

$$\mathbf{z^n = \rho^n\,(cos\,n\,\theta + i\,sin\,n\,\theta)} \qquad (979\,;1)$$

Donc :

$$|\mathbf{z^n}| = |\mathbf{z}|^n \qquad (979\,;2)$$

$$\mathbf{arg\,(z^n) = n\cdot arg\,(z)} \qquad (979\,;3)$$

980. Formule de Moivre.

1° Soit le nombre complexe

$$z = \cos\theta + i\sin\theta.$$

On a :

$$z^n = \cos n\,\theta + i\sin n\,\theta.$$

D'où la formule de Moivre :

$$\mathbf{(cos\,\theta + i\,sin\,\theta)^n = cos\,n\,\theta + i\,sin\,n\,\theta.} \qquad (980\,;1)$$

2° *Si* $n = 2$, on a :

$$\begin{aligned} \cos 2\,\theta + i\sin 2\,\theta &= (\cos\theta + i\sin\theta)^2 \\ &= \cos^2\theta - \sin^2\theta + 2\,i\sin\theta\cos\theta. \end{aligned}$$

D'où :

$$\mathbf{\cos 2\,\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta}$$
$$\mathbf{\sin 2\,\theta = 2\sin\theta\cos\theta.} \qquad (980\,;\,2)$$

3° *Si* $n = 3$, on a :

$$\begin{aligned}\cos 3\,\theta + i\sin 3\,\theta &= (\cos\theta + i\sin\theta)^3\\ &= \cos^3\theta + 3\,i\cos^2\theta\cdot\sin\theta + 3\,i^2\cos\theta\cdot\sin^2\theta + i^3\sin^3\theta\\ &= (\cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta) + i\,(3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta).\end{aligned}$$

D'où :

$$\mathbf{\cos 3\,\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta\cdot\sin^2\theta}$$
$$\mathbf{\sin 3\,\theta = 3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta} \qquad (980\,;\,3)$$

ou encore

$$\cos 3\,\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta\,(1 - \cos^2\theta)$$
$$\mathbf{\cos 3\,\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta} \qquad (980\,;\,4)$$

et

$$\sin 3\,\theta = 3\,(1 - \sin^2\theta)\sin\theta - \sin^3\theta$$
$$\mathbf{\sin 3\,\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta.} \qquad (980\,;\,5)$$

On a aussi :

$$\operatorname{tg} 3\,\theta = \frac{3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta}{\cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta}$$

ou

$$\mathbf{\operatorname{tg} 3\,\theta = \frac{3\operatorname{tg}\theta - \operatorname{tg}^3\theta}{1 - 3\operatorname{tg}^2\theta}} \qquad (980\,;\,6)$$

981. Inverse d'un nombre complexe.

Soit le nombre complexe

$$z = \rho\,(\cos\theta + i\sin\theta)$$

On a :

$$\begin{aligned}\frac{1}{z} &= \frac{1}{\rho\,(\cos\theta + i\sin\theta)}\\ &= \frac{1}{\rho}\cdot\frac{\cos\theta - i\sin\theta}{\cos^2\theta + \sin^2\theta}\\ &= \frac{1}{\rho}\cdot[\cos\theta - i\sin\theta]\\ &= \frac{1}{\rho}\,[\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)]\end{aligned}$$

Le module de $\frac{1}{z}$ est donc $\frac{1}{\rho}$; et l'argument est $-\,\theta$:

$$\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|} \qquad (981\,;\,1)$$

$$\mathbf{\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z)} \qquad (981\,;\,2)$$

982. Quotient de deux nombres complexes.

Soient les deux nombre complexes

$$z = \rho\,(\cos\theta + i\sin\theta)$$
$$z' = \rho'\,(\cos\theta' + i\sin\theta')$$

D'où :

$$\frac{1}{z'} = \frac{1}{\rho'}\,[\cos(-\theta') + i\sin(-\theta')]$$

et

$$\frac{z}{z'} = z \times \frac{1}{z'}$$

$$= \rho\cdot(\cos\theta + i\sin\theta) \times \frac{1}{\rho'}\,[\cos(-\theta') + i\sin(-\theta')]$$

ou

$$\frac{z}{z'} = \frac{\rho}{\rho'}\,[\cos(\theta - \theta') + i\sin(\theta - \theta')]$$

Le module de $\frac{z}{z'}$ est $\frac{\rho}{\rho'}$; et l'argument est $\theta - \theta'$.

$$\left|\frac{\mathbf{z}}{\mathbf{z}'}\right| = \frac{|\mathbf{z}|}{|\mathbf{z}'|} \qquad (982\,;1)$$

$$\mathbf{arg}\left(\frac{\mathbf{z}}{\mathbf{z}'}\right) = \mathbf{arg}\,(\mathbf{z}) - \mathbf{arg}\,(\mathbf{z}') \qquad (982\,;2)$$

983. Translation dans la droite complexe.

Soit un vecteur libre $\vec{V}$ de la droite C, ayant pour affixe $\alpha = a + ib$ (fig. 983 *a*).

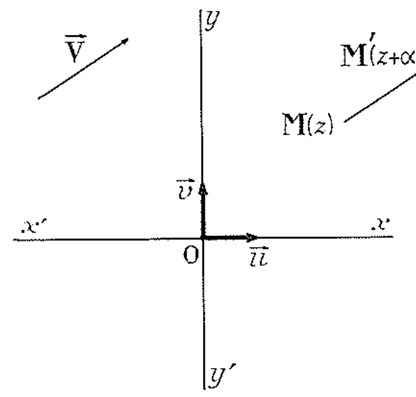


Fig. 983 a.

A un point M d'affixe z, on fait correspondre le point M' affixe $z' = z + \alpha$. Le point M' est l'image de M par la translation $t = t_{\vec{V}}$.

Si $z = x + iy$, on a :

$$z' = x' + iy' = x + iy + a + ib$$
$$= (x + a) + i\,(y + b).$$

D'où :

$$x' = x + a$$
$$y' = y + b.$$

Donc :

Une translation dans C est une translation dans le diagramme R^2.

984. Homothétie dans la droite complexe.

1° Homothétie de centre O.

Soit un nombre complexe $\alpha \cdot (\alpha \in C)$.

A un point M d'affixe z, on fait correspondre le point M′ d'affixe $z' = \alpha \cdot z$. On définit ainsi une homothétie de centre O et de rapport α (fig. 984 *a*).

Si $\alpha = k\,(\cos \varphi + i \sin \varphi)$

et

$$z = \rho\,(\cos \theta + i \sin \theta), \text{ on a :}$$

$$\begin{aligned} z' &= \alpha \cdot z \\ &= k\rho \cdot [\cos (\theta + \varphi) + i \sin (\theta + \varphi)]. \end{aligned}$$

Dans l'image R^2, le point M′ est l'image de M par la similitude de centre O, de rapport k et d'angle φ : sim (O; k; φ).

Fig. 984 a.

Donc :

Une homothétie dans C est une similitude dans le diagramme R^2.

On note :

$$\overrightarrow{OM'} = \alpha \cdot \overrightarrow{OM} \qquad (984;1)$$

Le nombre complexe α est un opérateur de similitude.

2° Homothétie de centre S.

L'homothétie de centre S et de rapport $\alpha = k\,(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ est la similitude sim (S; k; φ) dans le plan R^2.

On a donc :

$$\overrightarrow{SM'} = \alpha \cdot \overrightarrow{SM}$$

ou

$$\overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OS} = \alpha \cdot (\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OS})$$

ou

$$\overrightarrow{OM'} = \alpha \cdot \overrightarrow{OM} + (1 - \alpha) \cdot \overrightarrow{OS} \qquad (984;2)$$

3° Cas particulier ou α est réel.

Si α est réel, α est un opérateur d'homothétie dans R^2 (fig. 984 *b*).

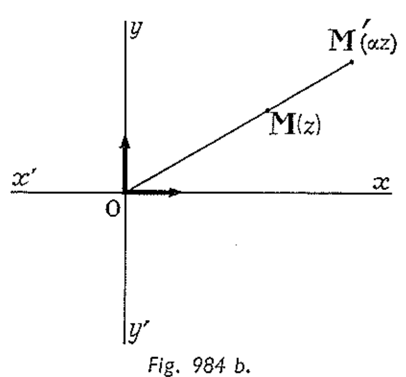


Fig. 984 b.

Donc :

Une homothétie dans C de rapport réel, est une homothétie dans le diagramme R^2.

4° Cas particulier où le module de α est 1.

Si $\alpha = \cos\varphi + i\sin\varphi, |\alpha| = 1$, de

$$\overrightarrow{OM'} = \alpha \cdot \overrightarrow{OM}$$

on tire :

$$\|\overrightarrow{OM'}\| = |\alpha| \cdot \|\overrightarrow{OM}\|$$

ou

$$\|\overrightarrow{OM'}\| = \|\overrightarrow{OM}\|$$

M′ est l'image de M dans sim (O; 1; φ) = rot (O; φ).

Donc :

Une homothétie dans C, de rapport $\alpha = \cos\varphi + i\sin\varphi$, est une rotation d'angle φ dans le diagramme R^2.

α est un opérateur de rotation.

Ainsi :

i est l'opérateur de la rotation d'angle $+\frac{\pi}{2}$.

5° *Remarque.*

Ces résultats montrent qu'il est possible, et très intéressant, d'étudier les similitudes par l'intermédiaire des nombres complexes considérés comme opérateur de similitude.

Les nos 985 et 986 suivants en fournissent des exemples.

985. Composée d'une similitude et d'une translation dans le plan R^2.

1° Formule fondamentale.

Soient $f = \text{hom}\ (S; \alpha)$, $\alpha \in C$, et $t = t_{\vec{a}}$ une homothétie et une translation dans la droite C, c'est-à-dire une similitude et une translation dans le plan R^2. On a :

$f:$ $\qquad\qquad M \longrightarrow M_1$

avec :

$$\overrightarrow{OM_1} = \alpha \cdot \overrightarrow{OM} + (1 - \alpha) \cdot \overrightarrow{OS}$$

t : $$M_1 \longrightarrow M'$$

avec :

$$\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OM_1} + \vec{a}$$

D'où :

$$\overrightarrow{OM'} = \alpha \cdot \overrightarrow{OM} + \left[(1 - \alpha) \cdot \overrightarrow{OS} + \vec{a}\right] \qquad (985 ; 1)$$

2° Point double.

Le point double Ω est donné par

$$\overrightarrow{O\Omega} = \alpha \cdot \overrightarrow{O\Omega} + \left[(1 - \alpha)\, \overrightarrow{OS} + \vec{a}\right]$$

ou

$$(1 - \alpha) \cdot \overrightarrow{O\Omega} = (1 - \alpha)\, \overrightarrow{OS} + \vec{a}$$

et ($\alpha \neq 1$)

$$\overrightarrow{O\Omega} = \overrightarrow{OS} + \frac{\vec{a}}{1 - \alpha}$$

ou

$$\overrightarrow{S\Omega} = \frac{1}{1 - \alpha} \cdot \vec{a} \qquad (985 ; 2)$$

3° Réduction canonique.

On prend le point double Ω comme origine; la formule (985; 1) donne :

$$\overrightarrow{\Omega M'} = \alpha \cdot \overrightarrow{\Omega M} + \left[(1 - \alpha)\, \overrightarrow{\Omega S} + \vec{a}\right]$$

En tenant compte de (985 ; 2), il vient :

$$\overrightarrow{\Omega M'} = \alpha \cdot \overrightarrow{\Omega M}$$

Donc :

Dans la droite C, la composée d'une homothétie et d'une translation est une homothétie.

Dans le plan R^2, ce résultat s'énonce :

Dans le plan R^2 la composée d'une similitude et d'une translation est une similitude.

Si $\alpha \in R$, on a :

Dans le plan R^2, la composée d'une homothétie et d'une translation est une homothétie.

Si $|\alpha| = 1$, on a :

Dans le plan R^2, la composée d'une rotation et d'une translation est une rotation.

4° *Remarque.* On étudie de même la composée d'une translation et d'une homothétie dans la droite C, c'est-à-dire la composée d'une translation et d'une similitude dans le plan R^2.

986. Composée de deux similitudes dans le plan R^2.

1° Formule fondamentale.

Soient $f = \text{hom}(S; \alpha)$ et $g = \text{hom}(T; \beta)$ $(\alpha \in C; \beta \in C)$ deux homothéties dans la droite C, c'est-à-dire deux similitudes dans le plan R^2. On a :

f : $$M \longrightarrow M_1$$

avec :

$$\overrightarrow{OM_1} = \alpha \cdot \overrightarrow{OM} + (1 - \alpha) \cdot \overrightarrow{OS}$$

g : $$M_1 \longrightarrow M'$$

avec :

$$\overrightarrow{OM'} = \beta \cdot \overrightarrow{OM_1} + (1 - \beta) \cdot \overrightarrow{OT}$$

D'où :

$$\overrightarrow{OM'} = \beta \left[\alpha \cdot \overrightarrow{OM} + (1 - \alpha) \overrightarrow{OS}\right] + (1 - \beta) \cdot \overrightarrow{OT}$$

ou

$$\overrightarrow{OM'} = \alpha\beta \cdot \overrightarrow{OM} + \left[\beta(1 - \alpha) \cdot \overrightarrow{OS} + (1 - \beta) \cdot \overrightarrow{OT}\right] \qquad (986; 1)$$

2° Point double.

Le point double Ω est donné par

$$\overrightarrow{O\Omega} = \alpha\beta \cdot \overrightarrow{O\Omega} + \left[\beta(1 - \alpha) \cdot \overrightarrow{OS} + (1 - \beta) \cdot \overrightarrow{OT}\right]$$

ou si $\alpha\beta \neq 1$:

$$\overrightarrow{O\Omega} = \frac{1}{1 - \alpha\beta} \cdot \left[\beta(1 - \alpha) \cdot \overrightarrow{OS} + (1 - \beta) \cdot \overrightarrow{OT}\right] \qquad (986; 2)$$

3° **Réduction canonique** ($\alpha\beta \neq 1$).

On prend le point double Ω comme origine; la formule (986; 1) donne :

$$\overrightarrow{\Omega M'} = \alpha\beta \cdot \overrightarrow{\Omega M} + \left[\beta(1 - \alpha)\,\overrightarrow{\Omega S} + (1 - \beta)\,\overrightarrow{\Omega T}\right]$$

ou

$$\overrightarrow{\Omega M'} = \alpha\beta \cdot \overrightarrow{\Omega M} \qquad (986 ; 3)$$

car si M est en Ω, M′ est aussi en Ω, et on a :

$$\left[\beta\,(1 - \alpha) \cdot \overrightarrow{\Omega S} + (1 - \beta)\,\overrightarrow{\Omega T}\right] = 0$$

***Si** $\alpha\beta \neq 1$*

Dans la droite C, la composée de deux homothéties est une homothétie.

Dans le plan R^2 ce résultat s'énonce :

La composée de deux similitudes est une similitude.

Si $\alpha \in R$, $\beta \in R$ et $\alpha\beta \neq 1$, on a :

La composée de deux homothéties est une homothétie.

Si $|\alpha| = 1$, $|\beta| = 1$, alors $|\alpha\beta| = 1$, et

La composée de deux rotations est une rotation.

4° **Cas ou** $\alpha\beta = 1$.

La formule (986 ; 1) s'écrit :

$$\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OM} + \left[\beta\,(1 - \alpha) \cdot \overrightarrow{OS} + (1 - \beta) \cdot \overrightarrow{OT}\right]$$

La composée est donc une translation de vecteur $\vec{V}$:

$$\begin{aligned}
\vec{V} &= \beta(1 - \alpha)\,\overrightarrow{OS} + (1 - \beta)\,\overrightarrow{OT} \\
&= \frac{1 - \alpha}{\alpha} \cdot \overrightarrow{OS} + \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)\overrightarrow{OT} \\
&= \frac{1 - \alpha}{\alpha} \cdot \overrightarrow{OS} + \frac{\alpha - 1}{\alpha}\,\overrightarrow{OT} \\
&= \frac{1 - \alpha}{\alpha} \cdot \left[\overrightarrow{OS} - \overrightarrow{OT}\right] \\
&= \frac{1 - \alpha}{\alpha} \cdot \overrightarrow{TS}
\end{aligned}$$

c'est-à-dire finalement :

$$\vec{V} = \frac{\alpha - 1}{\alpha} \cdot \overrightarrow{ST}$$

Si $\alpha\beta = 1$ dans la droite C, la composée de deux homothéties est une translation.

Dans le plan R^2, si $\alpha\beta = 1$:

la composée de deux similitudes est une translation;
la composée de deux homothéties est une homothétie;
la composée de deux rotations est une rotation.

987. Image de l'inverse d'un nombre complexe.

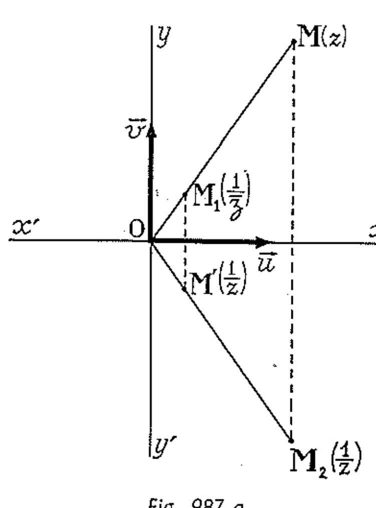


Fig. 987 a.

Soit un nombre complexe

$$z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$$

et son inverse

$$z' = \frac{1}{z} = \frac{1}{\rho} \cdot [\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)]$$

Le point M, d'affixe z, a pour coordonnées polaires $(\theta; \rho)$; le point M', d'affixe $z' = \frac{1}{z}$, a pour coordonnées polaires $\left(-\theta; \frac{1}{\rho}\right)$ (fig. 987 *a*).

On passe donc de M à M' par la composée $h = g_0 f = f_0 g$ de l'inversion $f = inv(0; 1)$ et de la symétrie $g = sym(x'Ox)$.

Remarque 1. L'inverse de M dans l'inversion $f = \text{inv}(0; 1)$ est le point M_1, symétrique de M' pour $x'Ox$.

Il a pour affixe : $\frac{1}{\bar{z}} = \overline{\left(\frac{1}{z}\right)}$

Remarque 2. Si on considère l'inversion de centre O et de puissance p, l'inverse du point M d'affixe z est le point M' d'affixe

$$\frac{p}{\bar{z}} = \overline{\left(\frac{p}{z}\right)}.$$

988. Racines d'un nombre complexe.

Soit un nombre complexe

$$Z = \rho\ (\cos\theta + i\sin\rho)$$

On cherche les nombres complexes $z = r\ (\cos\varphi + i\sin\varphi)$ tels que

$$z^n = Z.$$

Cette équation s'écrit :

$r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) = \rho(\cos\theta + i\sin\theta);$

ce qui équivaut à :

$$\begin{cases} r^n = \rho \\ n\varphi = \theta + k\cdot 2\pi \end{cases}$$

D'où :

$$\begin{cases} r = \sqrt[n]{\rho} \\ \varphi = \dfrac{\theta}{n} + k\cdot\dfrac{2\pi}{n} \end{cases}$$

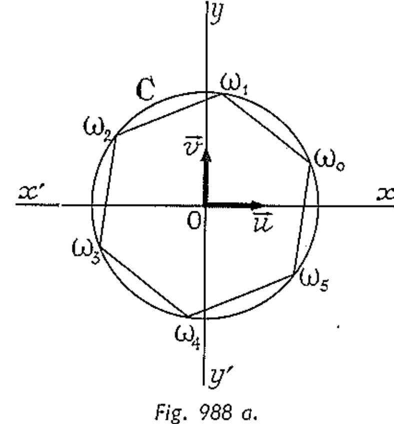


Fig. 988 a.

Le nombre Z complexe a donc n racines n[ièmes] distinctes

$$z_0 = \sqrt[n]{\rho}\cdot\left[\cos\frac{\theta}{n} + i\sin\frac{\theta}{n}\right]$$

$$z_1 = \sqrt[n]{\rho}\cdot\left[\cos\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2\pi}{n}\right)\right]$$

. . . .

$$z_k = \sqrt[n]{\rho}\cdot\left[\cos\left(\frac{\theta}{n} + k\cdot\frac{2\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta}{n} + k\cdot\frac{2\pi}{n}\right)\right]$$

. . . .

$$z_{n-1} = \sqrt[n]{\rho}\cdot\left[\cos\left(\frac{\theta}{n} + (n-1)\frac{2\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta}{n} + (n-1)\frac{2\pi}{n}\right)\right]$$

Les modules de ces n nombres sont égaux :

$$(\forall k)\quad |z_k| = \sqrt[n]{\rho}$$

Donc les images M_0, M_1; ...; M_{n-1} sont sur le cercle de centre O et de rayon $\sqrt[n]{\rho}$, et sont les sommets d'un polygone régulier convexe de n sommets (fig. 988 *a*).

989. Racines complexes de l'unité.

1° On suppose maintenant que $Z = 1$; donc $\rho = 1$ et $\theta = 0$. Les n racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité sont donc :

$$\omega_0 = 1$$

$$\omega_1 = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$$

$$\omega_2 = \cos\frac{4\pi}{n} + i\sin\frac{4\pi}{n}$$

....

$$\omega_k = \cos\frac{k\cdot 2\pi}{n} + i\sin\frac{k\cdot 2\pi}{n}$$

....

$$\omega_{n-1} = \cos\frac{(n-1)\cdot 2\pi}{n} + i\sin\frac{(n-1)\cdot 2\pi}{n}$$

On a immédiatement :

$$\omega_k = (\omega_1)^k \qquad (989;1)$$

Les images A_0, A_1 ... A_{n-1} de ces nombres sont les sommets d'un polygone régulier convexe inscrit dans le cercle trigonométrique (U), A_0 n'est autre que le point de coordonnées (1; 0) (fig. 989 *a*).

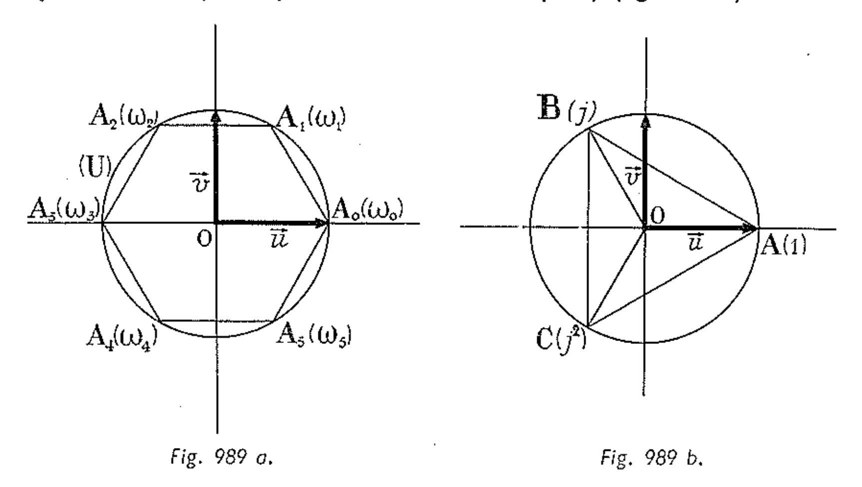


Fig. 989 a. *Fig. 989 b.*

Comme on a :

$$\overrightarrow{OA_0} + \overrightarrow{OA_1} + \dots + \overrightarrow{OA_{n-1}} = 0$$

on déduit :

$$\omega_0 + \omega_1 + \dots + \omega_{n-1} = 0 \qquad (989;2)$$

2° Lorsque $n = 3$, on a (fig 989 *b*) :

$$\omega_0 = 1$$
$$\omega_1 = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$$
$$\omega_2 = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}$$

$\omega_2 = (\omega_1)^2$ et $\omega_1 = (\omega_2)^2$. On note :

$$\omega_0 = 1$$
$$\omega_1 = j$$
$$\omega_2 = j^2$$

1; j; j² sont les racines cubiques de l'unité.

On a :

$$\mathbf{1 + j + j^2 = 0} \qquad (989\,;3)$$

CHAPITRE LXIX

FAISCEAUX DE DROITES

---

990. Birapport d'un faisceau de quatre droites concourantes.

Soit un faisceau de quatre droites α, β, γ, δ concourantes en S (fig. 990 *a*).

Une droite (D) coupe le faisceau suivant les quatre points A, B, C, D; le birapport du quaterne (A, B, C, D) est

$$(A, B; C, D) = \frac{\overrightarrow{CA}}{\overrightarrow{CB}} : \frac{\overrightarrow{DA}}{\overrightarrow{DB}}$$

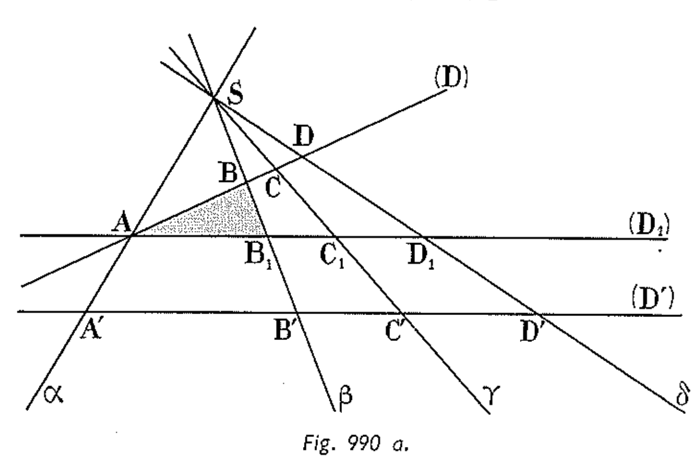


Fig. 990 a.

Une droite (D') coupe le faisceau suivant les quatre points A', B', C', D'; le birapport du quaterne (A', B', C', D') est

$$(A', B'; C', D') = \frac{\overrightarrow{C'A'}}{\overrightarrow{C'B'}} : \frac{\overrightarrow{D'A'}}{\overrightarrow{D'B'}}.$$

Par A, on mène la droite (D_1) parallèle à (D'); elle coupe le faisceau suivant les quatre points A, B_1, C_1, D_1; le birapport du quaterne (A, B_1, C_1, D_1) est

$$(A, B_1; C_1, D_1) = \frac{\overrightarrow{C_1A}}{\overrightarrow{C_1B_1}} : \frac{\overrightarrow{D_1A}}{\overrightarrow{D_1B_1}}$$

On considère le triangle ABB_1.

SCC_1 est une transversale de ce triangle; donc :

$$\frac{\overrightarrow{SB}}{\overrightarrow{SB_1}} \cdot \frac{\overrightarrow{C_1B_1}}{\overrightarrow{C_1A}} \cdot \frac{\overrightarrow{CA}}{\overrightarrow{CB}} = 1 \qquad (990;1)$$

SDD_1 est une transversale du triangle; donc :

$$\frac{\overrightarrow{SB}}{\overrightarrow{SB_1}} \cdot \frac{\overrightarrow{D_1B_1}}{\overrightarrow{D_1A}} \cdot \frac{\overrightarrow{DA}}{\overrightarrow{DB}} = 1 \qquad (990;2)$$

En comparant (1) et (2) on déduit :

$$\frac{\overrightarrow{C_1B_1}}{\overrightarrow{C_1A}} \cdot \frac{\overrightarrow{CA}}{\overrightarrow{CB}} = \frac{\overrightarrow{D_1B_1}}{\overrightarrow{D_1A}} \cdot \frac{\overrightarrow{DA}}{\overrightarrow{DB}}$$

ou

$$\frac{\overrightarrow{CA}}{\overrightarrow{CB}} : \frac{\overrightarrow{DA}}{\overrightarrow{DB}} = \frac{\overrightarrow{C_1A}}{\overrightarrow{C_1B_1}} : \frac{\overrightarrow{D_1A}}{\overrightarrow{D_1B_1}}$$

ou

$$(A, B; C, D) = (A, B_1; C_1\ D_1) \qquad (990;3)$$

D'autre part, l'homothétie de centre S et de rapport $k = \dfrac{\overrightarrow{SA'}}{\overrightarrow{SA}}$ transforme $AB_1C_1D_1$ en $A'B'C'D'$; elle conserve le birapport, et

$$(A, B_1; C_1, D_1) = (A', B'; C', D') \qquad (990;4)$$

Des formules (990; 3) et (990; 4), on déduit :

$$(A, B; C, D) = (A', B'; C', D').$$

Et :

Si on coupe un faisceau de quatre droites concourantes par une sécante quelconque, le birapport des quatre points d'intersection est indépendant de la sécante.

$\rho = (A, B; C, D)$ est le birapport du faisceau.

991. Faisceaux harmoniques.

Si le birapport $\rho = (A, B; C, D) = -1$, le faisceau $(\alpha; \beta; \gamma; \delta)$ est dit faisceau harmonique (fig. 991*a*).

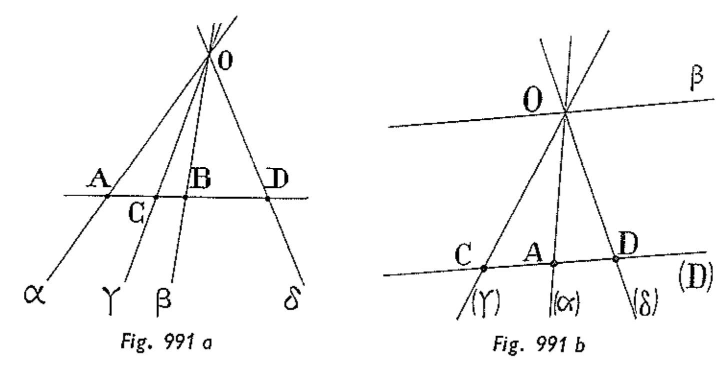


Fig. 991 a *Fig. 991 b*

Donc :

Toute section d'un faisceau harmonique par une droite est un quaterne harmonique.

Si la droite D est parallèle à la droite β (A, α; C, D) est un quaterne harmonique et *A est le milieu de CD* (Fig, 991*b*)

Si $(\alpha, \beta; \gamma, \delta)$ est un faisceau harmonique, γ et δ sont les rayons conjugués par rapport aux rayons α et β.

992. Remarque.

Les résultats des deux numéros précédents sont encore valables si les faisceaux sont des faisceaux de droites parallèles (fig. 992 *a* et *b*).

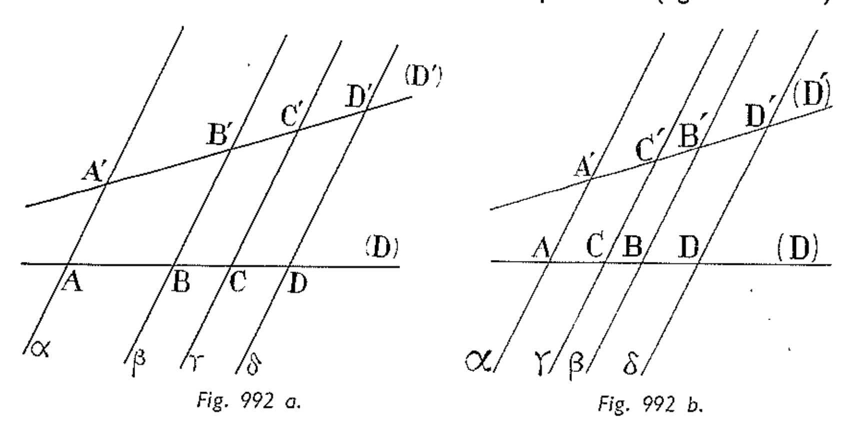


Fig. 992 a. *Fig. 992 b.*

993. Construction d'un faisceau harmonique connaissant trois rayons.

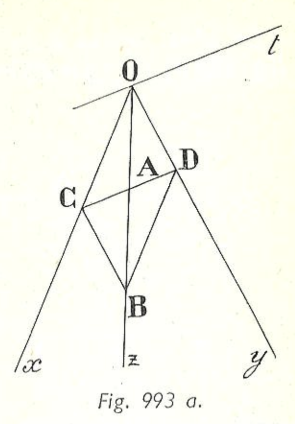


Fig. 993 a.

Les trois rayons donnés sont O*x*, O*y*, Oz; O*x* et O*y* sont conjugués (fig. 993 *a*).

Par B pris sur Oz, on mène les parallèles aux rayons O*x* et O*y*; on détermine un parallélogramme OCBD, de centre A.

La droite O*t* parallèle à la diagonale CD est le quatrième rayon du faisceau. En effet la sécante CD parallèle au rayon O*t*, coupe le faisceau en trois points C, A, D tels que A est le milieu de CD.

994. Faisceau harmonique dont deux rayons conjugués sont rectangulaires.

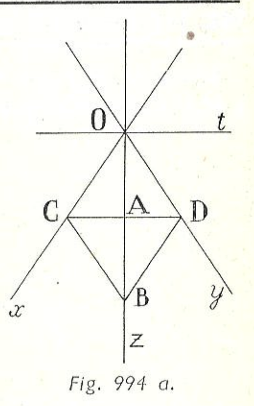


Fig. 994 a.

Pour que O*t* soit perpendiculaire à Oz, il faut et il suffit que le parallélogramme OCBD soit un losange, donc que Oz soit une bissectrice des droites O*x* et O*y*. L'autre bissectrice est O*t* (fig.994 *a*).

D'où l'énoncé :

Pour qu'un faisceau harmonique ait deux rayons conjugués rectangulaires, il faut et il suffit que ces rayons soient bissectrices des deux autres.

995. Exemples de faisceaux harmoniques.

1° ***Soit un triangle ABC; on mène la médiane AI et la droite Ax parallèle à BC.***

Le faisceau (AB, AC; AI, Ax) est harmonique (fig. 995 *a*)

En effet I est le milieu de BC.

2° ***Deux droites concourantes et leurs bissectrices forment un faisceau harmonique.***

En effet, soient deux droites Ox, Oy et leurs bissectrices Oz, Ot (fig. 995 *b*). Une parallèle à Ot coupe Ox, Oy, Oz en A, B, I respective-

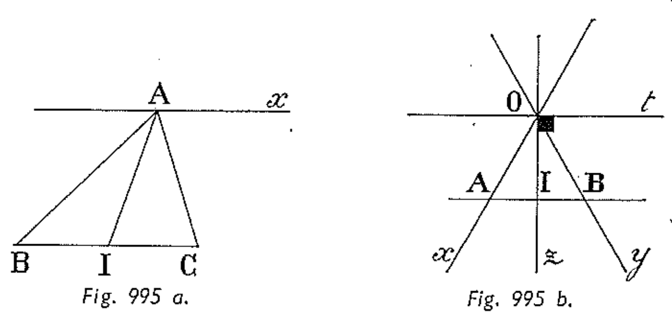


Fig. 995 a. *Fig. 995 b.*

ment. Le triangle OAB, dans lequel OI est bissectrice et hauteur, est isocèle de sommet O. Par suite I est le milieu du segment AB, et le faisceau (Ox, Oy, Oz, Ot) est harmonique.

996. Harmonicité et bissectrices d'un triangle.

Soient un triangle ABC et les deux bissectrices $A\alpha$ et $A\alpha'$ de l'angle A, α et α' étant leurs pieds sur le côté BC (fig. 996 *a*).

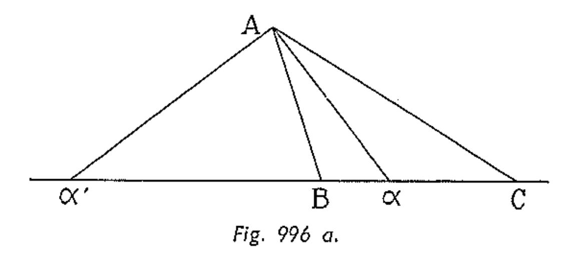


Fig. 996 a.

Le faisceau $(A;\ BC\alpha\alpha')$ est harmonique. Donc *le quaterne* $(B, C;\ \alpha, \alpha')$ *est harmonique* et par suite α et α' partagent $\overrightarrow{BC}$ dans des rapports opposés :

$$\frac{\overline{\alpha B}}{\overline{\alpha C}} = -\frac{\overline{\alpha' B}}{\overline{\alpha' C}}.$$

997. Première condition nécessaire et suffisante.

Étant donné un triangle ABC, une condition nécessaire et suffisante pour qu'une droite $A\alpha$ (α étant un point de la droite BC), soit bissectrice intérieure de l'angle A est que l'on ait :

$$\frac{\overline{\alpha B}}{\overline{\alpha C}} = -\frac{AB}{AC}.$$

1° *La condition est nécessaire*, c'est-à-dire que si $A\alpha$ est bissectrice intérieure de l'angle A on a :

$$\frac{\overline{\alpha B}}{\overline{\alpha C}} = -\frac{AB}{AC}.$$

Dans le triangle $A\alpha B$, on a (fig. 996 *a*) :

$$\frac{\alpha B}{\sin \frac{A}{2}} = \frac{AB}{\sin \alpha} \qquad (\alpha \text{ angle } A\alpha B)$$

Dans le triangle $A\alpha C$, on a :

$$\frac{\alpha C}{\sin \frac{A}{2}} = \frac{AC}{\sin (\pi - \alpha)} = \frac{AC}{\sin \alpha}.$$

En faisant le rapport de ces deux résultats :

$$\frac{\alpha B}{\alpha C} = \frac{AB}{AC}$$

et en remarquant que α est entre B et C :

$$\frac{\overline{\alpha B}}{\overline{\alpha C}} = -\frac{AB}{AC}.$$

2° La condition est suffisante, c'est-à-dire que si on a $\frac{\overline{\alpha B}}{\overline{\alpha C}} = -\frac{AB}{AC}$, $A\alpha$ est bissectrice intérieure de l'angle A.

En effet, α est le point unique partageant $\overrightarrow{BC}$ dans le rapport $-\frac{AB}{AC}$. Or on vient de voir que la bissectrice intérieure de l'angle A partage $\overrightarrow{BC}$ dans le même rapport $-\frac{AB}{AC}$. Elle passe donc par α; et $A\alpha$ est bissectrice intérieure de l'angle A.

998. Seconde condition nécessaire et suffisante.

On démontre de même :

Étant donné un triangle ABC, une condition nécessaire et suffisante pour qu'une droite $A\alpha'$ (α étant un point de la droite BC), soit bissectrice extérieure de l'angle A est que l'on ait :

$$\frac{\overline{\alpha' B}}{\overline{\alpha' C}} = \frac{AB}{AC}.$$

999. Calcul des segments déterminés par les pieds des bissectrices.

Les points α et α' partageant le vecteur $\overrightarrow{BC}$ dans les rapports $-\frac{c}{b}$ et $+\frac{c}{b}$, il est facile de calculer αB, αC, $\alpha' B$, $\alpha' C$.

Dans le cas de la bissectrice intérieure on a :

$$\overline{B\alpha} = \frac{-\frac{c}{b}}{-\frac{c}{b} - 1} \cdot \overline{BC} = \frac{c}{b + c} \cdot \overline{BC}$$

D'où on tire :

$$\alpha B = \frac{ac}{b + c} \qquad (999 ; 1)$$

et

$$\alpha C = \frac{ab}{b + c}. \qquad (999 ; 2)$$

De la même manière, pour la bissectrice extérieure, on obtient :

$$\alpha' B = \frac{ab}{|b - c|} \qquad (999 ; 3)$$

et

$$\alpha' C = \frac{ab}{|b - c|}. \qquad (999 ; 4)$$

1000. Polaire d'un point par rapport à deux droites parallèles.

Soient deux droites parallèles (D) et (D'), et un point A n'appartenant ni à (D), ni à (D') (fig. 1000 *a*). On considère la droite (Δ) passant par A et parallèle à (D), et la droite (*a*) conjuguée de (Δ) par rapport à (D) et (D').

Fig. 1000 a.

Une droite variable (μ), passant par A coupe (D) en P, (D') en P' et (*a*) en M. Le point M est le conjugué *unique* de A par rapport à PP'.

Donc :

Le lieu des points M conjugués de A par rapport à PP' est la droite (a).

La droite (a) est appelée la polaire de A par rapport à (D) et (D').

1001. Polaire d'un point par rapport à deux droites sécantes.

Soient deux droites (D) et (D′) sécantes en O, et un point A n'appartenant ni à (D) ni à (D′) (fig. 1001 *a*). On considère la droite (Δ) passant par O et A, et la droite (*a*) conjuguée de (Δ) par rapport à (D) et (D′).

Une droite variable (μ), passant par A coupe (D) en P, (D′) en P′ et (*a*) en M. Le point M est le conjugué unique de A par rapport à PP′.

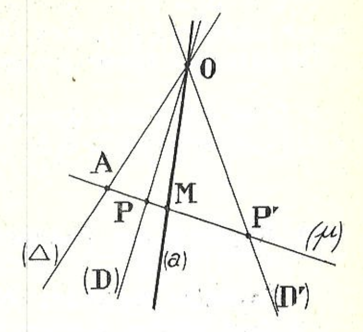


Fig. 1001 a.

Donc :

Le lieu des points M conjugués de A par rapport à PP′ est la droite (a).

La droite (a) est appelée la polaire de A par rapport à (D) et (D′).

1002. Construction de la polaire.

1° Par le point A on mène deux droites (μ) et (λ); (μ) coupe (D) et (D′) en P et P′; (λ) coupe (D) et (D′) en Q et Q′. Soient M le conjugué de A par rapport à PP′, et N le conjugué de A par rapport à QQ′. M et N appartiennent à la polaire (*a*) de A par rapport à (D) et (D′) (fig. 1002 *a* et *b*).

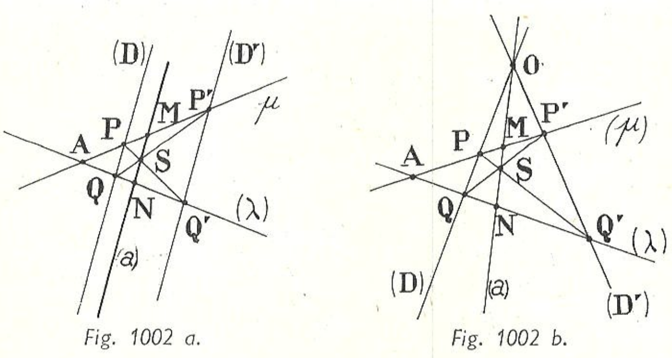


Fig. 1002 a. *Fig. 1002 b.*

Les droites PQ′ et QP′ se coupent en S. (*a*) est aussi la polaire de A par rapport à ces deux droites PQ′ et QP′; donc (*a*) passe par S.

On a ainsi un procédé utilisant uniquement la règle, pour construire un point S de la polaire (a) *de A par rapport à (D) et (D′).*

2° *Si les deux droites données (D) et (D′) sont parallèles*, (a) passe par S et est parallèle à (D); d'où une construction de (a).

On peut aussi construire un second point S′ de (a).

3° *Si les deux droites données (D) et (D′) se coupent en O*, (a) est déterminée par les points O et S.

1003. Rapport des distances d'un point à deux droites fixes.

Ensemble des points M du plan dont le rapport des distances à deux droites données est égal à un nombre positif* k *donné.

1° *Les deux droites fixes sont concourantes.*

Soient deux droites concourantes $x'Ox$ et $y'Oy$. Un point M se projetant sur $x'x$ et $y'y$ en H et K respectivement, on cherche l'ensemble des points M tels que :

$$\frac{MH}{MK} = k.$$

Si $k = 1$, on a $MH = MK$ et l'ensemble se compose des deux bissectrices des droites $x'x$ et $y'y$.

Si $k \neq 1$, on voit immédiatement par homothétie (fig. 1003 *a*) que si un point M appartient au lieu, il en est de même de tous les points de la droite OM. Ceci amène à chercher seulement les points du lieu situés sur une droite quelconque ne passant pas par O. On choisit une perpen-

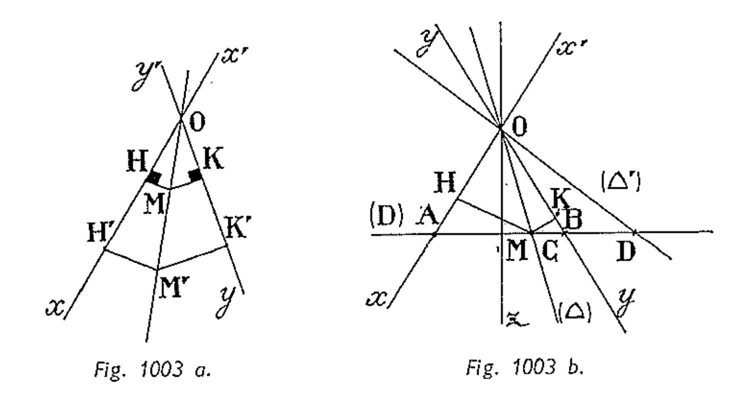


Fig. 1003 a. *Fig. 1003 b.*

diculaire (D) à l'une des bissectrices (fig. 1003 *b*). Soient A et B ses points de rencontre avec $x'x$ et $y'y$ respectivement.

Pour qu'un point M de (D) appartienne à l'ensemble, il faut et il suffit que $\frac{MH}{MK} = k$, ou, puisque les triangles MAH et MBK sont semblables, que :

$$\frac{MA}{MB} = k.$$

Il y a deux points de l'ensemble, et deux seulement, appartenant à (D); ce sont les points C et D partageant $\overrightarrow{AB}$ dans le rapport arithmétique k.

L'ensemble se compose donc de deux droites OC et OD. Elles forment avec x'x et y'y un faisceau harmonique de droites concourantes.

2° *Les deux droites fixes sont parallèles.*

Soient deux droites parallèles $x'x$ et $y'y$. Un point M se projetant sur $x'x$ et $y'y$ en H et K respectivement on cherche l'ensemble des points M tels que :

$$\frac{MH}{MK} = k.$$

Si $k = 1$, on a MH = MK. L'ensemble est l'axe longitudinal (Δ) de la bande.

Si $k \neq 1$, on voit immédiatement par translation (fig. 1003 *c*) que si

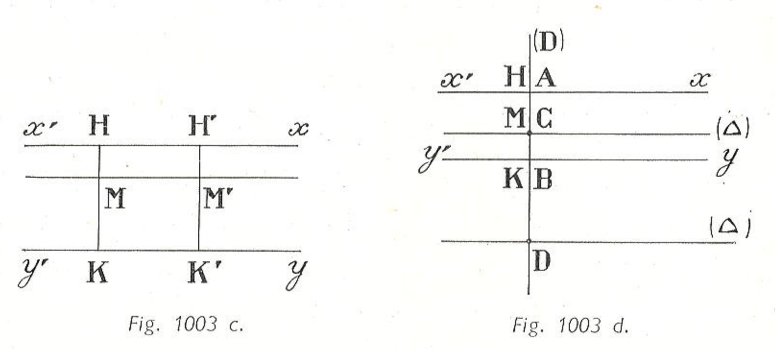


Fig. 1003 c. *Fig. 1003 d.*

un point M appartient au lieu, il en est de même de tous les points de la droite menée par M parallèlement à $x'x$. Ceci amène à chercher seulement les points du lieu situés sur une droite sécante à la bande. On choisit une perpendiculaire (D) à la bande (fig. 1003 *d*).

Soient A et B ses points de rencontre avec $x'x$ et $y'y$ respectivement.

Pour qu'un point M de (D) appartienne à l'ensemble, il faut et il suffit que :

$$\frac{MA}{MB} = k.$$

Il y a deux points de l'ensemble, et deux seulement, appartenant à (D); ce sont les points C et D partageant $\overrightarrow{AB}$ dans le rapport arithmétique k.

L'ensemble se compose donc de deux droites (Δ) et (Δ') menées par C et D parallèlement à x'x. Elles forment avec x'x et y'y un faisceau harmonique de droites parallèles.

1004. Quadrilatère complet.

Un quadrilatère complet est un ensemble de quatre droites telles que trois quelconques ne passent pas par un même point.

1° Les droites D_1 D_2 D_3 D_4 sont les *côtés*; les six points d'intersection des droites deux à deux sont les *sommets* (fig. 1004 *a*).

Les sommets correspondants $D_1 \cap D_2$ et $D_3 \cap D_4$ sont des *sommets opposés;* il y a donc trois couples de sommets opposés.

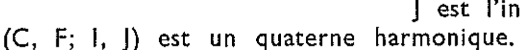


Fig. 1004 a.

Les droites déterminées par les couples de sommets opposés sont les *diagonales*.

2° En se reportant à la construction de la polaire, on voit que la polaire du point D par rapport aux droites AB et AC, passe par le point d'intersection I des diagonales BE et CF. Le faisceau (AB, AC; AD, AI) est harmonique. Donc, si J est l'intersection de CF et AD (C, F; I, J) est un quaterne harmonique.

Et :

Les deux sommets qui définissent une diagonale, et les intersections de cette diagonale et des deux autres diagonales forment un quaterne harmonique.

CHAPITRE LXX

PROBLÈMES

1005. Problème 1.

Soit, dans le plan orthonormé R^2, la translation $\mathbf{t} = \mathbf{t}_{\vec{a}}$ ***et la rotation de centre S et d'angle*** θ, $\mathbf{f} = \mathbf{rot}$ ***(S;*** θ***).***

Quelle est la transformation $\mathbf{g} = \overset{-1}{\mathbf{t}} \circ \mathbf{f} \circ \mathbf{t}$.

Étude vectorielle.

On prend le point S comme origine des repères vectoriels.

L'opérateur complexe de la rotation $f = \text{rot}\,(S;\ \theta)$ est

$$\rho = \cos\theta + i\sin\theta.$$

On a :

t : $$M \longrightarrow M_1$$

avec :

$$\overrightarrow{SM_1} = \overrightarrow{SM} + \vec{a}.$$

f : $$M_1 \longrightarrow M_2$$

avec :

$$\overrightarrow{SM_2} = \rho \cdot \overrightarrow{SM_1}$$
$$= \rho \cdot (\overrightarrow{SM} + \vec{a})$$

$\overset{-1}{t}$: $$M_2 \longrightarrow M'$$

avec :

$$\overrightarrow{SM'} = \overrightarrow{SM_2} - \vec{a}$$

D'où :

$$\overrightarrow{SM'} = \rho \cdot (\overrightarrow{SM} + \vec{a}) - \vec{a}$$

ou

$$\overrightarrow{SM'} = \rho \cdot \overrightarrow{SM} + (\rho - 1)\,\vec{a} \qquad (1005\,;\,1)$$

Le point double Ω est donné par l'équation :

$$\overrightarrow{S\Omega} = \rho \cdot \overrightarrow{S\Omega} + (\rho - 1)\vec{a}$$

ou

$$(1 - \rho) \cdot \overrightarrow{S\Omega} = (\rho - 1)\vec{a}$$

ρ étant différent de 1, $(\theta \neq 0)$, on a :

$$\overrightarrow{S\Omega} = -\vec{a} \qquad (1005\,;2)$$

On prend alors Ω comme origine des repères vectoriels; on a :

$$\overrightarrow{\Omega M'} - \overrightarrow{\Omega S} = \rho\left(\overrightarrow{\Omega M} - \overrightarrow{\Omega S}\right) + (\rho - 1)\vec{a}$$

ou :

$$\overrightarrow{\Omega M'} = \rho \cdot \overrightarrow{\Omega M} + (1 - \rho)\overrightarrow{\Omega S} + (\rho - 1)\vec{a}$$

et

$$\overrightarrow{\Omega M'} = \rho \cdot \overrightarrow{\Omega M} \qquad (1005\,;3)$$

car

$$(1 - \rho)\overrightarrow{\Omega S} + (\rho - 1)\vec{a} = 0$$

La formule (1005 ; 3) prouve que g est la rotation de centre Ω et d'angle θ : $g = \text{rot}(\Omega\,;\theta)$.

Et :

$$g = \overset{-1}{t}{}_{\circ}f_{\circ}t \qquad (1005\,;4)$$

Étude analytique.

Le plan R^2 est le diagramme de la droite complexe C; il est intéressant de considérer le problème posé comme un problème sur la droite complexe. On prend le point S comme origine de cette droite.

Soit α l'affixe du vecteur $\vec{a}$, et $\rho = \cos\theta + i\sin\theta$ l'opérateur complexe de la rotation f. Les points sont déterminés par leurs affixes.

On a :

t : $\quad M(z) \longrightarrow M_1(z_1 = z + \alpha)$

f : $\quad M_1(z_1) \longrightarrow M_2(z_2 = \rho \cdot z_1 = \rho(z + \alpha))$

$\overset{-1}{t}$: $\quad M_2(z_2) \longrightarrow M'(z' = z_2 - \alpha)$

D'où :

$$z' = \rho(z + \alpha) - \alpha$$

ou

$$z' = \rho z + \alpha(\rho - 1) \qquad (1005\,;5)$$

Le point double $\Omega(\omega)$ est donné par :

$$\omega = \rho\omega + \alpha(\rho - 1);$$

d'où :

$$\omega = -\alpha$$

ou

$$\overrightarrow{S\Omega} = -\vec{a}$$

On prend Ω comme nouvelle origine de la droite C; la formule de changement d'origine est

$$z = Z - \alpha$$

La formule (1005 ; 5) devient :

$$Z' - \alpha = \rho \cdot Z - \alpha$$

ou

$$Z' = \rho \cdot Z.$$

Donc g est la rotation de centre Ω et d'angle θ : $g = \text{rot}(\Omega; \theta)$.

Donc :

$$g = \overset{-1}{t} \circ f \circ t$$

1006. Problème 2.

Le plan est rapporté à deux axes orthonormés x'Ox et y'Oy. Soit le cercle Γ d'équation $x^2 + y^2 = a^2$ ($a > 0$), l'axe x'Ox coupe Γ en A (a; 0) et B (— a; 0); l'axe y'Oy coupe Γ en C (0; a) et D (0; — a).

Un point M du segment AB est déterminé par $\overline{OM} = m$. On considère les deux demi-cercles C_1 et C_2 de diamètres AM et BM, situés dans le demi-plan d'équation $y \geqslant 0$, et ayant pour centres respectifs O_1 et O_2. Soient I le point de C_1 se projetant en O_1 et J le point de C_2 se projetant en O_2 sur la droite AB; ω désigne le milieu du segment IJ.

Donner une solution analytique et une solution géométrique aux trois premières questions suivantes, et une solution analytique à la dernière question.

1° Étudier, lorsque m varie, l'ensemble des points I et l'ensemble des points J.

2° Etudier, lorsque m varie, l'ensemble des points ω.

3° Par M on mène la perpendiculaire Δ à la droite IJ. Montrer que la droite Δ passe par un point fixe, que l'on précisera.

4° Les droites Δ et IJ se coupent en L. Calculer les coordonnées de ce point en fonction de m, et donner l'équation du lieu de L.

Solution géométrique.

1° *Ensembles des points I et J.*

Le point A est centre d'homothétie des cercles Γ et C_1 (fig. 1006 *a*). La droite O_1I perpendiculaire à AB a pour homothétique la droite O_2J perpendiculaire à AB, donc C a pour homothétique le point I; le rapport d'homothétie est

$$k = \frac{\overline{AM}}{\overline{AB}} = \frac{m - c}{-2a} = \frac{a - m}{2a}.$$

Lorsque M décrit le segment AB de A vers B, m varie de a à $-a$, O_1 décrit le segment AO de A vers O, donc I décrit le segment AC.

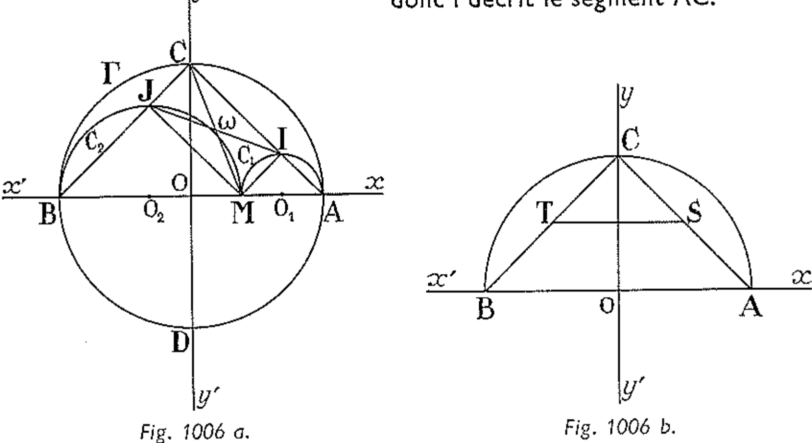


Fig. 1006 a. *Fig. 1006 b.*

L'ensemble des points I est le segment AC.

De même :

L'ensemble des points J est le segment BC.

2° *Ensemble des points* ω.

Le quadrilatère MICJ est un rectangle; ω est le centre de symétrie de ce rectangle; par suite

$$\frac{\overrightarrow{C\omega}}{\overrightarrow{CM}} = \frac{1}{2},$$

et ω est l'homothétique de M par l'homothétie hom$\left(C; \frac{1}{2}\right)$. L'ensemble des points ω est donc l'homothétique du segment AB par cette homothétie; c'est le segment ST (fig. 1006 *b*) ayant pour extrémités les milieux des segments AC et BC.

3° *Point fixe de la droite* Δ.

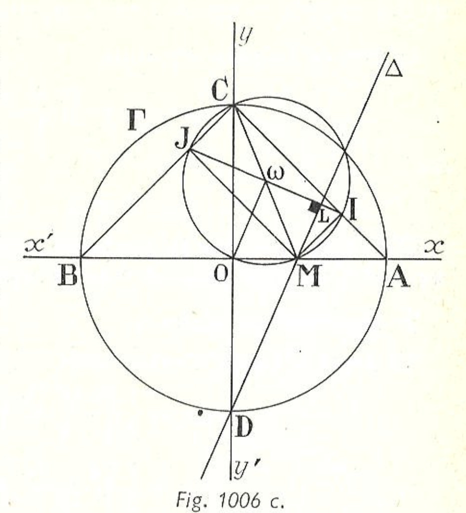


Fig. 1006 c.

Le cercle de centre ω et circonscrit au rectangle MICJ a pour diamètres MC et IJ; il passe donc par le point O (fig. 1006 *c*).

La droite CO est bissectrice de l'angle inscrit ICJ : O est le milieu du demi-cercle IMOJ; par suite $O\omega$ est perpendiculaire à IJ, et parallèle à Δ.

Si Δ coupe $y'Oy$ en E, on a dans le triangle CME

$$\frac{\overrightarrow{CE}}{\overrightarrow{CO}} = \frac{\overrightarrow{CM}}{\overrightarrow{C\omega}} = 2$$

ou

$$\overrightarrow{CE} = 2 \cdot \overrightarrow{CO}$$

Cette relation montre que E n'est autre que le point D. Et :

La droite Δ *passe par le point fixe D.*

Solution analytique.

1° *Ensembles des points I et J.*

On peut calculer facilement les coordonnées des points I et J. On a :

$$\overline{OO_1} = \frac{\overline{OA} + \overline{OM}}{2} = \frac{a+m}{2} \qquad \overline{OO_2} = \frac{\overline{OB} + \overline{OM}}{2} = \frac{m-a}{2}$$

$$\overline{MA} = \overline{OA} - \overline{OM} = a - m \qquad \overline{BM} = \overline{OM} - \overline{OB} = m + a.$$

Les coordonnées de I et J sont donc :

$$\text{I} \left| \begin{aligned} x &= \frac{a+m}{2} \\ y &= \frac{a-m}{2} \end{aligned} \right. \qquad \text{J} \left| \begin{aligned} x &= \frac{m-a}{2} \\ y &= \frac{m+a}{2} \end{aligned} \right.$$

Le lieu de I a pour équation

$$x + y = \frac{a+m}{2} + \frac{a-m}{2}$$

ou

$$x + y = a$$

C'est l'équation de la droite AC. Si m varie de $-a$ à $+a$, x varie de 0 à a; donc *le lieu de I est le segment AC.*

Le lieu de J a pour équation

$$y - x = \frac{m+a}{2} - \frac{m-a}{2}$$

ou

$$y - x = a$$

C'est l'équation de la droite BC. Si m varie de $-a$ à $+a$, x varie de $-a$ à 0; donc *le lieu de J est le segment BC.*

2° *Ensemble des points* ω.

Le point ω a pour coordonnées

$$\omega \left| \begin{array}{l} x = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{a+m}{2} + \dfrac{m-a}{2}\right] = \dfrac{m}{2} \\ y = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{a-m}{2} + \dfrac{m+a}{2}\right] = \dfrac{a}{2} \end{array} \right.$$

Le lieu de ω a donc pour équation $y = \dfrac{a}{2}$; m varie de $-a$ à $+a$; les points S $\left(\dfrac{a}{2}; \dfrac{a}{2}\right)$ et T $\left(-\dfrac{a}{2}; \dfrac{a}{2}\right)$ correspondent à $m = +a$ et $m = -a$. *Le lieu de* ω *est le segment ST.*

3° *Point fixe de la droite* Δ.

Δ est la droite passant par M et perpendiculaire à IJ.

On obtient facilement les coordonnées du vecteur $\vec{IJ}$:

$$\vec{IJ} \left| \begin{array}{l} X = \dfrac{m-a}{2} - \dfrac{a+m}{2} = -a \\ Y = \dfrac{m+a}{2} - \dfrac{a-m}{2} = m \end{array} \right.$$

Le vecteur $\vec{N} = \vec{IJ}$ est normal à Δ. L'équation vectorielle de Δ est

$$\vec{N} \cdot \vec{MP} = 0$$

ou analytiquement :

$$-a(x-m) + my = 0$$

et

$$ax - my = am \qquad (1006; 1)$$

Cette équation de Δ s'écrit encore

$$ax - m(y + a) = 0$$

Elle est vérifiée, quel que soit m, si $x = 0$ et $y = -a$. Ainsi Δ *passe par le point D* $(0; -a)$.

4º *Coordonnées du point L.*

La droite IJ a pour pente :

$$p = \frac{Y}{X} = -\frac{m}{a}$$

Son équation est donc :

$$y - \frac{a - m}{2} = -\frac{m}{a} \cdot \left(x - \frac{a + m}{2}\right)$$

ou

$$y = -\frac{m}{a}x + \frac{a^2 + m^2}{2a}$$

ou

$$mx + ay = \frac{a^2 + m^2}{2} \qquad (1006\,;\,2)$$

Les coordonnées du point L sont données par le système :

$$\begin{cases} ax - my = am & (\Delta) \\ mx + ay = \dfrac{a^2 + m^2}{2} & (\text{IJ}) \end{cases}$$

Le déterminant de ce système est

$$D = \begin{vmatrix} a & -m \\ m & a \end{vmatrix} = a^2 + m^2$$

D'où :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} am & -m \\ \dfrac{a^2 + m^2}{2} & a \end{vmatrix}}{a^2 + m^2} = \frac{a^2m + \dfrac{m(a^2 + m^2)}{2}}{a^2 + m^2}$$

ou

$$x = \frac{m(3a^2 + m^2)}{2(a^2 + m^2)}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a & am \\ m & \dfrac{a^2 + m^2}{2} \end{vmatrix}}{a^2 + m^2} = \frac{\dfrac{a(a^2 + m^2)}{2} - am^2}{a^2 + m^2}$$

ou

$$y = \frac{a(a^2 - m^2)}{2(a^2 + m^2)}$$

Les coordonnées de L sont donc :

$$L \left| \begin{array}{l} x = \dfrac{m(3a^2 + m^2)}{2(a^2 + m^2)} \\ y = \dfrac{a(a^2 - m^2)}{2(a^2 + m^2)} \end{array} \right.$$

En éliminant m entre les équations des droites Δ et IJ, on obtient l'équation du lieu de L.

De (1006 ; 1) on tire :

$$m = \frac{ax}{a + y}$$

et en substituant dans (1006 ; 2) :

$$2\left(\frac{ax^2}{y + a} + ay\right) = a^2 + \frac{a^2x^2}{(a + y)^2}$$

ou, en simplifiant par a,

$$2x^2(y + a) + 2y(y + a)^2 = a(y + a)^2 + ax^2$$

ou

$$x^2(2y + 2a - a) = (y + a)^2(a - 2y)$$

ou

$$x^2(2y + a) = (y + a)^2(a - 2y)$$

et enfin :

$$x^2 = (y + a)^2 \cdot \frac{a - 2y}{a + 2y} \qquad (1006 ; 3)$$

1007. Problème 3.

Dans le plan rapporté à deux axes orthonormés x'Ox et y'Oy, on donne les points A (− 3; 0), B (3; 0), I (1; 0), J (9; 0), S (0; h) et M(x; 0), h étant une constante et x une variable.

1° ***Calculer en fonction de x,***

$$f(x) = MA + 2 \cdot MB.$$

Étudier la fonction f : x ⟶ f(x). Représentation graphique.

2° ***Vérifier que*** $\dfrac{f(x)}{MI}$ ***ou*** $\dfrac{f(x)}{MJ}$ ***reste constant.***

3° Étudier les fonctions :

$$f_1 : \quad x \longrightarrow \frac{f(x)}{MI}$$

$$f_2 : \quad x \longrightarrow \frac{f(x)}{MJ}$$

Représentations graphiques.

4° Calculer en fonction de x :

$$g(x) = \frac{MA + 2 \cdot MB}{MS}$$

Comparer, lorsque h = 3, les valeurs prises par g(x) en deux points M_1 et M_2 conjugués harmoniques par rapport à A et B. Expliquer géométriquement le résultat obtenu.

5° On suppose maintenant que h est quelconque. Soient A′, B′, I′, J′, M′, les inverses respectifs de A, B, I, J, M dans l'inversion de centre S et de puissance h^2.

Montrer que le rapport $\frac{g(x)}{M'I'}$ ou le rapport $\frac{g(x)}{M'J'}$ est constant.

6° On suppose maintenant h = 3. Déduire des résultats du 5° les variations de la fonction $g : x \longrightarrow g(x)$. Maximum et minimum de cette fonction.

7° Étant donnés un cercle C, deux points A′ et B′ de ce cercle, et un point M′ variable sur le cercle, montrer que l'étude précédente permet de déterminer la plus grande et la plus petite valeur de $M'A' + 2 \cdot M'B'$.

1° *Étude de la fonction f.*

On a :

$$\overline{MA} = \overline{OA} - \overline{OM} = -3 - x$$

et

$$\overline{MB} = \overline{OB} - \overline{OM} = 3 - x$$

D'où :

$$f(x) = |3 + x| + 2 \cdot |3 - x|$$

ou

$$f(x) = |x + 3| + 2 \cdot |x - 3|$$

On construit alors facilement le tableau suivant :

x	$-\infty$		-3		3		$+\infty$
$\|x+3\|$		$-x-3$	0	$x+3$	6	$x+3$	
$\|x-3\|$		$-x+3$	6	$-x+3$	0	$x-3$	
$f(x)$		$-3x+3$	12	$-x+9$	6	$3x-3$	

Ainsi la fonction f est définie par :

$$f: \quad \begin{aligned} x < -3 &\longrightarrow f(x) = -3(x-1) \\ x = -3 &\longrightarrow f(-3) = 12 \\ -3 < x < 3 &\longrightarrow f(x) = -x+9 \\ x = 3 &\longrightarrow f(3) = 6 \\ x > 3 &\longrightarrow f(x) = 3(x-1) \end{aligned}$$

Fig. 1007 a.

La représentation graphique est alors évidente (fig. 1007 a).

2° *Étude des rapports* $\frac{f(x)}{MI}$ et $\frac{f(x)}{MJ}$

On a :

$$\overline{MI} = 1 - x \qquad \text{et} \qquad MI = |1 - x|$$

$$\overline{MJ} = 9 - x \qquad \text{et} \qquad MJ = |9 - x|$$

Si x appartient à l'intervalle $]-\infty; -3]$; $MI = |1 - x| = 1 - x$.
Si x appartient à l'intervalle $[-3; +3]$, $MJ = 9 - x$.
Si x appartient à l'intervalle $[3; +\infty[$, $MI = |1 - x| = x -$

D'où :

$$x \in]-\infty; -3] : \quad \frac{f(x)}{MI} = \frac{-3(x-1)}{1-x} = 3$$

$$x \in [-3; +3] : \quad \frac{f(x)}{MJ} = \frac{-x+9}{9-x} = 1$$

$$x \in [3; +\infty[: \quad \frac{f(x)}{MI} = \frac{3(x-1)}{x-1} = 3$$

Donc : *l'un des rapports* $\frac{f(x)}{MI}$ ou $\frac{f(x)}{MJ}$ *est constant.*

3° *Étude des fonctions* f_1 et f_2.

a) *Étude de* f_1.

On a :

$x \in]-\infty; -3[$: $f_1(x) = \frac{f(x)}{MI} = 3$

$x = -3$: $f_1(-3) = 3$

$x \in]-3; +1[$: $f_1(x) = \frac{9-x}{1-x} = \frac{x-9}{x-1}$ (fonction homographique)

$x = 1$: $f_1(x)$ n'existe pas.

$x \in]1; 3[$: $f_1(x) = \frac{9-x}{x-1}$ (fonction homographique)

$x = 3$: $f_1(3) = 3$

$x \in]3; +\infty[$: $f_1(x) = 3$.

La représentation graphique est alors évidente (fig. 1007 *b*).

b) *Étude de* f_2.

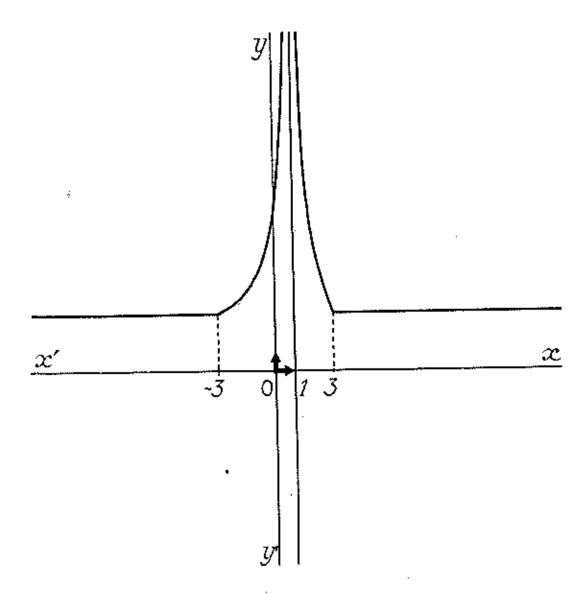


Fig. 1007 b.

On a :

$x \in]-\infty\,;\,-3[\ :\quad f_2(x) = \dfrac{f(x)}{\text{MJ}} = \dfrac{-3(x-1)}{9-x} = \dfrac{3(x-1)}{x-9}$ (fonction homographique)

$x = -3\ :\quad f_2(-3) = 1$

$x \in]-3\,;\,+3[\ :\quad f_2(x) = 1$

$x = +3\ :\quad f_2(x) = 1$

$x \in]3\,;\,9[\ :\quad f_2(x) = \dfrac{3(x-1)}{9-x}$ (fonction homographique)

$x = 9\ :\quad f_2(9)$ n'existe pas.

$x \in]9\,;\,+\infty[\ :\quad f_2(x) = \dfrac{3(x-1)}{x-9}$ (fonction homographique)

La représentation graphique est alors évidente (fig. 1007 *c*).

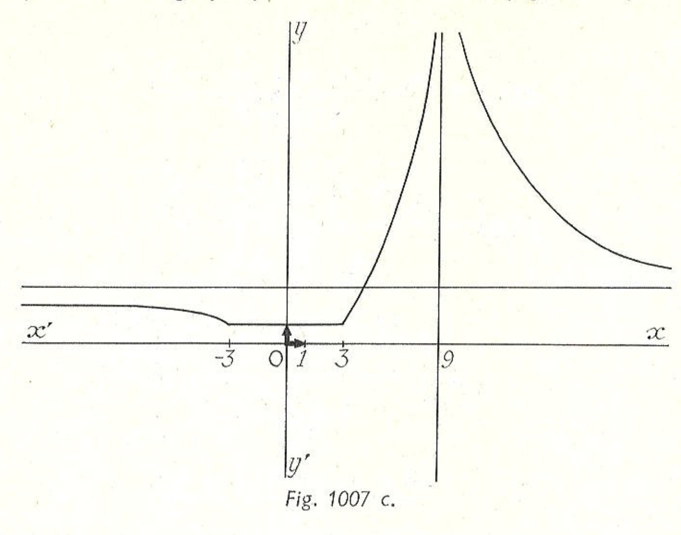


Fig. 1007 c.

4° *Calcul de* g(x).

On a immédiatement (fig. 1007 *d*) :

$$MS^2 = OS^2 + OM^2$$
$$= x^2 + h^2$$

et

$$g(x) = \frac{f(x)}{\sqrt{x^2 + h^2}} \qquad (1007 ; 1)$$

Si $h = 3$:

$$g(x) = \frac{f(x)}{\sqrt{x^2 + 9}} \qquad (1007 ; 2)$$

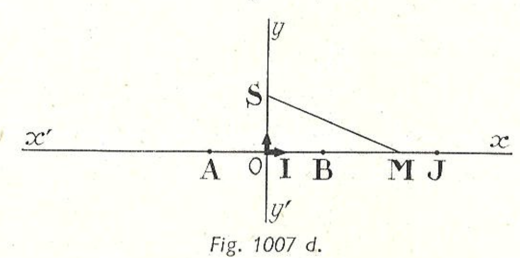


Fig. 1007 d.

Lorsque M_1 et M_2 sont conjugués harmoniques par rapport à A et B, la relation de Newton est :

$$\overline{OM_1} \cdot \overline{OM_2} = OA^2$$

ou

$$x_1 \cdot x_2 = 9$$

D'où :

$$g(x_1) = \frac{|x_1 + 3| + 2 \cdot |x_1 - 3|}{\sqrt{x_1^2 + 9}}$$

et

$$g(x_2) = \frac{\left|\frac{9}{x_1} + 3\right| + 2\left|\frac{9}{x_1} - 3\right|}{\sqrt{\frac{81}{x_1^2} + 9}}$$

$$= \frac{3 \cdot \left|\frac{3 + x_1}{x_1}\right| + 6 \cdot \left|\frac{3 - x_1}{x_1}\right|}{3\sqrt{\frac{9 + x_1^2}{x_1^2}}}$$

$$= \frac{\frac{|3 + x_1| + 2|3 - x_1|}{|x_1|}}{\frac{\sqrt{9 + x_1^2}}{|x_1|}}$$

$$= \frac{|x_1 + 3| + 2|x_1 - 3|}{\sqrt{x_1^2 + 9}}$$

Donc :

$$g(x_1) = g(x_2)$$

Ici $h = 3$ (fig. 1007 e); le faisceau (SA; SB; SM_1; SM_2) est harmonique; les rayons SA et SB sont orthogonaux; donc ils bissectent SM_1 et SM_2.

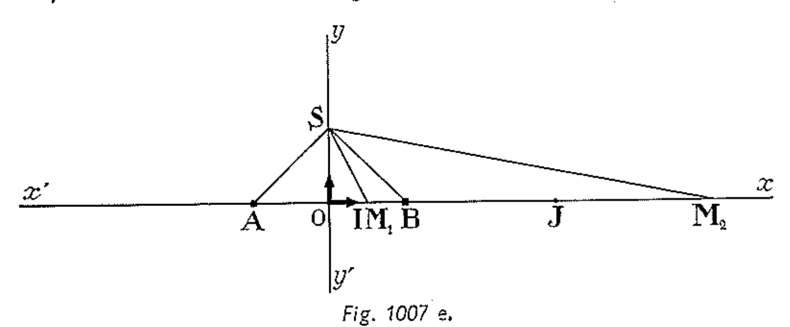


Fig. 1007 e.

Par suite :

$$\frac{\overline{AM_1}}{\overline{AM_2}} = \frac{\overline{SM_1}}{\overline{SM_2}} \qquad \text{et} \qquad \frac{\overline{BM_1}}{\overline{BM_2}} = -\frac{\overline{SM_1}}{\overline{SM_2}}$$

ce qui implique :

$$\frac{AM_1}{SM_1} = \frac{AM_2}{SM_2} \qquad \text{et} \qquad \frac{BM_1}{SM_1} = \frac{BM_2}{SM_2}$$

et encore

$$\frac{AM_1 + 2 \cdot BM_1}{SM_1} = \frac{AM_2 + 2 \cdot BM_2}{SM_2}$$

ou

$$g(x_1) = g(x_2)$$

5° *Étude des rapports* $\frac{g(x)}{M'I'}$ et $\frac{g(x)}{M'J'}$

L'inversion considérée inv (S ; h^2) transforme $x'Ox$ en le cercle C de diamètre OS (fig. 1007 *f*).

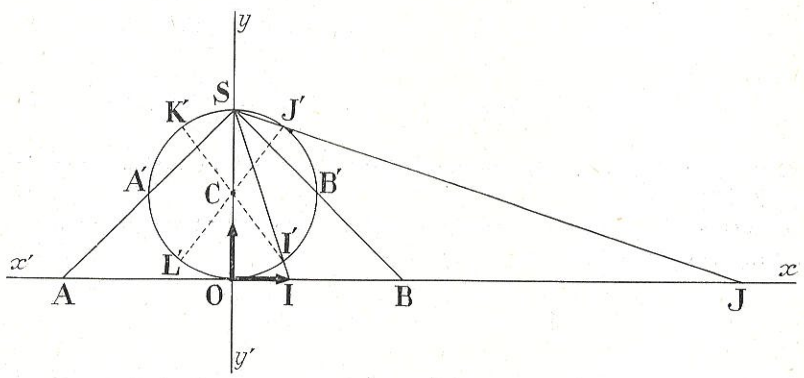


Fig. 1007 f.

On a :

$$M'I' = \frac{h^2}{SM \cdot SI} \cdot MI = \frac{h^2}{\sqrt{h^2 + 1}} \cdot \frac{MI}{SM}$$

$$M'J' = \frac{h^2}{SM \cdot SJ} \cdot MJ = \frac{h^2}{\sqrt{h^2 + 81}} \cdot \frac{MJ}{SM}$$

D'où :

$$\frac{g(x)}{M'I'} = \frac{f(x)}{MS} \cdot \frac{\sqrt{h^2 + 1}}{h^2} \cdot \frac{SM}{MI}$$

$$= \frac{\sqrt{h^2 + 1}}{h^2} \cdot \frac{f(x)}{MI}$$

et

$$\frac{g(x)}{M'J'} = \frac{f(x)}{MS} \cdot \frac{\sqrt{h^2 + 81}}{h^2} \cdot \frac{SM}{MJ}$$

$$= \frac{\sqrt{h^2 + 81}}{h^2} \cdot \frac{f(x)}{MJ}$$

Par suite :

si $x \notin [-3 ; +3]$; $\frac{f(x)}{MI} = 3$ et $\frac{g(x)}{M'I'} = 3 \frac{\sqrt{h^2 + 1}}{h^2}$

si $x \in [-3 ; +3]$; $\frac{f(x)}{MI} = 1$ et $\frac{g(x)}{M'J'} = \frac{\sqrt{h^2 + 81}}{h^2}$.

6° *Étude de la fonction g.*

Dans le cas où $h = 3$, la fonction $g : x \longrightarrow g(x)$ est définie par

$$g : \quad x \notin [-3 ; +3] \longrightarrow g(x) = \frac{\sqrt{10}}{3} \cdot M'I'$$

$$x \in [-3 ; +3] \longrightarrow g(x) = \frac{\sqrt{10}}{3} \cdot M'J'.$$

Les variations de la fonction g se déduisent donc des variations de M′I′ ou de M′J′.

Si $x \in [-3; +3]$, M′I′ est maximum lorsque M′ est en K′ diamétralement opposé à I′. Alors $M'I' = 3$ et,

$$g(x) = \frac{\sqrt{10}}{3} \times 3 = \sqrt{10}$$

K′ est l'image d'un point K de $x'Ox$; dans le triangle ISK rectangle en S, on a :

$$\overline{OI} \cdot \overline{OK} = -OS^2$$

et par suite

$$OK = -9.$$

Si $x \in [-3; +3]$, M′J′ est maximum lorsque M′ est en L′ diamétralement opposé à J′. Alors $M'J' = 3$ et

$$g(x) = \frac{\sqrt{10}}{3} \times 3 = \sqrt{10}$$

L′ est l'image d'un point L de $x'Ox$; dans le triangle LSJ rectangle en S, on a :

$$\overline{OL} \cdot \overline{OJ} = -OS^2$$

et par suite

$$OL = -1$$

Le tableau suivant résume alors les variations de la fonction g.

x	$-\infty$	-9	-3	-1	3	$+\infty$
Position de M	$-\infty$	K	A	L	B	$+\infty$
Position de M′	S	K′	A′	L′	B′	S
$g(x)$	3 ↗	$\sqrt{10}$ ↘	$\frac{6\sqrt{5}}{5}$ ↗	$\sqrt{10}$ ↘	$\frac{6\sqrt{5}}{5}$ ↗	3

7° *Maximum et minimum de $M'A' + 2 \cdot M'B'$.*

Le diamètre perpendiculaire à A′B′ coupe le cercle (C) en S et O; on pose $OS = h$. L'inversion de centre S et de puissance h^2, transforme C en la droite D tangente en O à C. Les transformés de A′, B′, M′ sont A, B, M; et on a :

$$M'A' = \frac{h^2}{SA \cdot SM} \cdot MA$$

$$M'B' = \frac{h^2}{SB \cdot SM} \cdot MB = \frac{h^2}{SA \cdot SM} \cdot MB$$

D'où :

$$M'A' + 2 \cdot M'B' = \frac{h^2}{SA \cdot SM} \cdot (MA + 2 \cdot MB)$$

$$= \frac{h^2}{\sqrt{h^2 + 9}} \cdot \frac{MA + 2 \cdot MB}{MS}$$

$$= \frac{h^2}{\sqrt{h^2 + 9}} \cdot g(x).$$

Le maximum et le minimum de $M'A' + 2 \cdot M'B'$ correspondent aux maximum et minimum de $g(x)$.

Lorsque $h = 3$, on a

$$M'A' + 2 \cdot M'B' = \frac{3\sqrt{2}}{2} \cdot g(x).$$

et on obtient facilement le maximum :

$$\mu = \frac{3\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{10} = 3\sqrt{5}$$

et le minimum :

$$\mu' = \frac{3\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{6\sqrt{5}}{5} = \frac{9\sqrt{10}}{5}$$

1008. Problème 4.

Le plan affine projectif est rapporté à deux axes x'Ox et y'Oy. On considère les droites Δ et D ayant respectivement pour équations x = a et x = 2 a.

Soit un point M quelconque du plan; la droite OM coupe D en m.

A ce point M on fait correspondre le point M' de la droite OM, conjugué harmonique de M par rapport à O et m. On définit ainsi une transformation f du plan.

$$f : \qquad M \longrightarrow f(M) = M'.$$

1° Quels sont les points doubles de f? Quelle est l'image de la droite Δ?

2° Si le point M a pour coordonnées (x; y) et si le point M' a pour coordonnées (x'; y'), donner les expressions de x' et y' en fonction de x et y; et les expressions de x et y en fonction de x' et y'.

3° Montrer, analytiquement et géométriquement, que l'image d'une droite δ est une droite δ'. Montrer qu'en général δ et δ' coupent la droite y'Oy en deux points symétriques par rapport à O. Quel est le cas d'exception?

4° Trouver, géométriquement et analytiquement, l'image d'une bande (δ; δ_1) l'image de l'ensemble de deux droites (δ; δ_1) se coupant sur la droite Δ.

5° Soient, sur la droite δ, trois points A, B, Ω, Ω étant le milieu du segment AB. Montrer que l'image du quaterne harmonique (A, B; Ω, ∞) est un quaterne harmonique.

1° *Points doubles de f.* Image de Δ.

Si M est sur D, le point M' conjugué de M, est confondu avec M. Donc :

La droite D est une droite de points doubles.

Si M appartient à Δ, M partage $\overrightarrow{Om}$ dans le rapport $\lambda = -1$; le point M' partage $\overrightarrow{Om}$ dans le rapport $\mu = +1$; M' est donc le point à l'infini de la droite OM. Donc :

L'image de la droite Δ par f est la droite de l'infini du plan projectif.

2° *Formules de la transformation* f.

Le coefficient angulaire de la droite OM est $\frac{y}{x}$, et par suite l'équation de cette droite est $Y = \frac{y}{x} X$.

Le point m a pour abscisse $X = 2a$, et son ordonnée est $Y = \frac{y}{x} \cdot 2a$.

$$m \left| \begin{array}{l} 2a \\ \dfrac{2ay}{x} \end{array} \right.$$

Le quaterne harmonique $(O, m; M, M')$ se projette sur $x'Ox$ suivant un quaterne harmonique $(O, m_1; M_1, M'_1)$.

Et :

$$\frac{2}{\overline{Om_1}} = \frac{1}{\overline{OM_1}} + \frac{1}{\overline{OM'_1}}$$

ou

$$\frac{2}{2a} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x'}$$

ou

$$\frac{1}{x'} = \frac{1}{a} - \frac{1}{x}$$

$$= \frac{x - a}{ax}$$

et

$$x' = \frac{ax}{x - a} \quad (1008;\ 1)$$

Fig. 1008 *a*.

Le quaterne harmonique $(O, m; M, M')$ se projette sur $y'Oy$ suivant un quaterne harmonique $(O, m_2; M_2, M'_2)$.

Et :

$$\frac{2}{\overline{Om_2}} = \frac{1}{\overline{OM_2}} + \frac{1}{\overline{OM'_2}}$$

ou

$$\frac{2x}{2ay} = \frac{1}{y} + \frac{1}{y'}$$

ou

$$\frac{1}{y'} = \frac{x}{ay} - \frac{1}{y}$$
$$= \frac{1}{y}\left(\frac{x}{a} - 1\right)$$
$$= \frac{1}{y} \cdot \frac{x - a}{a}$$

et

$$y' = \frac{ay}{x - a} \qquad (1008 ; 2)$$

La transformation f est involutive, car l'image de M' est M. Donc :

$$\begin{cases} x = \dfrac{ax'}{x' - a} & (1008 ; 3) \\ y = \dfrac{ay'}{x' - a} & (1008 ; 4) \end{cases}$$

3° *Image d'une droite δ.*

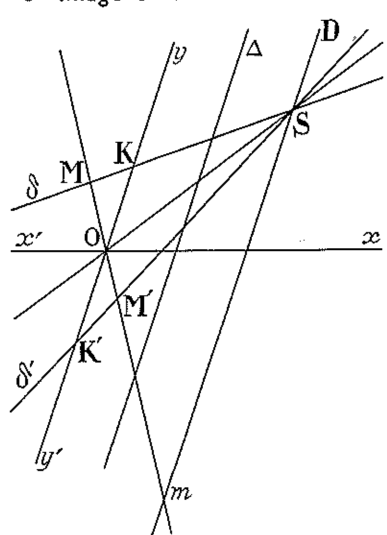


Fig. 1008 b.

a) *La droite δ coupe D en S* (SO; D; SM; SM') est un faisceau harmonique (fig. 1008 *b*). Par suite si le point M décrit la droite δ, le point M' décrit la droite δ', passant par S, et rayon conjugué de δ par rapport à SO et D.

Donc :

L'image de δ est la droite δ'.

Si on coupe le faisceau harmonique par $y'Oy$ parallèle à D, on obtient les points K, K', O et O est le milieu du segment KK'.

K et K' sont symétriques pour O.

On peut retrouver analytiquement les résultats précédents.

Si la droite δ a pour équation

$$ux + v + r = 0 \qquad (v \neq 0)$$

l'image $\delta' = f(\delta)$ a pour équation

$$u \cdot \frac{ax'}{x' - a} + v \cdot \frac{ay'}{x' - a} + r = 0$$

ou $$aux' + avy' + r(x' - a) = 0$$

ou $$(au + r)x' + avy' - ar = 0.$$

L'équation de δ peut donc s'écrire :

$$(au + r)x + av.y = ar \qquad (1008\,;5)$$

$f(\delta)$ est donc une droite.

De plus, δ coupe $y'Oy$ en K; les coordonnées de K sont

$$K\left(x = 0\,;\, y = -\frac{r}{v}\right)$$

δ' coupe $y'Oy$ en K'; les coordonnées de K' sont

$$K'\left(x = 0\,;\, y = \frac{r}{v}\right)$$

Donc K et K' sont symétriques pour le point O.

b) *La droite δ est parallèle à D.* Si le point M décrit la droite δ, le point M' décrit la droite δ', rayon conjugué de δ par rapport aux droites $y'Oy$ et D (fig. 1008 *c*).

Analytiquement, l'équation de δ est $x = \lambda$; l'équation de δ' est alors

$$\frac{ax'}{x' - a} = \lambda$$

ou

$$x' = \frac{a\lambda}{\lambda - a}$$

δ' est donc une droite parallèle à $y'Oy$. δ' est conjugué de δ par rapport à $y'Oy$ et D.

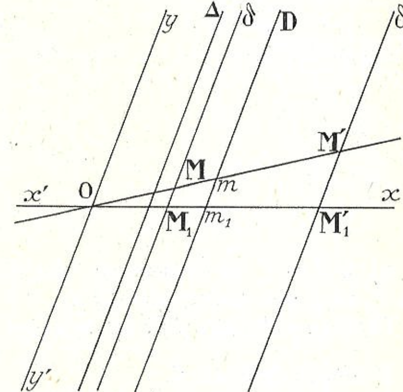


Fig. 1008 c.

4° *Image de* $(\delta;\, \delta_1)$.

a) *Si δ et δ_1 sont parallèles*, elles se coupent en un point de la droite de l'infini (fig. 1008 *d*); leurs images δ' et δ'_1 se coupent donc au point de Δ image du point à l'infini.

Si δ coupe D en S, S étant un point double, δ' est la droite IS; de même δ'_1 est la droite IS_1.

Ainsi : $$f(\delta;\, \delta_1) = (\delta';\, \delta'_1).$$

Analytiquement, on a :

$$\delta : \quad ux + vy + r = 0 \qquad \delta_1 : \quad ux + vy + r_1 = 0.$$

D'où :

$$\delta' : (au + r)\,x + avy = ar \qquad \delta'_1 : (au + r_1)\,x + avy = ar_1.$$

Les droites δ' et δ'_1 se coupent en un point dont les coordonnées sont données par le système

$$\begin{cases} (au + r)\,x + avy = ar \\ (au + r_1)\,x + avy = ar_1 \end{cases}$$

D'où :

$$(r - r_1)\cdot x = a\,(r - r_1)$$

r étant différent de r_1 (car $\delta \neq \delta_1$), on a $x = a$: δ' et δ'_1 se coupent dont sur Δ.

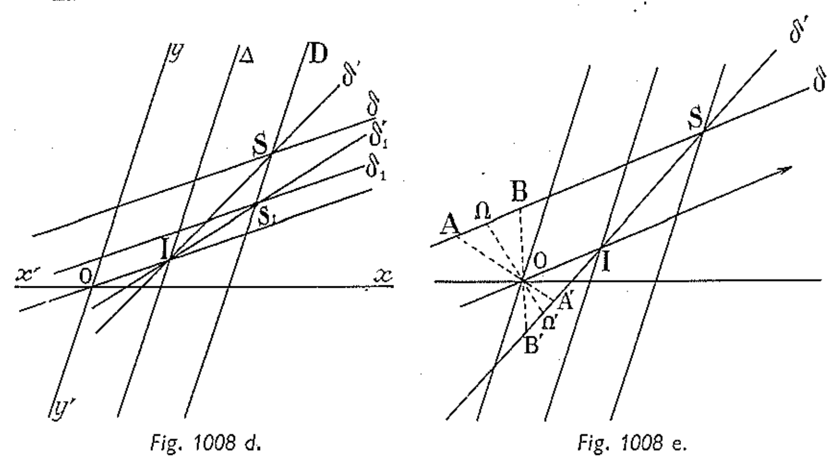


Fig. 1008 d. *Fig. 1008 e.*

b) *Si δ et δ_1 se coupent en I sur Δ*, f étant involutive, leurs images δ' et δ'_1 sont des droites parallèles.

D'ailleurs l'image de I est le point à l'infini de la direction δ.

5° *Image de A, Ω, B.*

Les trois points A, Ω, B de δ, ont pour images les points A'; Ω'; B' de δ' (fig. 1008 e). Le point à l'infini de δ, a pour image le point I de Δ.

Le faisceau (OA; OB; OΩ; OI) est harmonique; donc (A', B'; Ω', I) est un quaterne harmonique.

1009. Problème 5.

On considère un demi-cercle C de diamètre AB = 2 a. Un point M décrit le segment AB. On trace à l'intérieur de C, les demi-cercles C_1 et C_2 de diamètres MA et MB. Soit la tangente commune extérieure, α et β étant les points de contact respectivement.

1° Démontrer que les droites $A\alpha$ et $B\beta$ se coupent en un point P situé sur C. Ω étant le milieu du segment $\alpha\beta$, quelle est la transformation qui permet de passer de P à Ω?

2° On trace le cercle γ de diamètre PM qui coupe C en P et R. Démontrer que les droites PR et $\alpha\beta$ se coupent sur la droite AB.

3° On trace le cercle Γ de centre P et de rayon PM. Quel est l'axe radical des cercles C et Γ.

1° *Point d'intersection des droites $A\alpha$ et $B\beta$.*

Soit Ω le milieu du segment $\alpha\beta$. Ω appartient à l'axe radical de C_1 et C_2 (fig. 1009 *a*).

$$\Omega\alpha = \Omega\beta = \Omega M.$$

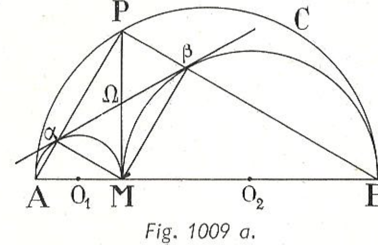


Fig. 1009 a.

Donc :

$$\text{angle } \alpha M\beta = 90°.$$

De même :

$$\text{angle } M\alpha A = \text{angle } M\beta B = 90°.$$

Si P est l'intersection de $A\alpha$ et $B\beta$, le quadrilatère $M\alpha P\beta$ est un rectangle; l'angle APB est droit et *P appartient au cercle C.*

De plus ΩM est une diagonale et passe par P; MP est donc perpendiculaire à AB; et on a :

$$\overrightarrow{M\Omega} = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{MP}$$

Donc :

Ω se déduit de P par l'affinité orthogonale de support AB et de rapport $\frac{1}{2}$.

2° *Point d'intersection des droites PR et $\alpha\beta$.*

La droite $\alpha\beta$ coupe AB en S (fig. 1009 *b*). S est le centre d'homothétie positive de C_1 et C_2; c'est donc aussi un centre d'inversion de C_1 et C_2; cette inversion est inv(S; SM^2).

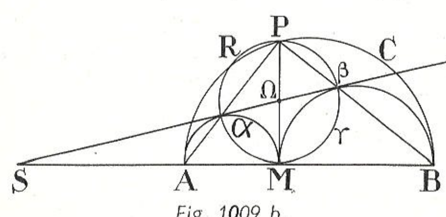


Fig. 1009 b.

A et B sont inverses; α et β sont inverses; d'où :

$$\overline{SA} \cdot \overline{SB} = \overline{S\alpha} \cdot \overline{S\beta} = \overline{SM}^2$$

Le cercle γ passe par α et β; donc :

$$\overline{S_\gamma} = \overline{S\alpha} \cdot \overline{S\beta}$$

et

$$\overline{S_C} = \overline{SA} \cdot \overline{SB}$$

Par suite :

$$\overline{S_\gamma} = \overline{S_C}$$

et S appartient à l'axe radical de C et γ, ou S appartient à la droite PR.

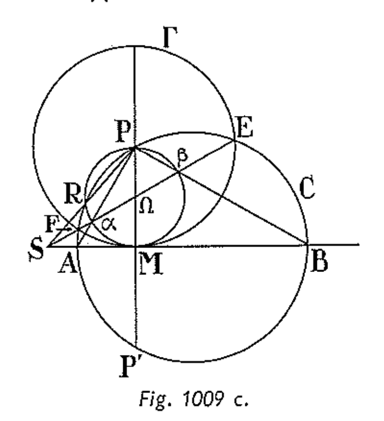


Fig. 1009 c.

Ainsi :

Les droites AB, $\alpha\beta$, PR concourent en S.

3° *Axe radical de C et Γ.*

On a (fig. 1009 c) :

$$\overline{S_C} = \overline{SA} \cdot \overline{SB}$$

et

$$\overline{S_\Gamma} = \overline{SM}^2$$

Par suite :

$$\overline{S_C} = \overline{S_\Gamma}$$

et S appartient à l'axe radical EF de C et Γ.

D'autre part :

$$\begin{aligned}\overline{\Omega_C} &= \overline{\Omega P} \cdot \overline{\Omega P'} \\ &= -\ \overline{\Omega M} \cdot 3\,\overline{\Omega M} \\ &= -\ 3\,\overline{\Omega M}^2\end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}\overline{\Omega_\Gamma} &= \Omega M^2 - PM^2 \\ &= \Omega M^2 - 4 \cdot \Omega M^2 \\ &= -\ 3 \cdot \overline{\Omega M}^2\end{aligned}$$

Par suite :

$$\overline{\Omega_C} = \overline{\Omega_\Gamma}$$

et Ω appartient à l'axe radical EF de C et Γ.

Ainsi :

L'axe radical de C et Γ est la droite $S\Omega$; elle passe par α, β, E, F.

1010. Problème 6.

Soient un triangle ABC et sa médiane AA'. Sur les côtés AB et AC, à l'extérieur du triangle, on construit les carrés $AB\beta_1\beta$ ***et*** $AC\gamma_1\gamma$, ***et le parallélogramme*** $A\gamma H\beta$ (fig. 1010 *a*)

1° ***Montrer que*** $\beta\gamma = 2\cdot AA'$, ***et que les droites*** $\beta\gamma$ ***et*** AA' ***sont perpendiculaires.***

2° ***Montrer que*** $AH = BC$, ***et que les droites AH et BC sont perpendiculaires.***

3° ***Montrer que*** $B\gamma_1 = CH$, ***et que les droites*** $B\gamma_1$ ***et CH sont perpendiculaires.***

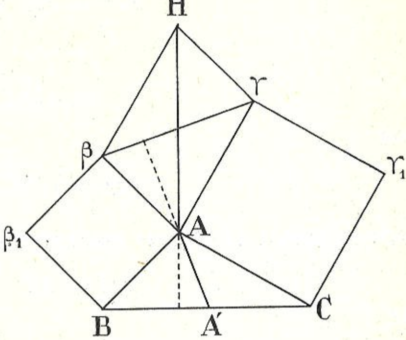


Fig. 1010 a.

Ce problème est un problème de géométrie plane; il est particulièrement intéressant de le considérer comme un problème de la droite complexe C.

Le vecteur $\overrightarrow{A\gamma}$ se déduit de $\overrightarrow{AC}$ par la rotation rot $\left(A;+\frac{\pi}{2}\right)$, dont l'opérateur complexe est i; donc :

$$\overrightarrow{A\gamma} = i\cdot\overrightarrow{AC}$$

Le vecteur $\overrightarrow{A\beta}$ se déduit de $\overrightarrow{AB}$ par la rotation rot $\left(A;-\frac{\pi}{2}\right)$, dont l'opérateur complexe est $-i$; donc :

$$\overrightarrow{A\beta} = -i\cdot\overrightarrow{AB}$$

1° On a :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\beta\gamma} &= \overrightarrow{A\gamma} - \overrightarrow{A\beta}\\ &= i\cdot\overrightarrow{AC} + i\cdot\overrightarrow{AB}\\ &= i\left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}\right)\end{aligned}$$

ou

$$\overrightarrow{\beta\gamma} = i\cdot 2\,\overrightarrow{AA'}$$

Donc :

$\overrightarrow{\beta\gamma}$ se déduit de $2\,\overrightarrow{AA'}$ par une rotation d'angle $+\frac{\pi}{2}$. Autrement dit :

$$\beta\gamma = 2\cdot AA'$$

et

$$\overrightarrow{\beta\gamma} \textit{ est orthogonal à } \overrightarrow{AA'}$$

2° De même :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AH} &= \overrightarrow{A\beta} + \overrightarrow{A\gamma}\\ &= -i\cdot\overrightarrow{AB} + i\cdot\overrightarrow{AC}\\ &= i\left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right)\end{aligned}$$

ou

$$\overrightarrow{AH} = i\cdot\overrightarrow{BC}$$

$\overrightarrow{AH}$ se déduit de $\overrightarrow{BC}$ par une rotation d'angle $+\frac{\pi}{2}$. Autrement dit :

$$AH = BC$$

et

$$\overrightarrow{AH} \textit{ est orthogonal à } \overrightarrow{BC}.$$

3° On a encore :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{B\gamma_1} &= \overrightarrow{A\gamma_1} - \overrightarrow{AB}\\ &= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{A\gamma} - \overrightarrow{AB}\\ &= \overrightarrow{AC} + i\cdot\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CH} &= \overrightarrow{AH} - \overrightarrow{AC}\\ &= \overrightarrow{A\gamma} + \overrightarrow{A\beta} - \overrightarrow{AC}\\ &= i\cdot\overrightarrow{AC} - i\,\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\\ &= i\cdot\overrightarrow{AC} - i\,\overrightarrow{AB} + i^2\cdot\overrightarrow{AC}\\ &= i\left(\overrightarrow{AC} + i\,\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right)\end{aligned}$$

De ces résultats, on déduit :

$$\overrightarrow{CH} = i\cdot\overrightarrow{B\gamma_1}$$

Donc :

$\overrightarrow{CH}$ se déduit de $\overrightarrow{B\gamma_1}$ par une rotation d'angle $+\frac{\pi}{2}$. Autrement dit :

$$CH = B\gamma_1$$

et

$$\overrightarrow{CH} \textit{ est orthogonal à } \overrightarrow{B\gamma_1}$$

EXERCICES ET PROBLÈMES SUR LE LIVRE VI

Mesure des angles. Trigonométrie.

1085. Construire les demi-droites Ox; Oy, Oz; Ot telles que :

$\overline{\text{angle}}\,(Ox;\,Oy) = 117^\circ$ $\quad$ $\overline{\text{angle}}\,(Ox;\,Oz) = -25^\circ$

$\overline{\text{angle}}\,(Ot;\,Oz) = -34^\circ$

Calculer les angles :

$\overline{\text{angle}}\,(Ox;\,Oz)$ $\quad$ $\overline{\text{angle}}\,(Ox;\,Ot)$ $\quad$ $\overline{\text{angle}}\,(Oy;\,Ot)$

1086. Sur un cercle (C), sur lequel le point I est origine, marquer les points A, B, C, D tels que :

$\overline{\text{arc}}\,IA = 108^\circ$ $\quad$ $\overline{\text{arc}}\,IB = -27^\circ$ $\quad$ $\overline{\text{arc}}\,IC = 65^\circ$ $\quad$ $\overline{\text{arc}}\,ID = 131^\circ$.

Calculer : $\overline{\text{arc}}\,AB$; $\overline{\text{arc}}\,AC$; $\overline{\text{arc}}\,BD$; $\overline{\text{arc}}\,CD$.

1087. Sur le cercle trigonométrique (U) d'origine I, marquer les points extrémités des arcs définis par la formule :

$\alpha = 35^\circ + k \cdot 72^\circ$ $\quad (k \in Z)$

$\beta = -40^\circ + k \cdot 60^\circ$ $\quad (k \in Z)$

$\gamma = -28^\circ + k \cdot 36^\circ$ $\quad (k \in Z)$

1088. Soit l'angle $(Ox;\,Oy)$ tel que :

$\overline{\text{angle}}\,(Ox;\,Oy) = \theta + k \cdot 2\pi$ $\quad (k' \in Z)$

Déterminer les demi-droites Ou telles que :

$\overline{\text{angle}}\,(Ox;\,Ou) = \overline{\text{angle}}\,(Ou;\,Oy) + k' \cdot 2\pi$ $\quad (k' \in Z)$

Que pensez-vous des demi-droites Ou ?

1089. Sur un cercle (C) on considère l'arc AB tel que :

$\overline{\text{arc}}\,AB = \theta + k \cdot 2\pi$ $\quad (k \in Z)$

Déterminer les points M du cercle tels que :

$\overline{\text{arc}}\,MA + \overline{\text{arc}}\,MB = k' \cdot \pi$ $\quad (k' \in Z)$

1090. Un plan est rapporté à une base orthonormée. Marquer le point $A(-2;\,-1)$.

Construire le vecteur $\overrightarrow{AB}$ de longueur 2 et tel que $\overline{\text{angle}}\,(Oy;\,\overrightarrow{AB}) = -30^\circ$, puis le vecteur $\overrightarrow{BC}$ de longueur 2 et tel que $\overline{\text{angle}}\,(\overrightarrow{BA};\,\overrightarrow{BC}) = 120^\circ$.

Sachant que $\overline{\text{angle}}\,(Ox;\,Oy) = 90^\circ$, calculer $\overline{\text{angle}}\,(Ox;\,\overrightarrow{BC})$.

1091. Quelle est la détermination principale de l'arc de 3326° ?

1092. Calculer la détermination principale de l'angle de -3357 grades.

1093. Quelle est la détermination principale de l'arc de -3327° ?

1094. Calculer x sachant que $3x = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi$.

1095. Déterminer x si $5x = \frac{4\pi}{3} + k\pi$.

1096. Résoudre l'équation

$$3x - \frac{\pi}{2} = 6x + \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi.$$

1097. Résoudre l'équation

$$x + \frac{2\pi}{3} = 5x - \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi.$$

1098. Marquer les demi-droites ayant pour angle polaire l'angle θ déterminé par

$$\theta = \frac{\pi}{3} + k \cdot \frac{2\pi}{3}.$$

1099. Déterminer les demi-droites définies par leur angle polaire θ :

$$\frac{\pi}{2} - \theta = \pm \left(3\theta - \frac{\pi}{3}\right) + k \cdot 2\pi.$$

1100. On sait qu'un angle aigu α a pour tangente $\operatorname{tg} \alpha = \frac{5}{12}$. Calculer $\cos \alpha$, $\sin \alpha$ et $\operatorname{cotg} \alpha$.

1101. On donne $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{3}{2}\left(-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0\right)$. Calculer $\cos \alpha$, $\sin \alpha$, $\operatorname{cotg} \alpha$.

1102. Soit $\operatorname{tg} \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Calculer $\sin \theta$ et $\cos \theta$.

1103. On donne $\sin \theta = \frac{1}{3}\left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$. Calculer $\operatorname{tg} \theta$ et $\cos \theta$.

1104. Soit $\sin \alpha = -0{,}72$ $(-90^\circ < \alpha < 0)$. Calculer $\cos \alpha$ et $\operatorname{tg} \alpha$.

1105. Un angle α a pour sinus $\frac{2\sqrt{2}}{5}$. Calculer $\cos \alpha$ et $\operatorname{tg} \alpha$.

1106. On donne $\cos \theta = \frac{3}{4}$. Calculer $\sin \theta$ et $\operatorname{tg} \theta$.

Simplifier les expressions trigonométriques suivantes :

1107. $\operatorname{tg} \theta . \cos \theta$ $\quad \sin x . \operatorname{cotg} x$ $\quad \sin^3 a + \sin a \cos^2 . a$.

1108. $\frac{\cos\theta}{\operatorname{cotg}\theta} \frac{\operatorname{tg}\theta}{\sin\theta} \frac{1}{\cos^2 x} - 1$.

1109. $\sqrt{1 + \sin\theta} \cdot \sqrt{1 - \sin\theta}$ $\quad \sin^4 a - \cos^4 a$.

1110. $\cos\theta + \sin\theta \cdot \operatorname{tg}\theta$ $\quad \sqrt{1 - \cos\varphi} \cdot \sqrt{1 + \cos\varphi}$.

1111. $\sin\theta \cdot \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\theta}$ $\quad \sin\varphi \cdot \sqrt{1 + \operatorname{cotg}^2\varphi}$.

1112. $\frac{1 + \operatorname{tg}^2\theta}{1 + \operatorname{cotg}^2\theta}$.

A, B, C désignant les angles d'un triangle, calculer la valeur des expressions suivantes :

1113. $\sin \frac{A}{2} - \cos \frac{B+C}{2}$.

1114. $\operatorname{tg} \frac{A}{2} - \operatorname{cotg} \frac{B+C}{2}$.

1115. $\operatorname{tg} \frac{A}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{B+C}{2}$.

1116. $\sin^2 \frac{A}{2} + \sin^2 \frac{B+C}{2}$.

1117. $\sin \frac{A+B}{2} - \cos \frac{A+B}{2} + \sin \frac{C}{2} - \cos \frac{C}{2}$.

1118. $\sin^2 \frac{B}{2} + \sin^2 \frac{C+A}{2} + \operatorname{tg} \frac{A}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{B+C}{2}$.

Calculer et simplifier les fonctions trigonométriques suivantes :

1119. $\sin x - \sin x.\cos^2 x$ $\quad \cos^2 \theta + \cos^2 \theta.\operatorname{tg}^2 \theta$.

1120. $\sin^2 a \cos a + \cos^3 a$ $\quad (\sin x + \cos x)^2 + (\sin x - \cos x)^3$.

1121. $\cos \theta \cdot \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \theta}$ $\quad \operatorname{tg} \theta \cdot \sqrt{1 + \operatorname{cotg}^2 \theta}$.

1122. $\frac{\operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$ $\quad 1 - \frac{1}{\sin^2 x}$ $\quad \frac{1 - \sin^2 \theta}{\sin \theta \cdot \cos \theta}$.

1123. $\frac{\sin^2 x - \sin^4 x}{\cos^2 x - \cos^3 x}$ $\quad \frac{1}{1 + \sin \theta} + \frac{1}{1 - \sin \theta}$.

1124. $\frac{\sin^2 \theta - \cos^2 \theta}{\sin^4 \theta - \cos^4 \theta}$ $\quad \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 a} + \frac{1}{1 + \operatorname{cotg}^2 a}$.

1125. $\frac{\sin^2 a - \cos^2 b}{\cos^2 a - \sin^2 b}$ $\quad \frac{\sin^2 a - \sin^2 b}{\cos^2 a - \cos^2 b}$.

Calculer les sinus, cosinus, tangente des angles suivants :

1126. 41°10′ 74°30′ 35°15′ 59°30′

1127. 81°45′ 47°26′ 50°28′ 68°57′

1128. 29°7′ 42°12′ 19°49′ 82°35′

1129. 41°12′ 44°15′ 67°30′ 68°51′

1130. 43°47′ 42°41′ 71°36′ 34°16′

Déterminer un angle aigu x connaissant :

1131. $\sin x = 0{,}7793$ $\quad \sin x = 0{,}2844$ $\quad \sin x = 0{,}9407$

1132. $\cos x = 0{,}8670$ $\quad \cos x = 0{,}9892$ $\quad \cos x = 0{,}5904$

1133. $\operatorname{tg} x = 0{,}9611$ $\quad \operatorname{tg} x = 0{,}3973$ $\quad \operatorname{tg} x = 0{,}8082$

1134. $\text{cotg}\, x = 0{,}8723$ $\qquad \text{cotg}\, x = 0{,}3706$ $\qquad \text{cotg}\, x = 0{,}6813$

1135. $\sin x = 0{,}1739$ $\qquad \sin x = 0{,}7832$ $\qquad \sin x = 0{,}2234$

1136. $\cos x = 0{,}2306$ $\qquad \cos x = 0{,}2080$ $\qquad \cos x = 0{,}4141$

1137. $\text{tg}\, x = 1{,}2334$ $\qquad \text{tg}\, x = 2{,}0732$ $\qquad \text{tg}\, x = 5$

1138. $\text{cotg}\, x = 2$ $\qquad \text{cotg}\, x = 3{,}0114$ $\qquad \text{cotg}\, x = 1{,}7312$

Résoudre les équations suivantes et marquer les extrémités des arcs solutions sur le cercle (U).

1139. $\cos x = \frac{1}{2}$; $\qquad \cos x = -\frac{1}{2}$.

1140. $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\qquad \sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

1141. $\text{tg}\, x = 1$; $\qquad \text{tg}\, x = -1$.

1142. $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\qquad \cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

1143. $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\qquad \sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

1144. $\text{tg}\, x = \sqrt{3}$; $\qquad \text{tg}\, x = -\sqrt{3}$.

1145. $\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$.

1146. $\text{tg}\, 2x = \sqrt{3}$.

1147. $\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{3\pi}{4} + 2x\right)$.

1148. $\cos\left(3x - \frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ avec $-\frac{\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{4}$.

1149. $\sin\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ avec $0 < x < 2\pi$.

1150. $\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$ avec $-\pi < x < \pi$.

1151. $\sin(2x + 59\pi) = \sin\left(\frac{45\pi}{2} - 3x\right)$.

1152. $\sin\left(3x + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{2\pi}{3} - x\right)$.

1153. $\sin\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$ $\qquad 0 \leqslant x \leqslant 2\pi$.

1154. $\cos(x + 45^\circ) = \cos(150^\circ - 2x)$ $\qquad 700^\circ < x < 900^\circ$

1155. $\sin 3x = \sin\left(x + \frac{2\pi}{3}\right)$.

1156. $\sin\left(3x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$.

1157. $\operatorname{tg}\left(5x + \frac{\pi}{6}\right) = 1 \qquad \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right)$.

1158. $\sin\left(\frac{2x}{3} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

1159. $\operatorname{tg} 2x = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - 3x\right)$.

1160. $\sin 5x = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 3x\right)$.

1161. $\sin 3x = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$.

1162. $\cos 3x = \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$.

1163. $\cos\frac{9x}{2} = \cos\left(\frac{3x}{2} + \frac{3\pi}{2}\right)$.

1164. $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right) = \operatorname{tg}\left(3x - \frac{\pi}{6}\right)$.

1165. $\operatorname{tg} 3x = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right)$.

1166. $\sin 3x = \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$.

1167. $\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6} + x\right)$.

1168. $\sin 2x + \cos 3x = 0$.

1169. $\sin 3x + \cos 2x = 0$.

1170. $\sin\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \qquad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{5\pi}{2}$.

1171. $\sin 2x - \cos x = 0$.

1172. $\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + \cos(3x + \pi) = 0$.

1173. $\sin 2x = \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$.

1174. $\sin\left(4x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$.

1175. $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{2} + 2x\right)$.

1176. $\operatorname{tg} 3x = \operatorname{cotg} 2x$.

1177. $\operatorname{tg}\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) = \operatorname{cotg}\frac{\pi}{5}$.

1178. $\cos^2 x - \cos x = 0$.

1179. $2\sin^2 x + 3\sin x - 2 = 0$.

1180. $4\cos^2 x - 3 = 0 \quad 0 < x < 360^\circ$.

1181. 1° Résoudre l'équation $\cos^2 x - \cos^2 \alpha = 0$.

2° Déterminer les valeurs du paramètre α pour lesquelles l'équation

$$x^2 - x\sqrt{2} - \cos\alpha = 0$$

admet une racine double.

1182. Résoudre $2\cos^2 x - 5\cos x + 1 = 0$ (x compris entre 200 et 400 grades).

1183. Dans quel intervalle faut-il choisir m pour que l'équation :

$$m\sin^2 x + 2\sin x - 2m = 0$$

admette, pour $\sin x$, une solution et une seule?

Quelle valeur faut-il attribuer à m pour que $x = 150^\circ$ soit solution de l'équation?

1184. Résoudre l'équation :

$$4\sin^2 x + 2(\sqrt{3} - 1)\sin x - \sqrt{3} = 0.$$

1185. Résoudre l'équation :

$$\operatorname{tg} x . \operatorname{tg} 5x = 1.$$

1186. 1° Discuter l'équation :

$$a\sin^2 x + (2a - 1)\sin x - 3a - 1 = 0.$$

2° Résoudre dans le cas particulier $a = -\frac{6}{7}$.

1187. Résoudre l'équation :

$$\operatorname{tg} 2x \cdot \operatorname{cotg}\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) = 0.$$

1188. Résoudre :

$$4\sin^2 x = 1.$$

1189. Soit l'équation $\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} 3x = m . \operatorname{tg} 2x \quad (m \in R)$.

1° Résoudre cette équation dans les deux cas particuliers suivants :

$$m = 0, \quad m = -1.$$

2° Montrer que dans le cas général cette équation se décompose en les deux suivantes :

$$\sin 2x = 0$$
$$2m\cos^2 2x + (m + 2)\cos 2x - m = 0.$$

3° Résoudre la première équation $\sin 2x = 0$.

4° Résoudre et discuter la seconde équation.

Simplifier les expressions suivantes :

1190. $\dfrac{\sin(a + b) + \sin(a + b)}{\cos(a + b) + \cos(a - b)} \quad \dfrac{\cos(a + b) - \cos(a - b)}{\sin(a + b) - \sin(a - b)}$.

1191. $\dfrac{\sin(a+b)-\sin(a-b)}{\sin(a+b)+\sin(a-b)}$ $\quad \dfrac{\cos(a+b)-\cos(a-b)}{\cos(a+b)+\cos(a-b)}$.

1192. Calculer les fonctions circulaires de $a+b$ et $a-b$ sachant que $\sin a = \frac{4}{5}$ et $\sin b = \frac{12}{13}$ dans les deux cas suivants :

1° a et b sont compris entre 0 et 90°;

2° $0 < a < 90° < b < 180°$.

Mettre sous forme d'un monôme :

1193. $\dfrac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b}$ $\quad \dfrac{\operatorname{cotg} a + \operatorname{cotg} b}{\operatorname{cotg} a - \operatorname{cotg} b}$.

1194. $\dfrac{1 + \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}$ $\quad \dfrac{1 + \operatorname{cotg} a \cdot \operatorname{cotg} b}{1 - \operatorname{cotg} a \cdot \operatorname{cotg} b}$.

1195. Démontrer la formule :

$$\operatorname{cotg} 2a = \frac{\operatorname{cotg}^2 a - 1}{2 \operatorname{cotg} a}.$$

1196. Calculer $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$, $\operatorname{tg} 2\alpha$ sachant que $\sin \alpha = \frac{4}{5}$ $(0 < \alpha < 90°)$.

1197. On donne $\cos \alpha = \frac{1}{3}$. Calculer $\cos 2\alpha$, $\sin 2\alpha$, $\operatorname{tg} 2\alpha$.

1198. Soit $\operatorname{tg} \theta = \frac{1}{2}$. Calculer $\operatorname{tg} 2\theta$, $\cos 2\theta$, $\sin 2\theta$.

1199. On donne $\cos \theta = \frac{2}{3}$ avec $0 < \theta < 90°$. Calculer $\cos^2 \frac{\theta}{2}$, $\sin^2 \frac{\theta}{2}$, $\operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2}$.

1200. Soit $\sin x = \frac{3}{5}$. Calculer $\sin^2 \frac{x}{2}$, $\cos^2 \frac{x}{2}$ et $\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}$ $\quad (0 < x < 90°)$.

1201. Calculer les fonctions circulaires de l'arc $x = 15°$:

1° En remarquant que $15° = 45° - 30°$.

2° En remarquant que $15° = \frac{30°}{2}$.

Simplifier les expressions suivantes :

1202. $\dfrac{\sin 2a}{2 \sin a}$ $\quad \cos^2 a - \cos 2a$ $\quad \dfrac{\sin a}{1 + \cos a}$.

1203. $\sqrt{\dfrac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta}}$ $\quad 2 \cos \theta - \dfrac{1}{\cos \theta}$ $\quad \dfrac{1 - \operatorname{tg}^2 a}{\cos 2a}$.

1204. $\dfrac{\sin^2 x}{1 - \cos x}$ $\quad \dfrac{\operatorname{tg} x - \sin x}{\operatorname{tg} x + \sin x}$ $\quad \dfrac{2 \sin x + \sin 2x}{2 \sin x - \sin 2x}$.

Démontrer les identités suivantes :

1205. $\operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x = \dfrac{2}{\sin 2x}$ $\quad \operatorname{cotg} x - \operatorname{tg} x = 2 \operatorname{cotg} 2x$.

1206. $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + x\right) - \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 2 \operatorname{tg} 2x.$

1207. $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + x\right) + \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \frac{2}{\cos 2x}.$

1208. $\frac{\sin x}{1 + \cos x} = \operatorname{tg} \frac{x}{2}.$

1209. $\frac{\sin x}{1 - \cos x} = \operatorname{cotg} \frac{x}{2}.$

Simplifier les expressions suivantes :

1210. $\frac{1 - \cos x + \sin x}{1 + \cos x + \sin x}.$

1211. $\frac{1 + \cos x - \sin x}{1 - \cos x - \sin x}.$

1212. $\frac{\sin 2x + \sin 4x + \sin 6x}{1 + \cos 2x + \cos 4x}.$

1213. $\frac{\sin x + \sin y}{\sin (x + y)}.$

1214. $\frac{\sin x - \sin y}{1 - \cos (x - y)}.$

1215. $\frac{1 - 2 \cos 2x}{1 + 2 \cos 2x}.$

1216. $\frac{\cos u - \cos v}{\sin (u - v)}.$

1217. $\frac{\cos u + \cos v}{1 + \cos (u + v)}.$

1218. Établir la formule :

$$\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b = \frac{2 \sin (a + b)}{\cos (a + b) + \cos (a - b)}.$$

L'utiliser pour le calcul de $\operatorname{tg} 9^\circ + \operatorname{tg} 81^\circ$ et de $\operatorname{tg} 27^\circ + \operatorname{tg} 63^\circ$.

En déduire la valeur numérique de :

$$A = \operatorname{tg} 9^\circ - \operatorname{tg} 27^\circ - \operatorname{tg} 63^\circ + \operatorname{tg} 81^\circ$$

qui se calcule sans l'aide des tables trigonométriques.

1219. Transformer en produit :

$$S = \cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x.$$

1220. Les angles a et b sont des angles aigus. On donne $\sin a = \frac{1}{2}$, $\sin b = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$. Calculer les fonctions circulaires de $a + b$ et $a - b$. En déduire la valeur de b.

1221. On donne $\cos a = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$. Calculer $\cos 2a$. Calculer a en radians.

1222. Transformer en produit la somme $S = \sin a + \sin b + \sin c - \sin (a + b + c)$.

1223. Exprimer $y = \sqrt{\dfrac{5 + 3\sin x + 4\cos x}{2 - 2\cos x}}$ en fonction de $t = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$.

1224. Sachant que $\operatorname{tg} x = 2 - \sqrt{3}$, calculer $\cos 2x$, $\sin 2x$, $\operatorname{tg} 2x$. En déduire la détermination de tous les arcs x.

1225. Transformer en produit $A = \cos x - 2\cos 3x + \cos 5x$.

1226. Expression de $\sqrt{\dfrac{1 + \sin x}{1 - \sin x}}$ en fonction de $t = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$.

1227. Calculer $\dfrac{3 + \cos a - \sin a}{1 + 3\cos a - \sin a}$ en fonction de $t = \operatorname{tg}\dfrac{a}{2}$.

1228. Mettre $\dfrac{1 - \sin x}{2(1 + \cos x)}$ sous la forme d'un carré.

1229. Calculer $\sin 3a$ en fonction de $\sin a$; $\cos 3a$ en fonction de $\cos a$; $\operatorname{tg} 3a$ en fonction de $\operatorname{tg} a$.

1230. Etablir les deux formules :

$$\sin 4x = 4\sin x\cos x - 8\sin^3 x\cos x$$
$$\cos 4x = 8\cos x - 8\cos^4 x + 1.$$

1231. Démontrer que :

$$(1 - x^2)\sin 2a - 2x\cos 2a = \frac{2(\operatorname{tg} a - x)(1 + x\operatorname{tg} a)}{1 + \operatorname{tg}^2 a}.$$

Résoudre les équations suivantes :

1232. $\sin 2x - \sin x = 0$.

1233. $\sin 3x - \sin x = \sin 2x$.

1234. $\cos 2x - \cos 6x = \sin 3x + \sin 5x$.

1235. $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x = \operatorname{tg} 3x$.

1236. $\cos 3x - \cos 5x = \sin 6x + \sin 2x$.

1237. $\cos 2x = 5 - 6\cos^2 x$.

1238. $\sin 2x - \operatorname{tg} x = 0$.

1239. $\sin x + \sin 3x + \sin 5x = 0$.

1240. $\sin 10x \sin 6x + \cos 10x \cdot \cos 6x = \dfrac{1}{2}$.

1241. $2\sin x \cdot \cos x = \cos 5x$.

1242. $1 + \cos 2x + \cos 4x = 0$.

1243. $\cos 5x - \cos x = \sin 3x$.

1244. $(\sqrt{3} + 1)\sin^2 x - 2\sqrt{3}\sin x\cos x + (\sqrt{3} - 1)\cos^2 x = 0$.

1245. $\cos 2x + \cos 6x = \sin 3x - \sin 5x$.

1246. $\sin x + \cos x = 1$.

1247. $3\cos x + 4\sin x = 5$.

1248. $\sqrt{3} \cdot \cos x + \sin x = \frac{7}{4}$.

1249. $\sqrt{3} \cdot \cos x + \sin x - \sqrt{2} = 0$.

1250. $4 \cos x + \sin x = 2$.

1251. $\cos x + \sqrt{3} \sin x = -1$.

1252. $\sqrt{3} \cos x + \sin x = 1$.

1253. $2 \sin x - 2 \cos x = 1 + \sqrt{3}$.

1254. Résoudre et discuter :

$$m \cos x + \sin x = 2m.$$

1255. 1° Calculer $\sin 3x$ en fonction de $\sin x$.

2° Résoudre les équations :

$$\sin 3x = \sin x, \qquad \sin 3x = -\sin x, \qquad \sin 3x = \frac{1}{2} \sin x.$$

3° Discuter l'équation :

$$\sin 3x = m \cdot \sin x.$$

1256. Résoudre :

$$2 \operatorname{tg} x \sin x + \operatorname{tg} x = 0.$$

Résoudre le triangle ABC, rectangle en A, connaissant :

1257. $a = 86{,}75$; $B = 56^\circ 42'$.

1258. $c = 34{,}60$; $C = 38^\circ 18'$.

1259. $b = 276{,}5$; $C = 62^\circ 56'$.

1260. $b = 1{,}372$; $B = 75^\circ 36'$.

1261. $b = 3{,}86$; $a = 12{,}02$.

1262. $a = 58{,}7$; $C = 28^\circ 4'$.

1263. $c = 173{,}4$; $b = 236{,}9$.

1264. $c = 4{,}560$; $a = 5{,}260$.

Calculer les côtés d'un triangle ABC rectangle en A, connaissant :

1265. $AH = h$ et l'angle B.

1266. $HB = c'$ et l'angle B.

1267. $AB = c$ et l'angle B.

1268. $HC = b'$ et l'angle B.

1269. $BC = a$ et l'angle B.

1270. $AC = b$ et l'angle B.

Calculer les fonctions circulaires des angles des triangles suivants :

1271. $a = 15$ $b = 13$ $c = 4$.

1272. $a = 15$ $b = 14$ $c = 15$.

1274. $a = 17$ $b = 10$ $c = 9$.

1275. $a = 25$ $b = 17$ $c = 12$.

1276. $a = 50$ $b = 41$ $c = 39$.

1277. $a = 75$ $b = 61$ $c = 56$.

1278. $a = 85$ $b = 66$ $c = 41$.

1279. $a = 97$ $b = 95$ $c = 78$.

1280. $a = 97$ $b = 90$ $c = 11$.

Le cercle.

1281. Soient quatre droites d'équations

$$x - 2y + 2 = 0$$
$$x - 2y - 4 = 0$$
$$2x + y - 2 = 0$$
$$2x + y + 4 = 0$$

Montrer qu'elles déterminent un rectangle. Déterminer l'équation du cercle circonscrit.

1282. Dans le plan orthonormé, on donne les points : A (9; 3) et B (− 3; − 1).

1° Trouver l'équation du cercle (C) de diamètre AB.

2° Trouver l'ensemble (Γ) des points M tels que MA = 3.MB.

3° Intersection de (C) et (Γ).

1283. On donne dans le plan orthonormé le cercle C d'équation $x^2 + y^2 = 9$, et le point A (3; 0). D'un point M on mène la tangente MT au cercle, T étant le point de contact.

Trouver le lieu du point M tel que MT = 2.MA.

1284. Dans le plan orthonormé un considère les cercles Γ et Γ'; Γ a pour centre Ω (− 3; 0) et pour rayon R = 5; Γ' a pour centre Ω' (3; O) et pour rayon R' = 2.
Par un point M du plan on mène la tangente MC à Γ et la tangente MC' à Γ'.
Etudier le lieu des points M tels que MC = 2.MC'.

1285. Dans le plan orthonormé soient les cercles C (Ω; R) et C' (Ω'; R') avec

Ω (− 3; 0), Ω' (3; 0) R = 7 R' = 1.

On mène de M les tangentes MC et MC' à C et C' respectivement.
Lieu des points M tels que MC' = 2.MC.

1286. Soient les points A (− a; 0) et B (a; 0).
Lieu des centres des cercles qui sont vus de A sous un angle de 60° et vus de B sous un angle de 90°.

1287. Dans le plan orthonormé, on donne les points A (9; − 3), B (23; − 1), C (21; 13), D (7; 11).

1° Quelle est la nature du quadrilatère ABCD ?

2° Equation du cercle (C) inscrit dans ce quadrilatère.

3° Trouver les équations des tangentes menées de l'origine O à ce cercle (C).

1288. Former l'équation des cercles orthogonaux au cercle

$$(C) : x^2 + y^2 - 2ax - 2ay + a^2 = 0$$

et tangents à l'axe $y'Oy$.

1289. Soient les points A $(-1; 0)$, B $(7; 0)$, C $(0; 7)$.

1° Equation du cercle circonscrit au triangle ABC.

2° Equation du cercle d'Euler. Vérifier qu'il passe par neuf points particuliers liés au triangle ABC.

3° Equation de la droite d'Euler.

1290. Soient les points A $(-1; 0)$, B $(6; 0)$, C $(0; 2)$.

1° Equation du cercle (C) circonscrit au triangle ABC.

2° On considère un point M quelconque du cercle (C); il se projette orthogonalement en α, β, γ sur les côtés BC, CA, AB respectivement.

Vérifier que les points α, β, γ sont sur une droite.

1291. Soient les points A $(3; 0)$ et B $(-3; 0)$. Etudier l'ensemble des points M. tels que :

$$\frac{MA}{MB} = \frac{1}{2}$$

1292. On donne les points A $(a; 0)$ et B $(-a; 0)$. k étant une constante positive. Étudier le lieu des points M tels que :

$$\frac{MA}{MB} = k.$$

1293. On considère les points A $(-3; 0)$ et B $(+3; 0)$. Ensemble des points M tels que :

$$\overline{\text{angle}}\,(MA; MB) = 60^\circ + k \cdot 180^\circ.$$

(Il s'agit de l'angle orienté des droites MA et MB).

1294. Soient A $(-a; 0)$ et B $(a; 0)$. Si $\theta = \overline{\text{angle}}\,(MA; MB)$ est constant, étudier le lieu du point M.

Examiner les cas particuliers : $\theta = 60^\circ$, $\theta = \pm 30^\circ$, $\theta = \pm 45^\circ$, $\theta = \pm 120^\circ$.

1295. On considère le cercle (C) ayant le segment AB pour diamètre : A $(3; 1)$ B $(-9; -3)$.

1° Equation de (C).

2° Montrer que l'ensemble des points M tels que MB = 3. MA est un cercle (Γ). Préciser les éléments de ce cercle.

3° (Γ) coupe la droite AB en C et D. Montrer que (AB; CD) est un quaterne harmonique.

4° Angle d'intersection de (C) et (Γ).

1296. Sur un cercle (C) on marque les points A, B, C, D, tels que :

$$\overline{\text{arc}}\,AB = 110^\circ \qquad \overline{\text{arc}}\,AC = 165^\circ \qquad \overline{\text{arc}}\,BD = 130^\circ$$

1° Calculer les angles intérieurs du quadrilatère ABCD.

2° Calculer l'angle des droites AC et BD.

3° Calculer : $\overline{\text{angle}}\,(AB; CD)$ et $\overline{\text{angle}}\,(AD; BC)$.

1297. Soit un arc AB d'un cercle (C) tel que $\overline{\text{arc}}\,AB = 60^\circ$. Les tangentes en A et B se coupent en P.

1° Calculer l'angle de ces deux tangentes.

2° Calculer les angles du triangle PAB.

3° Le diamètre PO coupe (C) en M et M', et la droite AB en H. Calculer, en fonction du rayon R, les longueurs OH et OP.

Montrer que le quaterne (PH, MM') est harmonique.

1298. Sur un cercle (C) on marque quatre points A, B, C, D se succédant dans cet ordre. Soient I, J, K, L les milieux des arcs AB, BC, CD, DA.

Calculer : $\overline{\text{angle}}$ (IK, JL).

1299. Dans un cercle (C) de centre O et de rayon R, on mène un rayon OA et une corde BC, les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{BC}$ étant de même sens. Soit H la projection de A sur BC.

1° Montrer que le triangle ABC est pseudo-rectangle, c'est-à-dire que

$$|B - C| = 90°.$$

2° Calculer en fonction de R : $AB^2 + AC^2$.

3° Démontrer la relation $HA^2 = \overline{HB} \cdot \overline{HC}$.

1300. Deux cercles (C) et (C′) se coupent en A et A′. Par A′ on mène une droite (D), qui recoupe les cercles en B et C. Soient deux droites parallèles passant par B et C, BB′ la corde découpée par la première dans (C) et CC′ la corde découpée par la seconde dans (C′). Démontrer que les points A, B′, C′ sont alignés.

1301. Soient deux cercles (C) et (C′) de même rayon R, de centre O et O′. Le cercle (C) passe par O′. Les cercles se coupent en A et A′. Par A′ on mène une droite (D) coupant (C) en B et (C′) en C.

1° Démontrer que le triangle ABC est équilatéral.

2° On pose $\overline{\text{angle}}$ $(\overrightarrow{AA'}; \overrightarrow{AB}) = \alpha$. Calculer la hauteur du triangle équilatéral ABC en fonction de R et α.

1302. On donne un cercle (C) de centre O, de rayon R, et un point P intérieur. Une droite (D) passant par P coupe (C) en A et B. Les tangentes au cercle en A et B se coupent en M. Soit H le milieu de la corde AB. On pose $\overline{\text{angle}}$ $(\overrightarrow{OH}; \overrightarrow{OP}) = \alpha$.

1° Montrer qu'on peut supposer que α est positif. Calculer les angles du triangle ABM en fonction de α.

2° Calculer les côtés du triangle MAB en fonction de R, α et $d = OP$.

3° Déterminer α pour que l'angle des tangentes soit maximum.

4° Peut-on traiter le même problème lorsque P est extérieur au cercle.

1303. Soient un cercle (C) de centre O et de rayon R, un diamètre fixe AB et une corde variable AM. Les tangentes en A et M se coupent en P. On considère le point A′ symétrique de A pour P.

1° Démontrer que les points B, A′, M sont alignés, quel que soit M.

2° On pose :

$$\overline{\text{angle}}\ (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AM}) = \alpha.$$

Montrer qu'on peut supposer α positif.

3° Calculer les longueurs AM, BM, AP, MA′ en fonction de R et α.

1304. Soient un cercle (C) de centre O et de rayon R, $A \in (C)$, $B \in (C)$; on pose $\overline{\text{angle}}$ $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AO}) = \theta$. θ étant une constante telle que $\theta \in (0; 90°)$.

Les tangentes en A et M se coupent en P. On pose $\overline{\text{angle}}$ $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}) = \alpha$.

1° Calculer, en fonction de α, les longueurs AM, BM, AP.

2° Soit A′ le symétrique de A pour P. Calculer AA′.

3° Les points B, M, A′ sont-ils alignés ?

1305. Soit un cercle (C) de centre O et de rayon R. Une corde AB est déterminée par l'angle au centre : $\overline{\text{angle}}$ $(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB}) = 2\theta$, $\theta \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. Les angles et les arcs seront évalués en radians.

Les tangentes en A et B au cercle (C) se coupent en P.

1° Evaluer AB, PA en fonction de R et θ.

2° La hauteur AH du triangle PAB recoupe OP en M. Que peut-on dire du triangle OAM. Calculer AM et MH.

3° Soit N = (C) ∪ (AH). Calculer $\overline{\text{arc}}$ AN et $\overline{\text{arc}}$ BN.

1306. Soient un cercle (C) de rayon R, et un triangle équilatéral ABC inscrit dans (C); on suppose que le triangle ABC est orienté positivement. On considère un point M de (C) tel que $\overline{\text{arc}}$ BM = x, $x \in [0; 60°]$.

1° On désigne par D le transformé de B dans la rotation $\mathcal{R}$ (M; — 60°). Sur quelle droite particulière de la figure se trouve D ?

Montrer que le triangle MBD est équilatéral. Calculer son côté en fonction de x.

En déduire que MA = MB + MC.

2° Quelle transformation géométrique, à éléments constants, permet de passer du point M au point D ?

En déduire le lieu du point D.

1307. Les bissectrices intérieures et extérieures des angles B et C d'un triangle ABC se coupent en I et J.

Démontrer que les points B, C, I, J sont cocycliques.

1308. On donne un cercle (C) de centre O et de rayon R, et un point P (OP = d). Par P on trace une droite (D) qui coupe (C) en A et B; soit H le milieu de la corde AB.

1° Lieu du point H lorsque (D) pivote autour de P. Déterminer les éléments de ce lieu.

2° Variation du lieu suivant la position de P par rapport au cercle (C).

1309. On donne une corde fixe AB d'un cercle (C).

Le point M décrit le cercle (C).

1° Démontrer que les bissectrices de l'angle (MA; MB) passent par deux points fixes I et J.

2° On projette A en H sur MI et en K sur MJ. Lieu des points H et K. On précisera les éléments de ces lieux.

1310. Soit un triangle équilatéral ABC et le cercle circonscrit (C). On considère un point M du petit arc AC, et sur la demi-droite MA on marque un point tel que MD = MB.

1° Que peut-on dire du triangle MBD.

Préciser la transformation qui transforme le triangle BCA en le triangle BMD.

2° Comparer les triangles BCM et BAD.

3° Lieu du point D (Donner deux démonstrations différentes de ce 3°).

1311. Soit un triangle ABC, ses hauteurs Aa, Bb, Cc et son orthocentre H.

1° Démontrer que les points H, a, B, c sont cocycliques.

2° Démontrer que les points A, b, a, B sont cocycliques.

3° Montrer que aA est bissectrice de l'angle (ab; ac).

1312. Soient un triangle ABC inscrit dans le cercle (C), et le point M ∈ (C.)

M se projette orthogonalement en H sur BC, en I sur CA, en J sur AB. Démontrer que les points H, I, J sont situés sur une droite (Δ).

(Δ) est appelé la droite de Simson du point M.

1313. Sur l'axe $x'Ox$ du plan rapporté à deux axes orthonormés on marque les points A (a; 0) et B (a; 0).

Déterminer les lieux géométriques suivants :

1° Lieu géométrique des points M tels que :

$$\overline{\text{angle}}\,(\overrightarrow{MA};\ \overrightarrow{MB}) = \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi.$$

2° Lieu géométrique des points M tels que :

$$\overline{\text{angle}}\,(MA;\ MB) = \frac{\pi}{3} + k \cdot \pi.$$

1314. Soit un segment AB ($AB = 2a$).

Tracer le lieu des points M tels que :

$$\overline{\text{angle}}\,(MA;\ MB) = \frac{2\pi}{3} + k \cdot \pi.$$

Préciser les éléments de ce lieu.

1315. Trouver à l'intérieur d'un triangle ABC un point M d'où l'on voit les trois côtés sous des angles égaux.

1316. Tracer un segment AB ($AB = 4$ cm).

Etudier le lieu des points M tels que l'angle AMB ait pour mesure 45°. Préciser les éléments de ce lieu.

1317. On donne un segment $AB = 4\sqrt{2}$ cm.

Etudier le lieu des points M tels que $\widehat{AMB} = 135°$.

Préciser les éléments de ce lieu.

1318. Soient un triangle ABC et un point M situé sur le segment BC. On considère les cercles (β) et (γ) circonscrits aux triangles MAB et MAC; soient β et γ leurs centres respectifs.

1° Comparer les angles (βA; βB) et (γA; γC).

2° Calculer les rayons des cercles (β) et (γ). Montrer qu'ils sont proportionnels aux côtés AB et AC.

3° Examiner les mêmes questions en supposant que le point M est situé sur la droite BC.

1319. Un triangle ABC isocèle de sommet A est inscrit dans un cercle (C). On mène par A une droite (Δ) coupant BC en M et le cercle en N.

1° Comparer les triangles ABM et CMN.

2° Etablir la relation :

$$AB^2 = \overline{AM} \cdot \overline{AN}.$$

3° On suppose maintenant que le triangle ABC est équilatéral, et que M appartient au segment BC. On pose $\widehat{MAB} = \alpha$.

Calculer AM et AN en fonction du rayon R du cercle (C) et de α.

1320. On donne un cercle (C) de centre O et de rayon R, une tangente (Δ) à (C) en A et un point M de (C) tel que $\overline{\text{angle}}\,(\overrightarrow{OA};\ \overrightarrow{OM}) = 2\alpha$, $\alpha \in [0;\ 180°]$.

1° Montrer qu'on peut supposer $\alpha \in [0;\ 90°]$.

2° On désigne par d la distance MH de M à (Δ). Démontrer que :

$$MA^2 = 2\,dR.$$

3° MH recoupe (C) en M'. Calculer la longueur de la corde MM'.

1321. Soient un cercle (C) de centre O et de rayon R, et un point fixe $A \in (C)$.

1° Un point M décrit (C). Sur la droite AM on marque un point M' tel que :

$$\overline{AM} \cdot \overline{AM'} = 4R^2.$$

Lieu géométrique du point M'.

2° Lieu géométrique du point M' défini cette fois par la relation :

$$\overline{AM} \cdot \overline{AM'} = 2R^2.$$

1322. Soient un cercle (C) de centre O et de rayon R et un point P extérieur à (C). On mène par P une tangente PC au cercle, et une sécante coupant (C) en A et B.

1° Démontrer la relation :

$$\frac{PA}{PB} = \frac{CA^2}{CB^2}$$

2° On suppose maintenant OP = 2 R et (PC; PA) = 15°.
Calculer les fonctions circulaires de l'angle 15°.
Calculer les longueurs PC, PA, PB.

1323. On considère un cercle (C) et une corde AB. Les tangentes en A et B se coupent en P. On projette un point M de l'arc du cercle intérieur au triangle ABP en H, K, L sur AB, PA, PB respectivement.
Démontrer la relation :

$$MH^2 = MK \cdot ML.$$

1324. Soient un triangle ABC et son cercle circonscrit (C). On considère deux droites (Δ) et (Δ') passant par A et symétriques pour la bissectrice intérieure de l'angle A (droites isogonales). (Δ) coupe BC en I, (Δ') coupe le cercle (C) en J.
Démontrer la relation :

$$AB.AC = AI.AJ.$$

1325. Les symétriques de l'orthocentre d'un triangle pour les côtés sont sur le cercle circonscrit aux triangles.

1326. Le lieu des points dont les projections orthogonales sur les côtés d'un triangle sont alignés est le cercle circonscrit au triangle.
(Le point M se projetant en α, β, γ sur les côtés du triangle, la droite Δ passant par α, β, γ est la droite de Simson du point M).

1327. Soient un triangle ABC et le cercle circonscrit (Γ). On suppose que le côté BC et le cercle (Γ) sont fixes.

1° Lieu de l'orthocentre H du triangle.

2° Si I est le centre du cercle inscrit, chercher le lieu du point I.

1328. Soient un triangle ABC, et les points α, β, γ pris respectivement sur les droites BC, CA, AB. On considère les cercles circonscrits aux triangles Aβγ, Bγα, Cαβ. Montrer que ces trois cercles ont un point commun.

1329. Soient un triangle ABC et un point I. On considère les cercles (α), (β), (γ) respectivement circonscrits aux triangles IBC, ICA, IAB, et les cercles (α') symétrique de (α) pour BC, (β') symétrique de (β) pour AB.
Montrer que les trois cercles (α'), (β'), (γ') ont un point commun.

1330. On donne un cercle (C) de centre O et de rayon $R = 5a$, et un point P à la distance $6a$ de O. Calculer la puissance de P pour (C). Quelle est la courbe de niveau passant par P ?

1331. Soient un cercle (O; $R = 6a$) et un point P ($OP = 3a$). Calculer $\overline{P}_{(c)}$.

1332. Un observateur est situé à 4 000 m d'altitude. Un rayon visuel est tangent à la surface de la mer. Calculer la longueur de ce rayon visuel entre l'observateur et le point de contact. Rayon de la terre : 6 370 km.

1333. Soit un cercle de centre O et de rayon R; on donne un point A ($OA = a < R$). Quelle est la longueur de la plus petite corde passant par A ?
Application numérique : $R = 15$, $a = 9$.

1334. On donne un cercle (C) ou (O; R) et une droite (Δ) passant par O et coupant (C) en A et B. On mène par un point H de (Δ) une droite (D) perpendiculaire à (Δ). M étant un point de (D), la droite AM coupe (C) en N.

Démontrer que :

$$\overline{AB} \cdot \overline{AH} = \overline{AM} \cdot \overline{AN}.$$

1335. Deux cercles AB et CD d'un cercle (C) se coupent en I. On donne :

$$AB = a \qquad \frac{IA}{IB} = \frac{m}{n} \qquad \frac{IC}{ID} = \frac{p}{q}.$$

Calculer les longueurs IA, IB, IC et ID.

Application numérique :

$$a = 42, \qquad \frac{m}{n} = \frac{3}{4}, \qquad \frac{p}{q} = \frac{1}{3}.$$

1336. Sur une droite (D) se trouvent les points A, B, C dans cet ordre. On a :

$$CA = 25\,a \text{ et } CB = 9\,a.$$

On considère l'ensemble des cercles passant par A et B, et l'on mène par le point C les tangentes à ces cercles.

Etudier le lieu des points de contact.

1337. On considère un cercle (C), de centre O et de rayon R, et un point A ($OA = R\sqrt{3}$). On mène de A une sécante AB dont la longueur est 2 R. Cette sécante recoupe le cercle en B'. Calculer la longueur de la corde interceptée par le cercle sur la sécante.

1338. H étant l'orthocentre d'un triangle ABC, et AA', BB', CC' les trois hauteurs, démontrer les relations algébriques :

$$\overline{AH} \cdot \overline{AA'} = \overline{AB} \cdot \overline{AC'} = \overline{AB'} \cdot \overline{AC}$$
$$\overline{HA} \cdot \overline{HA'} = \overline{HB} \cdot \overline{HB'} = \overline{HC} \cdot \overline{HC'}.$$

1339. Sur un cercle (C) on a deux points AB ($AB = 5\,a$); sur la droite AB on considère un point P extérieur à (C) tel que $PB = 4\,a$. De P on mène la tangente PC au cercle.

Calculer la longueur PC.

Peut-on calculer le rayon du cercle?

1340. On considère un cercle (C), de centre O et de rayon R, et un point P tel que $OP = 3$ R. Le support d'une corde AB passe par le point P, et on a $PA = 4$ R.

Calculer $\overline{P}_{(c)}$ et la longueur PB.

1341. On considère un cercle (C), de centre O et de rayon $R = 27\,a$, et un point P tel que $OP = 11\,a$. Une corde AB passe par le point P et on a $PA = 32\,a$.

Calculer $\overline{P}$ et la longueur PB.

1342. Soient un cercle (C) de centre O, et un point P tel que $OP = 4\,a$. Une corde passant par P coupe (C) en A et B, et on a $PA = 7\,a$ et $PB = \frac{19\,a}{4}$.

Calculer $\overline{P}_{(c)}$ et le rayon du cercle.

1343. Soit un cercle (O; R). Une corde AB de ce cercle passe par le milieu I d'une seconde corde CD, On a $AB = 2\,a$, $CD = \frac{8\,a}{5}$. Calculer les longueurs IA, IB, IC.

1344. Sur les côtés Ox et Oy d'un angle $(Ox; Oy)$, on marque les points A, B sur Ox, et C, D sur Oy tels que :

$$\overline{OA} = \sqrt{15} - 1 \qquad \overline{OB} = \sqrt{15} + 1 \qquad \overline{OC} = 4 \qquad \overline{OD} = \frac{7}{2}.$$

Montrer que les points A, B, C, D sont cocycliques.

1345. Deux axes $x'Ox$ et $y'Oy$ se coupent en O et sont orthonormés. Sur $x'Ox$ on marque les points A et B, et $y'Oy$ les points C et D, tels que :

$$\overline{OA} = 4a \qquad \overline{OB} = -10a \qquad \overline{OC} = 5a \qquad \overline{OD} = -8a.$$

Les points A, B, C, D sont-ils cocycliques ?

L'hypothèse « axes perpendiculaires » est-elle nécessaire ? L'hypothèse « vecteurs unitaires de même longueur » est-elle nécessaire ?

1346. Deux axes $x'Ox$ et $y'Oy$ se coupent en O. Sur $x'Ox$ on marque les points A et B, et sur $y'Oy$ le point C, tels que :

$$\overline{OA} = 4 \qquad \overline{OB} = 9 \qquad \overline{OC} = 6.$$

Montrer que le cercle (ABC) est tangent à Oy.

Que se passe-t-il si $\overline{OC} = -6$?

1347. Soient deux axes orthonormés $x'Ox$ et $y'Oy$. Sur $x'Ox$ on considère les points A et B, et sur $y'Oy$ le point C tels que :

$$\overline{OA} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \qquad \overline{OB} = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} \qquad \overline{OC} = 1.$$

Montrer que le cercle (ABC) est tangent à $y'y$. Calculer le rayon de ce cercle.

1348. Soit un angle $(Ox; Oy)$. On marque sur Ox les points A et B tels que $OA = 5a$ et $OB = \frac{36a}{5}$ et sur Oy un point C tel que $OC = 6a$.

Montrer que le cercle (ABC) est tangent à Oy.

1349. Soit un cercle (C) de diamètre $AA' = 2R$. On mène la tangente (Δ) en A à (C), et on considère une sécante passant par A', coupant (C) en B et (Δ) en C et telle que $BC = a$. Calculer les longueurs A'C et AC.

Application numérique : $a = 10$ et $R = 6$.

1350. D'un point P extérieur à (C) on mène la sécante PAB et la tangente PC. On donne : $PC = a$ et $AB = s$. Calculer PA et PB.

Applications numériques ; $a = 4$ cm et $s = 6$ cm; $a = 0{,}9$ cm et $s = 1{,}12$ cm.

1351. D'un point P on mène deux sécantes (Δ) et (Δ') à un cercle (C); elles coupent (C), en A, B et C, D respectivement.

On donne : $PB = a$, $AB = b$, $CD = c$. Calculer les longueurs PC, PD.

Applications numériques : $a = 48$, $b = 23$, $c = 40$.

1352. Soit une corde $AB = a$ d'un cercle (C). Trouver sur la droite AB, à l'extérieur de (C) un point M tel que $MC = \frac{3}{8}AB$, C étant le point de contact de la tangente menée de M à (C).

1353. Dans un cercle (O; R) on considère deux cordes AB et CD parallèles et inégales. Les droites AD et BC se coupent en I, les droites AC et BD se coupent en J.

Démontrer la relation :

$$OI \cdot OJ = R^2.$$

1354. Deux cercles (C) et (C′) se coupent en I et J. Par un point P de la droite IJ, on mène la sécante PAB à (C) et la sécante PA′B′ à (C′).

Démontrer que :

$$\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PA'} \cdot \overline{PB'}.$$

1355. Soit un triangle ABC, rectangle en A. Une droite (D) est perpendiculaire en H à la droite BC; elle coupe la droite AC en M et la droite AB en N.

Démontrer les relations :

$$\overline{BA} \cdot \overline{BN} = \overline{BH} \cdot \overline{BC}$$
$$\overline{NA} \cdot \overline{NM} = \overline{NH} \cdot \overline{NM}$$
$$\overline{MA} \cdot \overline{MC} = \overline{MN} \cdot \overline{MH}$$

1356. Etant donné un triangle ABM, on porte, sur la bissectrice intérieure de l'angle M de part et d'autre du point M, deux longueurs égales MP et MQ, telles que

$$MP^2 = MQ^2 = MA \cdot MB.$$

On prolonge le côté BM; du côté de M, d'une longueur MA′ = MA.

1° Montrer que les quatre points P, Q, B, A′, sont sur un même cercle (C).

2° Montrer que les points A et A′ sont symétriques l'un de l'autre par rapport à la bissectrice extérieure de l'angle M. En déduire que A est sur (C).

3° On considère le cercle (K) circonscrit au triangle ABM et l'on désigne par I et J les milieux des deux arcs de ce cercle d'extrémités A et B. On suppose que A et B étant fixes sur le cercle (K), M décrit l'arc AIB. Montrer que le centre du cercle (C) reste fixe. Montrer que la droite PQ et les tangentes en A et B au cercle (C) se coupent en un même point sur le cercle (K).

4° Lieu géométrique des points P et Q lorsque M décrit l'arc AIB.

1357. On donne un triangle ABC fixe. Sur le segment BC varie un point M. On envisage le cercle circonscrit au triangle AMB, de centre O et de rayon R, et le cercle circonscrit au triangle AMC, de centre O′ et de rayon R′.

1° Lieux géométriques des points O et O′.

2° Montrer que le rapport $\frac{R}{R'}$ est constant.

3° On mène la hauteur AH du triangle ABC. On désigne par I le milieu de AM. Quel est le minimum de R ? Quelle est la position correspondante de M ? Quelle est la valeur correspondante de R′ ?

1358. On considère un cercle de centre O, deux diamètres perpendiculaires AB et CD et la tangente (Δ) en A à ce cercle.

On prend un point M sur le quart de cercle BC. Soit Q le point où BM coupe (Δ).

1° Démontrer que le point P où la tangente en M au cercle coupe (Δ) est le milieu de AQ.

2° Soit R le point où PM coupe AB, et S celui où MO coupe AQ. Démontrer que les droites PO et RS sont orthogonales.

3° Quelle doit être la position de M sur le cercle pour que la droite RS soit tangente au cercle (O) ?

1359. Soient les points A (0; 1) et B (0; − 2) (Axes orthonormés).

Lieu géométrique des points M tels que : $\frac{MA}{MB} = \frac{1}{2}$

1360. Soient, dans un plan rapporté à deux axes orthonormés, les points A (2; 0) et B (− 2; 0).

Trouver le lieu des points M tels que $MA^2 - MB^2 = 4$.

1361. On donne deux points fixes A et B tels que $AB = 4a$. Trouver le lieu des points M du plan tels que :

$$MA^2 - MB^2 = 32a^2.$$

1362. Soient deux axes orthonormés $x'Ox$ et $y'Oy$, et les deux points A (2; 0) et B (− 2; 0).

Trouver le lieu des points tels que : $MA^2 + MB^2 = 26$.

1363. On considère deux points fixes A et B tels que $AB = 6a$. Trouver le lieu des points M du plan tels que :

$$MA^2 + MB^2 = 68a^2.$$

1364. On considère deux points fixes A et B tels que $AB = 3a$. Trouver le lieu des points M du plan tels que :

$$\frac{MA}{MB} = \frac{1}{2}$$

et le lieu des points tels que :

$$\frac{MA}{MB} = 2.$$

Relation entre ces deux lieux.

1365. Quel est le centre radical des trois cercles (α), (β), (γ) ayant pour diamètres les côtés BC, CA, AB d'un triangle ABC.

1366. On considère deux points A et B d'une droite (D), et deux cercles (C) et (C') tangents respectivement en A et B à (D).

Montrer que l'axe radical de ces deux cercles (C) et (C') passe par un point fixe que l'on précisera.

1367. Sur une droite (D) on considère trois points fixes A, B, C. Un cercle (C) passe par A et B; un cercle (C') est tangent en C à (D).

Démontrer que l'axe radical de (C) et (C') passe par un point fixe.

1368. Soient un cercle fixe (C), de centre O, de rayon R, et un point P fixe et intérieur à (C). Un sécante variable (Δ) passant par P coupe (C) en A et B.

On considère le cercle (Γ) de diamètre AB, et la droite (Δ') perpendiculaire en P à (Δ). (Δ') coupe (Γ) en MM'.

Lieu des points M et M'.

1369. On donne un cercle fixe (C) et un cercle variable (Γ) passant par deux points fixes A et B.

Montrer que l'axe radical de (C) et (Γ) passe par un point fixe.

1370. Soient un triangle ABC, O le centre du cercle circonscrit, I le centre de cercle inscrit.

Démontrer la relation :

$$d^2 = R^2 - 2Rr$$

($d = OI$; R rayon du cercle circonscrit; r, rayon du cercle inscrit).

1371. Construire un triangle ABC connaissant le côté $BC = a$, la hauteur $AH = h$ et le rapport $\frac{AB}{AC} = 2$.

1372. Construire un triangle ABC connaissant le côté $BC = a$, l'angle $A = 60^\circ$ et le rapport $\frac{AB}{AC} = \frac{1}{2}$.

1373. Construire le triangle ABC connaissant le côté $BC = a$, la médiane $AM = m$ et le rapport $\frac{AB}{AC} = k$.

1374. Construire le triangle ABC connaissant le côté BC = a, la médiane BM = m et le rapport $\frac{AB}{AC} = k$.

1375. Construire un cercle passant par deux points fixes A et B et tangent à une droite donnée Δ. Discuter.

1376. Construire un cercle passant par deux points fixes A et B et tangent à un cercle donné Γ. Discuter.

1377. On donne les cercles C (O; R) et C′ (O′; R′).

Étudier le lieu des points M tels que $\frac{\overline{M_{(C)}}}{M_{(C')}} = k$.

1378. On donne un cercle (Γ) et trois points A, B, C d'une droite (Δ). On pose :

$$\alpha = \overline{A_{(\Gamma)}}, \quad \beta = \overline{B_{(\Gamma)}}, \quad \gamma = \overline{C_{(\Gamma)}}.$$

Montrer que l'on a :

$$\alpha \cdot \overline{BC} + \beta \cdot \overline{CA} + \gamma \cdot \overline{AB} + \overline{AB} \cdot \overline{BC} \cdot \overline{CA} = 0.$$

Transformations. Isométries.

1379. Sur l'axe $x'Ox$, on considère le point M d'abscisse x; à ce point M on fait correspondre le point M′ d'abscisse x', avec $x' = 2x - 1$.

1° Soient les points A(1) et B(3). Quelles sont les images A′ et B′.

2° Calculer $\overline{AB}$, $\overline{A'B'}$ et $\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$.

1380. Soit la droite K, (K = Z/7). A un point M(x) de K, la transformation f fait correspondre le point M′(x') avec $x' = \dot{3}x - \dot{2}$.

$$f : M \in K \longrightarrow f(M) = M' \in K.$$

1° Soient les points A($\dot{2}$) et B($\dot{3}$). Déterminer A′ = f(A) et B′ = f(B).

2° Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{A'B'}$, ainsi que $\frac{\overrightarrow{A'B'}}{\overrightarrow{AB}}$.

1381. Sur l'axe réel $x'Ox$, on donne les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, [A(2), B(5)] et $\overrightarrow{A'B'}$[A′ (− 1) et B′(3)].

Montrer qu'il existe une translation transformant $\overrightarrow{AB}$ en $\overrightarrow{A'B'}$.

1382. Sur la droite K (K = Z/11) on donne A($\dot{7}$) et B($\dot{1}$), C($\dot{3}$) et D($\dot{8}$).

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont-ils équipollents? Existe-t-il un translation transformant $\overrightarrow{AB}$ en $\overrightarrow{CD}$?

1383. Sur l'axe réel $x'Ox$, on donne les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$; A(− 1) B(2) C(5) D(11).

Montrer qu'il existe une homothétie f = hom (Ω; k) telle que $\overrightarrow{CD} = f(\overrightarrow{AB})$. Déterminer Ω et k.

1384. Soient les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{A'B'}$ de la droite réelle : A(− 1) (B(+ 5) A′(2) B′(−1).

Montrer qu'il existe une homothétie f = hom (Ω; k) telle que $\overrightarrow{A'B'} = f(\overrightarrow{AB})$. Préciser la position de Ω et calculer k.

1385. Sur la droite R on considère l'homothétie $f = \text{hom}(\Omega; 2)$ avec $\Omega(3)$, et la translation t de vecteur $\vec{a}(-3)$.

Déterminer

$$t_0 f \quad \text{et} \quad f_0 t.$$

1386. Sur la droite, on donne $f = \text{hom}(\Omega; -2)$ et $g = \text{hom}\left(\Omega'; \frac{3}{2}\right)$ avec $\Omega(3)$ et $\Omega'(-1)$.

Déterminer :

$$g_0 f \quad \text{et} \quad f_0 g.$$

1387. On considère dans R, les homothéties $f = \text{hom}\left(\Omega; -\frac{3}{2}\right)$ $g = \text{hom}\left(\Omega'; -\frac{4}{3}\right)$ et la translation t de vecteur $\vec{a}(-3)$.

Etudier :

1° $g_0 f$ et $f_0 g$.

2° $f_0 t$ et $g_0 t$.

3° $t_0 f t^{-1}$ et $t_0 g_0 t^{-1}$.

4° $(f_0 g)^{-1}$ et $g^{-1}{}_0 f^{-1}$.

1388. Soit l'axe $x'Ox$. A un point $M(x)$ on fait correspondre le point $M'(x')$ tel que

$$\overline{OM} \cdot \overline{OM'} - 4 = 0.$$

Calculer l'abscisse de M' connaissant celle de M; puis celle de M en fonction de l'abscisse de M'.

La transformation ainsi définie a-t-elle des points doubles ? Lesquels ?

Cette transformation est-elle involutive ?

1389. Soit l'axe $x'Ox$. On considère :

f : $M(x) \longrightarrow M_1(x_1)$

avec $\overline{OM_1} \cdot \overline{OM} = 1$

g : $M_1(x_1) \longrightarrow M'(x')$

avec $\overrightarrow{IM'} = -\overrightarrow{IM_1}$, I étant le point d'abscisse 2.

1° Calculer x_1 en fonction de x; x' en fonction de x_1; puis x' en fonction de x.

2° Les transformations f et g sont-elles involutives ? $g_0 f$ est-elle une transformation involutive ?

3° La composée de deux transformations involutives est-elle toujours une transformation involutive.

1390. Soit une transformation donnée θ. On appelle transmuée d'une transformation t, la transformation $t' = \theta_0 t_0 \theta^{-1}$.

On a :

Φ : $t \longrightarrow \Phi(t) = t' = \theta_0 t_0 \theta^{-1}$.

Calculer la transmuée de $g_0 f$, c'est-à-dire $\Phi(g_0 f)$.

1391. Dans le plan réel R^2, on considère la transformation

$$f : M(x; y) \longrightarrow M'(x'; y')$$

définie par

$$x' = 2x - y$$
$$y' = x - 2y$$

1° Soient A(2; − 1) et B (1; 2). Quelles sont les images de A et B?

2° Quelle est l'image du vecteur $\overrightarrow{AB}$; de la droite AB.

3° Déterminer les formules de $\overset{-1}{f}$.

1392. Soient dans R^2 orthonormé, les points A (− a; 0) et B (a; 0). A un point M on fait correspondre le point M′ intersection des droites Δ et Δ' respectivement perpendiculaires en A à MA, et en B à MB.

$$f: \quad M\,(x;\,y) \longrightarrow M\,(x';\,y').$$

1° Quel est l'ensemble de définition de f.

2° Calculer les formules de $\overset{-1}{f}$

3° Calculer les formules de f.

4° La transformation f est-elle involutive?

1393. Dans le plan affine R^2 on donne la transformation f définie par

$$f: \quad M\,(x;\,y) \longrightarrow M'\,(x';\,y')$$

avec

$$\begin{aligned} x' &= x + y \\ y' &= 2x - y. \end{aligned}$$

1° Montrer que f est une transformation linéaire.

2° Quelle est l'image de la droite passant par A(1; 2) et ayant pour vecteur directeur $\vec{U}$ (3; − 1).

1394. Dans le plan rapporté à deux axes orthonormés $x'Ox$, $y'Oy$ on considère le point A(1; 3 + $\sqrt{5}$).

On considère la transformation f donnée par les formules

$$\begin{aligned} x' &= x - y \\ y' &= 2x - y. \end{aligned}$$

1° Quel est le transformé A′ du point A(1; 3 + $\sqrt{5}$)?

2° Calculer d (O; A) et d (O; A′).

3° La transformation f est-elle une isométrie?

1395. Le plan R^2 étant rapporté à deux axes orthogonaux, on considère la transformation f définie par :

$$\begin{cases} x' = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot x - \dfrac{1}{2} y \\[2mm] y' = \dfrac{1}{2} x + \dfrac{\sqrt{3}}{2} y \end{cases}$$

1° Soient deux points A (1; 2) et B (3; 1). Déterminer A′ = f (A) et B′ = f (B)

2° Calculer d (A; B) et d (A′; B′).

3° Montrer que f est une isométrie.

1396. Dans le plan R^2, on donne la transformation f :

$$\begin{aligned} x' &= x + 2y \\ y' &= 2x - 5y \end{aligned}$$

Soient les droites parallèles D et Δ.

$$\begin{aligned} D &: y - x - 1 = 0 \\ \Delta &: y - x + 2 = 0 \end{aligned}$$

Quelles sont les images D′ = f (D) et Δ' = f (Δ). Vérifier le parallélisme de D et Δ.

1397. Soit la transformation f :

$$\begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = y + 2x \end{cases}$$

Trouver un vecteur $\overrightarrow{OA}$ dont l'image soit $\overrightarrow{OA'} = \rho . \overrightarrow{OA}$ ($\rho \in R$).

1398. Dans l'espace R_3 orthonormé on donne la transformation linéaire f définie par

$$\begin{cases} x' = \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}z \\ y' = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}z \\ z' = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z \end{cases}$$

f est-elle une isométrie ?

1399. Soit dans R^2 la transformation :

$$\begin{cases} x' = 4x + 4y \\ y' = x + 4y \end{cases}$$

Trouver les droites du plan qui sont parallèles à leurs images.

1400. Soient un point A et une droite D.
Construire un cercle qui passe par A et coupe D suivant une corde de longueur donnée a.

1401. Soit un demi-cercle (C), de diamètre AB. Un point M décrit (C). Sur le segment MB, et à l'extérieur du triangle MAB, on construit un carré MBCD.

1° Trouver le lieu du point C.

2° Trouver le lieu du point D.

1402. On donne dans le plan, deux droites parallèles (β) et (γ) et un point A. Construire un triangle équilatéral ABC, B étant sur (3) et C sur (γ).

1403. Soient un triangle ABC et sa hauteur AH. Sur le côté BC, et à l'extérieur du triangle, on construit un rectangle $B\beta\gamma C$. Par β on mène la perpendiculaire Δ à AC, et par γ la perpendiculaire Δ' à ΔB.
Démontrer que les droites Δ, Δ' et AH sont concourantes.

1404. Soient un triangle ABC et sa hauteur AA'. Le point A' se projette en β sur AC, et en γ sur AC.
Démontrer que la droite $\beta\gamma$ passe par l'orthocentre du triangle.

1405. Construire un triangle sachant que les sommets A, B, C sont sur trois cercles cocentriques donnés (α), (β), (γ).

1406. Soient un carré $A\beta B'D$; B le milieu de $A\beta$ et A' le milieu de A'B'.

Déterminer la rotation qui transforme $\overrightarrow{AB}$ ou $\overrightarrow{A'B'}$, et celle qui transforme $\overrightarrow{AA'}$ en $\overrightarrow{BB'}$.

1407. On considère les deux rotations $f = \text{rot}\ (I; \alpha)$ et $g = \text{rot}\ (J; \beta)$. On a :

$$f : M \longrightarrow M_1$$
$$g : M_1 \longrightarrow M_2.$$

Etudier le lieu du point M tel que $M_1M_2 = 2.a$.

1408. On donne un triangle ABC isocèle de sommet A; un point M de BC se projette parallèlement à AB en β sur AC, et se projette parallèlement à AC en γ sur AB.

1° Montrer que la médiatrice du segment $\beta\gamma$ passe par un point fixe lorsque M varie.

2° Montrer que le cercle circonscrit au triangle $A\beta\gamma$ passe par un point fixe autre que A.

1409. Soit le cercle trigonométrique (U), I étant l'origine des abscisses curvilignes. On considère le point P de (U) tel que $\overline{\text{arc}}\ \text{IM} = \theta$ $(0 \leqslant 0 \leqslant 2\pi)$. On considère la tangente $u'Pu$, le vecteur unitaire de l'axe $u'Pu$ se déduisant de $\overrightarrow{OP} = \vec{R}$ par une rotation d'angle $+\frac{\pi}{2}$. Soit Q le point de $u'Pu$, tel que $\overline{PQ} = d$ (I; P).

1° Quelle est la rotation qui transforme $\overrightarrow{IP}$ en $\overrightarrow{PQ}$?

2° Une droite Δ passe par I; quelle est son image $\Delta' = f(\Delta)$?

3° Un point M du plan a pour image $M' = f(M)$. Comment peut-on construire M' à partir de M.

Comment sont disposés les points P, M, M' ?

4° Soit une droite D quelconque. Construire son image $D' = f(D)$.

5° D est fixe et P décrit le cercle (U). Quelle est l'enveloppe de la droite D' ?

1410. Soient deux segments égaux et non parallèles. On considère la rotation f transformant $\overrightarrow{AB}$ en $\overrightarrow{A'B'}$, et la rotation g transformant $\overrightarrow{AB}$ en $\overrightarrow{B'A'}$.

Etudier $g \circ f$ et $\overset{-1}{g} \circ f$.

1411. Soient deux triangles équilatéraux égaux, de même orientation et non équipollents. On considère les isométries positives :

f qui transforme ABC en A'B'C';
g qui transforme ABC en B'C'A';
h qui transforme ABC en C'A'B'.

1° Etudier $h \circ g \circ f$.

2° Résoudre l'équation $g = \rho \circ f$, ρ étant une rotation inconnue, et l'équation $h = \rho \circ f$.

3° f, g, h sont des rotations. Préciser la position des centres.

1412. Démontrer que si une figure possède deux centres de symétrie, elle en a une infinité.

1413. Soit un triangle équilatéral ABC.

On considère les rotations

$$\alpha = \text{rot}\,(A; 60°) \qquad \beta = \text{rot}\,(B; 60°) \qquad \gamma = \text{rot}\,(C; 60°).$$

1° Etudier : $\gamma \circ \beta \circ \alpha$.

2° Etudier : $\gamma \circ \beta^{-1} \circ \alpha$.

1414. On donne deux cercles égaux (C) et (C') tangents extérieurement en A. Un point M décrit (C), et un point M' décrit (C') de manière que

$$\overline{\text{angle}}\ (\overrightarrow{OM}; \overrightarrow{O'M'}) = +\frac{\pi}{2}.$$

O et O' étant les centres des cercles (C) et (C').

1° Montrer que la médiatrice du segment MM' passe par un point fixe I.

2° On considère le symétrique Ω du point I par rapport à la droite OO', et la rotation $f = \text{rot}\left(\Omega; -\frac{\pi}{2}\right)$. Soit $M_1 = f(M)$. Montrer que la droite $M'M_1$ passe par un point fixe.

1415. Soient trois droites (A), (B), (C). On considère les symétries :

$$\alpha = \text{sym (A)}, \qquad \beta = \text{sym (B)}, \qquad \gamma = \text{sym (C)}.$$

Etudier :

$$\gamma \circ \beta \circ \alpha.$$

(Deux cas, suivant que (A), (B), (C) sont dans un plan ou non).

1416. On donne un triangle fixe ABC, et on considère les trois rotations :

$$\alpha = \text{rot}\left(A; \frac{2\pi}{3}\right), \qquad \beta = \text{rot}\left(B; \frac{2\pi}{3}\right), \qquad \gamma = \text{rot}\left(C; \frac{2\pi}{3}\right)$$

1° Etudier :

$$f = \beta \circ \alpha.$$

Décomposer f en le composé de deux symétries.

2° Etudier :

$$g = \gamma \circ \beta \circ \alpha.$$

Décomposer g en le composé de deux symétries. Quelle est la nature de g?

3° Dans quel cas peut-on avoir $g = e$, e étant la transformation identique.

1417. Soient deux droites D et D′ du plan. Un point M se projette orthogonalement en H sur D et en K sur D′.

1° Etudier l'ensemble des points M du plan tels que $MH + MK = a$, a étant une constante.

2° Etudier l'ensemble des points M du plan tels que $|MH - MK| = a$.

1418. Etudier les éléments de symétrie d'une pyramide régulière dont la base est un carré; dont la base est un triangle équilatéral.

1419. Soit un triangle équilatéral ABC.

1° Etudier les transformations qui conservent globalement le triangle ABC. (Il y en a six, la transformation identique e, deux rotations f et g, trois symétries α, β, γ).

2° Construire la table de composition de cet ensemble $E = (e; f; g; \alpha; \beta; \gamma)$. En déduire que E muni de la loi de composition notée $\circ$ est un groupe non commutatif.

Homothéties. Similitudes.

1420. Soit un triangle ABC. Inscrire dans ce triangle un carré $\alpha\beta\gamma\delta$, tel que α et δ soient sur le côté BC, β sur le côté AB et γ sur le côté AC.

1421. On donne deux droites fixes (α) et (β), et une direction de droites Δ, non parallèle à (α).

Une droite Δ coupe (α) en A et (β) en B. Soit I un point du plan.

Lieu du centre de gravité du triangle IAB.

1422. Soient deux cercles (C) et (C′) tangents en I. Un angle droit (Iu; Iv) pivote autour de I; Iu coupe (C) en A et Iv coupe (C′) en B.

1° Montrer que la droite AB passe par un point fixe.

2° Le point I se projette orthogonalement en M sur la droite BC. Etudier le lieu du point M.

1423. Soient deux cercles (C) et (C′) sécants en I et J, et un point M variable de (C). La droite MI recoupe (C′) en A, et la droite MJ recoupe (C′) en B.

1° Etudier l'ensemble des isobarycentres des triangles IAB.

2° Lieu de l'orthocentre du triangle IAB.

3° Enveloppe de la droite AB.

1424. Soit un secteur de disque, découpé dans le disque de centre O et de rayon R et limité par les rayons OA, OB et l'arc AB.

Inscrire dans ce secteur un carré $\alpha\beta\gamma\delta$, tel que α soit sur OA, β sur OB, et les points γ et δ sur l'arc AB.

1425. Soient un cercle (C) et deux points fixes A et B. Un point M décrit le cercle (C). Etudier l'enveloppe de la droite d'Euler du triangle MAB.

1426. On considère un triangle ABC.

Les deux assertions :

a) $| B - C | = \frac{\pi}{2}$;

b) le centre du cercle d'Euler est la droite BC;
sont équivalentes.

1427. On donne un cercle (C) et un point I fixes, et on considère les homothéties $f = \text{hom}\ (I; m)$, m étant un paramètre réel variable.

Soit $\mathcal{F}$ la famille des cercles $C' = f(C)$.

1° Trouver les cercles de F qui sont tangents à une droite D donnée.

2° Soit une direction Δ; trouver l'ensemble des points de contact des tangentes aux cercles (C′) parallèles à Δ.

1428. 1° Soient deux cercles (C) et (C′), de centres O et O′, de rayons R et R′ ($R \neq R'$). Soient S et T les centres d'homothétie de (C) et (C′), et le cercle (Γ) de diamètre ST.

Montrer que (Γ), (C), (C′) ont le même axe radical.

2° Soient un triangle ABC, son centre de gravité G, son orthocentre H, (C) le cercle circonscrit au triangle, (C′) le cercle d'Euler, (Γ) le cercle de diamètre GH.

Montrer que (Γ), (C), (C′) ont le même axe radical.

1429. On donne un point fixe A et une homothétie $f = \text{hom}\ (O; k)$. Soit $M' = f(M)$ l'homothétique d'un point M.

1° Etudier l'ensemble $E = \{ M / \overline{\text{angle}}\ (\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{AM'}) = \alpha \}$, α étant un angle constant donné.

2° Etudier l'ensemble $F = \left\{ M / \frac{AM'}{AM} = a \right\}$, a étant un nombre donné.

1430. Soit un triangle ABC.

On considère les points A′, B′, C′ respectivement situés sur les droites BC, CA, AB, et leurs symétriques A″, B″, C″ respectivement par rapport aux milieux des segments BC, CA, AB.

1° Si les points A′, B′, C′ sont alignés, alors les points A″, B″, C″ sont alignés.

2° Si les droites AA′, BB′, CC′ sont concourantes, alors les droites AA″, BB″, CC″ sont concourantes.

1431. Soit un triangle ABC.

On considère un point A′ de BC et son conjugué A″ par rapport à BC, un point B′ de CA et son conjugué B″ par rapport à CA, un point C′ de AB et son conjugué C″ par rapport à AB.

Si les points A′, B′, C′ sont alignés, alors les droites AA″, BB″, CC″ sont concourantes.

1432. Soit un triangle ABC. Un cercle (C) coupe BC en α et α', CA en β et β', AB en γ et γ'.

Si les droites $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$ sont concourantes, alors les droites $A\alpha'$, $B\beta'$, $C\gamma'$ sont concourantes.

1433. Dans un triangle ABC, on donne trois céviennes $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$ concourantes en I.

Démontrer la relation

$$\frac{\overline{IA}}{\overline{I\alpha}} = \frac{\overline{\gamma A}}{\overline{\gamma B}} + \frac{\overline{\beta A}}{\overline{\beta C}}$$

1434. Soit un triangle ABC; le cercle inscrit est tangent aux côtés BC, CA, AB en α, β, γ respectivement.

Montrer que les droites $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$ sont des céviennes.

1435. Soient deux droites parallèles (α) et (β), et un point fixe S.

Construire un triangle SAB, rectangle isocèle de sommet A, tel que A appartienne à (α) et B appartienne à (β).

1436. Soient deux cercles (C) et (C′) sécants en I et J. Une droite Δ, variable et passant par J recoupe (C) en A et (C′) en B. On considère le triangle IAB.

1° Montrer que IAB reste semblable à lui-même.

2° Etudier les lieux du centre de gravité, du centre du cercle circonscrit, de l'orthocentre, du centre du cercle inscrit du triangle IAB.

1437. Soient deux axes orthonormés $x'Ox$ et $y'Oy$, et un point M(3; 3) se projetant orthogonalement en N sur $x'x$ et en P sur $y'y$. Deux droites perpendiculaires $z'z$ et $t't$ passant par M peuvent tourner autour de ce point.

On considère les points :

$$A = x'x \cap z'z \qquad B = y'y \cap z'z$$
$$C = x'x \cap t't \qquad D = y'y \cap t't.$$

1° Démontrer que MB = MC et que MA = MD.

2° Démontrer que les triangles OAB et OCD sont semblables, et en déduire une relation entre OA, OB, OC, OD.

3° Le point M se projette orthogonalement en I sur la droite BC.

Etudier le lieu du point I lorsque les droites $z'z$ et $t't$ tournent autour du point M. Quelle est la mesure de l'angle (NI; NM).

1438. Sur les côtés d'un angle $(Ax; Ay)$ qui vaut 60° on porte $AB = AC = x$. On prolonge BC d'une longueur CD = BC.

1° Calculer la hauteur issue de C du triangle DAC et les côtés de ce triangle.

2° Soit O le centre du cercle circonscrit au triangle DAC. Calculer les angles du triangle OCA, ainsi que ses côtés.

3° La perpendiculaire en C à Ay coupe AD en I. Nature du triangle DIC.

4° Ax et Ay restant fixes et le point B décrivant Ax, trouver le lieu de D et celui de O.

1439. Par le sommet A d'un losange ABOC on mène une droite variable (Δ), qui coupe les droites OB et OC en M et N, mais ne traverse pas le triangle OBC. On pose $\overline{OB} = \overline{OC} = a$:

1° Montrer que $\overline{BM} \cdot \overline{CN}$ a une valeur constante, qu'on déterminera.

2° On suppose dans la suite du problème que $\widehat{BOC} = 60°$. Montrer que l'on a

$$\overline{BM} \cdot \overline{CN} = BC^2.$$

Quelle est la relation qui lie $\overline{OM} = x$ et $\overline{ON} = y$?

3° Montrer que les triangles MBC et NBC sont semblables, BN et CM se coupant en I. Démontrer que le quadrilatère OBIC est inscriptible et que son cercle circonscrit est tangent aux côtés AB et AC du losange.

4° Quel est le lieu du point I quand (Δ) tourne autour de A.

Inversion. (1)

1440. Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un quadrilatère convexe ABCD soit inscriptible est que le produit des diagonales soit égal à la somme des produits des côtés opposés. (Théorème de Ptolémée.)

1441. Soit une inversion $f = \text{inv}(0;\ p)$, $(p > 0)$, et deux points inverses A et $A' = f(A)$.
Montrer que tout cercle passant par A et A′ est orthogonal au cercle d'inversion.

1442. Soient un cercle (C) de diamètre AB; un point H de la droite AB et la droite Δ perpendiculaire en H à AB.
Une droite passant par H coupe (C) en M et M′; les droites AM et AM′ coupent Δ en P et P′.
Démontrer que le produit $\overline{HP} \cdot \overline{HP'}$ est constant.

1443. Sur la droite D on considère les points A, B, C. Un point P décrit la médiatrice Δ du segment AB. La droite CP recoupe le cercle circonscrit au triangle PAB en M.
Etudier l'ensemble des points M.

1444. Sur un axe $x'x$, on donne deux points fixes A et B, et un point variable. A chaque point P on associe l'inversion $f = \text{inv}\ (P;\ p)$ avec $p = \overline{MA} \cdot \overline{MB}$.

1° Un point M étant donné, construire son inverse $M' = f(M)$.

2° Le point M décrit une droite Δ passant par A, et le segment MM′ reste parallèle à une direction donnée, non parallèle à AB.
Etudier l'ensemble des points M′.

1445. Soient deux cercles (C) et (C′) se coupant en I et J; un cercle variable (Γ) passant par I recoupe (C) en M et (C′) en M′. La droite IM recoupe (C′) en N; la droite IM′ recoupe (C) en N′. Les cercles circonscrits aux triangles se recoupent en μ.
Etudier le lieu du point μ.

1446. Sur un axe $x'Ox$, on donne trois points A, B, C. On considère la relation de Chasles $\overline{BC} + \overline{CA} + \overline{AB} = 0$.
Soit l'inversion $f = \text{inv}\ (0;\ p)$; A′, B′, C′ étant les inverses de A, B, C, quelle relation y a-t-il entre $\overline{B'C'}$, $\overline{C'A'}$, $\overline{A'B'}$.

1447. Soit une inversion négative $f = \text{inv}\ (0;\ p)$, $p < 0$; quels sont les cercles qui sont invariants globalement dans f.

1448. On donne un triangle OAB, isocèle de sommet O. Sur une droite Δ passant par O, on considère deux points M et P tels que

$$\frac{MA}{MB} = \frac{PA}{PB}$$

1° P décrivant une droite D, étudier le lieu du point M.

2° P décrivant un cercle C, étudier le lieu du point M.

1449. Soient un cercle (C) et deux points A et B fixes. Un point M décrit le cercle (C). Les droites MA et MB recoupent (C) en P et Q respectivement. Par P on mène la parallèle à AB, qui recoupe (C) en R.

1° Montrer que la droite QR coupe AB en un point fixe S.

2° On suppose maintenant que (C) et B sont fixes et que A décrit un cercle (Γ) Quel est le lieu du point S.

---

(1) Il s'agit seulement ici de quelques exercices simples.

La droite complexe.

1450. Représenter géométriquement les nombres complexes suivants, ainsi que l'opposé et le conjugué de chacun d'eux :

1° $3 + i$ 4° $12 - 3i$ 7° $-3 + 4i$.
2° $-1 + 5i$ 5° $-4 - 3i$ 8° $-2i$.
3° $10 + 8i$ 6° -2 9° $-1 - i$.

1451. Donner les images vectorielles des nombres suivants :

1° $\cos 240° + i.\sin 240°$
2° $\cos(-30°) + i.\sin(-30°)$
3° $\cos(-210°) + i.\sin(-240°)$
4° $\cos(510°) + i.\sin(510°)$
5° $\cos(-240°) + i.\sin(-240°)$
6° $\cos(-300°) + i.\cos(-300°)$
7° $\cos(330°) + i.\sin(330°)$
8° $\cos(420°) + i.\sin(420°)$
9° $\cos(-120°) + i.\sin(-120°)$
10° $\cos(570°) + i.\sin(570°)$.

Quels sont ceux de ces nombres qui sont égaux, opposés ou conjugués ?

1452. Donner les images vectorielles des nombres suivants, et les mettre sous forme trigonométrique.

1° $1 + i$
2° $1 - i$
3° $-1 + i$
4° $-1 - i$
5° 2
6° $\sqrt{2} - i\sqrt{2}$
7° $-2i$
8° -2
9° $-1 - i\sqrt{3}$
10° $-\sqrt{3} + 3i$
11° $5i$
12° $4 - 4i$.

1453. Effectuer les opérations suivantes, et indiquer les constructions géométriques correspondantes :

1° $(1 - 4i) + (6 + 2i)$
2° $(5 + 8i) + (8 + 5i)$
3° $(-6 + 2i) - (1 - i)$
4° $(7 + 8i) - (-3 + 5i)$
5° $(1 + i) + (-1 + 3i) + (3 - 4i)$
6° $(3 - 2i) + (2 + 4i) + (-1 + 5i)$
7° $(2 + i) - (3 - i) + (1 + 3i)$
8° $(2 - 3i) - (-1 - i) - (4 + 3i)$.

1454. Que devient l'image vectorielle d'un nombre complexe quand on multiplie ce nombre complexe par l'un des nombres suivants :

1° 1
2° -1
3° i
4° $-i$
5° $3i$
6° -5
7° $\sqrt{3} + i$
8° $-1 + i$.

1455. Effectuer les opérations suivantes, et indiquer les constructions vectorielles correspondantes :

1° $(2 + i)(1 + 2i)$
2° $(1 + i)(2 - 5i)$
3° $(1 - i)(2 + 2i)$
4° $(3 - i)(2 + 3i)$
5° $(-1 + 3i)(3 - 5i)$
6° $(-2 - 2i)(-1 + 3i)$.

1456. Calculer les puissances suivantes :

1° $[2(\cos 45° + i.\sin 45°)]^4$.
2° $[3(\cos 105° + i.\sin 105°)]^5$.
3° $[\cos(-85°) + i.\sin(-85°)]^9$.
4° $[\sqrt[3]{5}(\cos 110° + i.\sin 110°)]^6$.

5° $[\sqrt[3]{2}(\cos 50° + i.\sin 50°)]^9$.
6° $[\cos(-40°) + i.\sin(-40°)]^{12}$.

1457. Trouver les images vectorielles des puissances suivantes :

1° $(-1)^2$, $(-1)^4$; $(-1)^3$; ...
2° i^2; i^5; i^4; i^3; ...
3° $(-i)^2$; $(-i)^4$; $(-i)^3$; ...
4° $(2i)^2$; $(2i)^4$; $(2i)^3$; ...
5° $(1+i)^3$
6° $(1+i\sqrt{3})^4$
7° $(\sqrt{3}-i)^4$
8° $(-1+2i)^3$.

1458. Calculer :

1° les racines carrées de 1; -1; i; $-i$;
2° les racines cubiques de 8; -8; $8i$; $-8i$;
3° les racines cinquièmes de 1; $-4i$;
4° les racines cinquièmes de -1; de i;
5° les racines cubiques de $1+i$ et de $1-i$;
6° les racines sixièmes de $\frac{1}{2}\sqrt{3}-i)$;
7° les racines huitièmes de $8(-1+i\sqrt{3})$;
8° les racines dixièmes de 1024 et de $-1024i$.

Donner dans chaque cas les images vectorielles.

1459. Mettre le nombre

$$u = \frac{(1+i)^n}{(1-i)^m}$$

sous forme trigonométrique.

1460. Montrer que tout nombre complexe de module 1 peut se mettre sous la forme $\frac{1+ix}{1-ix}$, x étant un nombre réel.

1461. 1° Montrer que

$$x^5 - 1 = (x-1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1).$$

En déduire les racines cinquièmes de l'unité.

2° Résoudre l'équation $z^5 = 1$, en posant $z = (x+iy)^2$. En déduire les racines cinquièmes de l'unité.

1462. Etablir les formules :

$$S = \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{6\pi}{7} = -\frac{1}{2}$$

$$S' = \sin\frac{2\pi}{7} + \sin\frac{2\pi}{7} + \sin\frac{6\pi}{7} = \frac{1}{2}\operatorname{cotg}\frac{\pi}{14}$$

1463. Etablir les formules :

$$\cos\frac{\pi}{11} + \cos\frac{3\pi}{11} + \cos\frac{5\pi}{11} + \cos\frac{7\pi}{11} + \cos\frac{9\pi}{11} = \frac{1}{2}$$

$$\cos\frac{2\pi}{11} + \cos\frac{4\pi}{11} + \cos\frac{6\pi}{11} + \cos\frac{8\pi}{11} + \cos\frac{10\pi}{11} = -\frac{1}{2}.$$

1464. Calculer :

$$A = \cos x + C_n^1.\cos 2x + C_n^2\cos 3x + \cdots + C_n^n\cos(n+1)x$$
$$B = \sin x + C_n^1\sin 2x + C_n^2\sin 3x + \cdots + C_n^n\sin(n+1)x.$$

1465. Développer en une somme de cosinus ou de sinus

$$A = \sin^2 x \cos^3 x$$
$$B = \cos^4 x \sin^2 x$$
$$C = \sin^7 x.$$

1466. Soient α et $\beta = \bar{\alpha}$ deux nombres complexes conjugués. Calculer :

$$A = (\alpha + \beta)\cdot(\alpha^2 + \beta^2) \dots (\alpha^n + \beta^n).$$

1467. Si on a :

$$x + \frac{1}{x} = 2\cos\theta,$$

alors on a :

$$x^n + \frac{1}{x^n} = 2\cos n\theta.$$

1468. On donne :

$$f(x) = 1 - C_n^2 x^2 + C_n^4 x + \dots + (-1)^p C_n^{2p} x^{2p} + \dots$$
$$g(x) = C_n^1 x - C_n^3 x^3 + \dots + (-1)^p C_n^{2p+1} x^{2p+1} + \dots,$$

Calculer :

$$S = [f(x)]^2 + [g(x)]^2.$$

1469. Calculer $\cos \frac{\pi}{3}$ à partir de $\cos \pi = -1$.

1470. Calculer $\sin \frac{\pi}{5}$ à partir de $\left(\cos \frac{\pi}{5} + i \sin \frac{\pi}{5}\right)^5 = \cos \pi + i \sin \pi$.

1471. Calculer les racines cubiques de $z = \dfrac{\sqrt{3} - i}{1 + i\sqrt{3}}$.

1472. Calculer les racines carrées de $z = i - 1$. Calculer ensuite $\cos \frac{3\pi}{8}$ et $\sin \frac{3\pi}{8}$.

1473. Résoudre les équations :

1° $z^4 - 2z^2 + 4 = 0$.

2° $z^8 + z^4 + 1 = 0$.

3° $z^4 - 2z^2 + 5 = 0$.

1474. Résoudre l'équation :

$$\left(\frac{1 + ix}{1 - ix}\right)^n = \cos 0 + i \sin 0.$$

1475. Trouver $\operatorname{Re}(z)$ et $\operatorname{Im}(z)$ si $z = (1 + i)^n$.

1476. Résoudre l'équation.

$$z^4 = \frac{2i + \sqrt{3}}{2i - \sqrt{3}}.$$

1477. Montrer que l'équation

$$\left(\frac{1 + ix}{1 - ix}\right)^n = \frac{1 + ib}{1 - ib} \qquad (b \in \mathrm{R})$$

a toutes ses racines réelles.

1478. Lieu du point M(z) avec

$$z = a + bi + R\cdot\frac{i - t}{i + t}$$

a, b sont des nombres réels, R est un nombre positif et t un paramètre réel.

1479. Soit un quadrilatère quelconque convexe ABCD. Sur les côtés, et à l'extérieur du quadrilatère, on construit quatre carrés de centre P, Q, R, S.
Démontrer que PR = QS et que les droites PR et QS sont perpendiculaires.

1480. Déterminer z tel que les images des nombres z, iz et i soient les sommets d'un triangle équilatéral.

1481. Lieu du point M(z) tel que les images des nombres i, z, iz soient alignées.

1482. Lieu du point M(z) tel que les points M, A(a), I(1) soient alignés.

1483. Condition nécessaire et suffisante pour que les points A(a), B(b), C(c) soient les sommets d'un triangle équilatéral.

1484. Soient le nombre constant $\alpha = a + ib$, et le nombre variable $z = x + iy$. On suppose que

$$|z - \alpha| = \rho.$$

Lieu du point M(z).

1485. Trouver le lieu de M(z) tel que

$$\left(\frac{z - 1 + i}{z - 1 - i}\right)^2 = -1 - i\sqrt{3}.$$

Faisceaux de droites.

1486. D'un point P extérieur à un cercle (C) on mène les tangentes PC et PC′ ainsi que le diamètre PAB. La corde CC′ coupe ce diamètre en I.
Démontrer que (AB, IP) est un quaterne harmonique.
Que peut-on en déduire pour le faisceau (C; AB, IP).

1487. Soit un triangle ABC dans lequel BC = $3\,a$, CA = $4\,a$ et AB = $2\,a$. On considère les bissectrices AI et AJ de l'angle A. Calculer IB, IC, JB, JC.

1488. Dans un triangle ABC on a : AB = $6\,a$, BC = $5\,a$ et AC = $4\,a$. On mène les bissectrices Aα et Aα' de l'angle A. Calculer les longueurs αB, αC, α'B, α'C, $\alpha\alpha'$.

1489. Dans un triangle ABC, on a : $a = 18$, $b = 17$, $c = 13$. Soient Aα et Aα' les bissectrices de l'angle A. Calculer αB, αC, α'B, α'C, $\alpha\alpha'$.

1490. Soit un triangle ABC dans lequel on connaît BC = $3\,a$, CA = $5\,a$, AB = $6\,a$. Calculer les segments déterminés sur les côtés par les bissectrices intérieures.

1491. Soient un cercle (C) de diamètre AB et une corde PQ perpendiculaire à AB. M étant un point quelconque de (C), les droites MP et MQ coupent la droite AB en I et J.
Démontrer que (AB; IJ) est un quaterne harmonique.

1492. On considère un triangle ABC inscrit dans un cercle (C) et on trace le diamètre IJ perpendiculaire au côté BC. Les droites IA et JA coupent la droite BC en R et S.
Démontrer que (BC; IJ) est un quaterne harmonique.

1493. Soient un triangle ABC et la médiane AM. On considère un point I tel que $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, et un point J tel que $\overrightarrow{BJ} = 2\,\overrightarrow{BA}$.

1° Montrer que le faisceau (C; AB, IJ) est harmonique.

2° AM et CI se coupent en O. Montrer que $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OM} = 0$ et que $\overrightarrow{IO} = \frac{1}{4}\overrightarrow{IC}$.

1494. On considère un triangle ABC isocèle de sommet A inscrit dans un cercle (C) de centre O. Soient I et J deux points de BC conjugués harmoniques par rapport à B et C. Les droites AI et AJ recoupent le cercle en D et E.

1° Montrer que le faisceau (A; BC, DE) est harmonique.

2° Soit un point M quelconque du cercle (C). Montrer que le faisceau (M; BC, DE) est harmonique.

3° Montrer que les tangentes en D et E se coupent sur la droite BC.

1495. On donne un triangle ABC, ses hauteurs $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$ et son orthocentre H. $A\alpha$ et $B\gamma$ se coupent en I.

1° Montrer que les hauteurs du triangle ABC sont bissectrices du triangle $\alpha\beta\gamma$.

2° Démontrer que le faisceau (β; A H, I α) est harmonique.

3° Démontrer la relation :

$$\frac{2}{\overline{AH}} = \frac{1}{\overline{AI}} + \frac{1}{\overline{A\alpha}}.$$

1496. Soient un triangle ABC, la bissectrice intérieure $A\alpha$, le centre I du cercle inscrit, le centre J du cercle exinscrit dans l'angle A.

1° Montrer que ($A\alpha$; IJ) est un quaterne harmonique.

2° En déduire (en projetant sur la hauteur AH), la relation :

$$\frac{1}{r} - \frac{1}{r_A} = \frac{2}{h}.$$

1497. Deux cercles (C) et (C′) de centres respectifs O et O′ se coupent en A et B. Soient S et T les centres d'homothétie de ces deux cercles.

1° Montrer que AS et AT sont bissectrices de l'angle OAO′.

2° Montrer que les points A et B appartiennent au cercle de diamètre ST.

1498. Un faisceau harmonique a son sommet S sur un cercle (C); les rayons recoupent (C) en ABCD. On dit que (ABCD) est un quaterne harmonique sur (C).

1° Montrer que, si M est un point de (C), le faisceau (M; ABCD) est harmonique.

2° Montrer que les tangentes en A et B se coupent sur la droite CD, et que les tangentes en C et D se coupent sur la droite AB.

1499. D'un point M extérieur à un cercle (C) on mène les tangentes MA et MB, et une sécante quelconque MCD.

Montrer que (ABCD) est un quaterne harmonique sur (C).

1500. Soient deux droites (Δ) et (Δ') telles que (Δ; Δ') = 60°.

Lieu des points M dont le rapport des distances aux deux droites est égal à $\frac{1}{2}$.

1501. On donne deux droites concourantes en O et telles que (Δ; Δ') = 75°.

Déterminer le lieu des points M dont le rapport des distances aux deux droites est égal à $\sqrt{2}$.

Problèmes.

1502. Soient dans un plan : une droite fixe (D), un point A fixe sur (D), un point fixe B non situé sur (D) et tel que AB ne soit pas perpendiculaire à (D). On désignera par I le milieu de AB, par (I') la médiatrice de AB, par J la projection orthogonale de B sur (D) et par α la détermination comprise entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$ de l'angle des droites AB et (D).

Un cercle variable (O), de centre O, passe constamment par les points fixes A et B. Il recoupe (D) en un second point M variable. On désignera par (T) la tangente en M à ce cercle.

1° On projette orthogonalement B en u sur OM, en u' sur (T). Montrer qu'il existe, lorsque O varie, une similitude f de centre B qui transforme constamment O en M. Calculer l'angle et le rapport de cette similitude en fonction de α. Montrer que O et u, O et u', u et u', sont respectivement des couples homologues dans des similitudes f_1, f_2, f_3, dont on déterminera aussi les angles et les rapports en fonction de α.

2° *a*) Quel est le lieu Δ de u ? Pour le placer sur la figure, on cherchera ses points d'intersection avec AB et (D).

b) Quel est le lieu Δ' de u' ? En quel point Δ' coupe-t-elle (D) ? Quel est l'angle de Δ et Δ' ?

3° On considère deux cercles (O') et (O'') de la famille (O); les droites (T) correspondantes : (T') tangente à (O') en M', et (T'') tangente à (O'') en M'', se coupent en un point P.

a) Montrer que le cercle circonscrit au triangle PM'M'' passe par B.

b) Quel est le lieu (H) du centre ω de ce cercle lorsque les deux cercles (O') et (O'') varient de manière que leur angle reste constant ? Préciser les éléments de ce lieu.

1503. On considère les trapèzes convexes isocèles dont un des côtés non parallèles AB est fixe et dont les diagonales AC et BD ont une longueur donnée d. On désigne par a la longueur AB et l'on suppose $d > a$.

1° Quels sont les lieux géométriques des milieux I et J des côtés parallèles AD et BC ? du point commun M aux diagonales ?

Evaluer en fonction de a et d le produit AI . BJ.

2° On suppose, pour cette question, $d = 2a$, et l'on appelle φ l'angle AMB. Ecrire les équations qui permettraient, φ étant connu, de calculer les longueurs $AM = x$ et $BM = y$. En déduire que φ doit être compris entre certaines limites qu'on déterminera.

3° Soient P et Q les milieux de AC et BD, O le milieu de AB. Montrer que O, P, Q sont alignés et que le cercle de centre M qui passe par P et Q reste orthogonal à un cercle fixe et tangent à deux autres cercles fixes.

1504. On considère un trapèze convexe rectangle ABCD. AB étant perpendiculaire aux côtés parallèles AD et BC, on désigne par M le milieu de AB et l'on suppose que MD et AC sont rectangulaires. On désigne par O le point d'intersection des diagonales, et par H la projection de O sur AB.

1° *a*) Calculer $BC = c$ en fonction de $AB = a$ et de $AD = b$. En déduire que MC et BD sont également rectangulaires.

b) La perpendiculaire menée de A à BO coupe OH en K. Montrer que O est le milieu de HK. En déduire que D, K, C sont alignés, et que AC et BK sont rectangulaires.

2° On suppose que le trapèze varie de telle sorte que la droite AB et le point O restent fixes. On pose $OH = p$.

Construire le trapèze connaissant le point A. Calculer en fonction de $AH = x$ l'aire du triangle ABK.

3° Le trapèze variant comme au 2°, trouver le lieu géométrique des points L, intersection des droites MD et AK, et L', intersection des droites MC et BK.

4° Soit (C) le cercle de centre C tangent à AB, soit de même (D) le cercle de D tangent à AB. Montrer que l'axe radical de ces deux cercles est la droite OM et qu'ils sont orthogonaux.

1505. Par le sommet A d'un carré ABCD de centre O on mène deux droites perpendiculaires coupant l'une BC en P et CD en Q, l'autre BC en R et CD en S, la droite APQ restant intérieure à l'angle BAC.

1° Montrer que les triangles AQR et APS sont isocèles.

2° Soient H l'intersection de QR et PS, M le milieu de QR, N le milieu de PS. Quelle est la nature du quadrilatère AMHN?

3° Quels sont les lieux des points N et M lorsque APQ pivote autour de A dans les conditions indiquées au début?

4° Les quatre points A, M, H, N sont sur un cercle. Montrer que ce cercle passe par un point fixe autre que A, et comparer le rayon de ce cercle au rayon du cercle circonscrit au triangle QRS.

5° Lieu de H et lieu du centre du cercle inscrit dans le triangle ACH.

6° AH coupe SQ en U, AC coupe RQ en V et CH coupe RS en W. Montrer que les trois points U, V, W sont alignés.

1506. Sur un cercle Γ de centre O et de rayon R, on donne deux points fixes A et B tels que l'angle AOB soit droit; quatre points variables M, N, P, Q, tels que les cordes AM, AN, BP, BQ soient égales. Ces cordes se coupent aux points A, B, C, D, E, F (fig. Ex. 1506). On appelle H le milieu de AB.

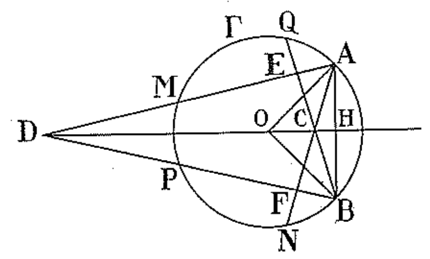


Fig. Ex. 1506

1° Quelle est la transformation qui fait passer de la corde AM à la corde BP? Quelle est la transformation qui fait passer de la corde AM à la corde BQ? Montrer que C et D sont sur la droite OH et que C, D, E, F sont sur un cercle (γ). Quel est le lieu des points E et F?

2° Etablir la relation

$$\frac{1}{\overline{OC}} + \frac{1}{\overline{OD}} = \frac{1}{\overline{OH}}.$$

En déduire l'expression du rayon r de (γ) en fonction de R et de $\overline{OC} = x$.

3° Calculer la puissance de H par rapport au cercle (γ). Trouver des cercles fixes dont chacun est orthogonal à tous les cercles (γ).

1507. On donne dans un plan orienté, un cercle fixe (M) de centre m, de rayon R, et un point fixe F à la distance d du point F ($d > R$).

A partir de tout point M du cercle fixe (M), on construit dans le plan le carré MNPQ tel que le milieu du côté MQ soit le point fixe F, et dont le sommet P est déterminé par $\overline{\text{angle}}\ (\overrightarrow{QM}; \overrightarrow{QP}) = +\frac{\pi}{2}$.

1° Trouver le lieu géométrique du sommet Q quand le point M décrit le cercle (M).

2° Quel est le lieu géométrique du centre ω du carré?

3° Trouver le lieu géométrique du point J milieu du côté NP.

4° Trouver les lieux géométriques des points I et K, milieux respectifs des côtés MN et PQ.

5° Trouver les lieux géométriques des sommets N et P.

1508. Soit ABC un triangle isocèle de sommet A.(AB = AC) (fig. Ex. 1508). On porte sur BA un vecteur $\overrightarrow{BP}$, de norme variable, et sur AC un vecteur $\overrightarrow{CQ}$ de même norme que $\overrightarrow{BP}$ (voir la figure, pour la position de $\overrightarrow{CQ}$).

1° Chercher le centre I de la rotation qui transforme $\overrightarrow{BP}$ en $\overrightarrow{CQ}$. Quelle est, en fonction de l'angle A du triangle, l'angle de cette rotation ?

2° Que peut-on dire du milieu R de PQ ?

3° Montrer que le cercle APQ passe par un point fixe. Montrer que les cercles (BPR) (CQR) passent aussi par ce point fixe et qu'ils sont égaux.

4° Le triangle qui a pour sommets les centres des cercles (BPR), (APQ), (CQR) est semblable au triangle BAC. En déduire une transformation telle que l'image du cercle (BPR) soit le cercle (APQ).

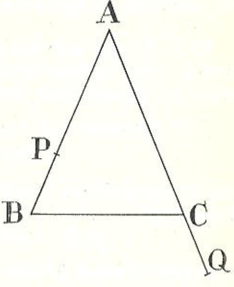


Fig. Ex. 1508.

1509. 1° Soient dans le plan deux axes orthonormés $x'Ox$, $y'Oy$, avec

$$\overline{\text{angle}}\ (Ox; Oy) = +\frac{\pi}{2}.$$

A un point m du plan, on associe le point μ symétrique de m pour la première bissectrice puis le point m' symétrique de μ pour $x'x$.

a) Connaissant les coordonnées x, y de m, calculer les coordonnées du point μ puis celles du point m' que l'on désignera par x' et y'.

b) Quand le point m varie, on passe de m à m' par une isométrie que l'on caractérisera.

c) Au point m $(x; y)$ on associe maintenant le point M de coordonnées X; Y définies par les formules

$$(\text{I}) \qquad \begin{cases} X = 1 + y \\ Y = 1 - x \end{cases}$$

Montrer que cette transformation est une rotation, dont on donnera son centre ω et son angle.

2° Le point m décrivant la première bissectrice, déterminer géométriquement le lieu du point M associé à m par les formules (I).

Démontrer que les cercles de diamètre mM ont même axe radical.

Quel est le lieu du milieu de mM ?

3° Dans tout ce qui suit, on suppose qu'on associe au point $m(x; y)$ le point M(X; Y) dont les coordonnées sont définies par les relations :

$$(\text{II}) \qquad \begin{cases} X = a + x \sin\theta + y \cos\theta \\ Y = a - x \cos\theta + y \sin\theta \end{cases}$$

où a représente un nombre réel donné et θ un angle donné.

Calculer x, y en fonction de X et Y et des données.

Montrer que si $\sin\theta$ est différent de 1 la transformation admet un point double Ω de coordonnées x_0, y_0 que l'on calculera en fonction de a et de θ.

4° *a*) Calculer en fonction de a la somme $x_0 + y_0$, et en fonction de $\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}$ le quotient $\frac{y_0}{x_0}$.

b) En déduire que le lieu de Ω quand θ varie, a restant fixe, est une droite D, et que le lieu de Ω quand a varie, θ restant fixe, est une droite D'. Calculer en fonction de θ l'angle : $\overline{\text{angle}}$ (Ox; D').

c) En s'appuyant sur ce qui précède, indiquer une construction géométrique du point Ω, a et θ étant supposés connus.

d) Montrer que la transformation (I) est un cas particulier de la transformation (II) et retrouver la construction du point ω.

1510. 1° On considère l'équation $x^2 + y^2 - 2xy - m^2 = 0$. Montrer qu'elle représente, dans le plan orthonormé, deux droites A, A′ dont on précisera la position; distance de ces deux droites.

2° Montrer que l'expression

$$x^2(1 - \sin 2\alpha) + y^2(1 + \sin 2\alpha) - 2xy\cos 2\alpha$$

est le carré d'une fonction du premier degré, que l'on déterminera. En déduire que l'équation

$$x^2(1 - \sin 2\alpha) + y^2(1 + \sin 2\alpha) - 2xy\cos 2\alpha - m^2 = 0$$

représente deux droites B et B′, dont on précisera la position; distance de ces deux droites.

3° Quels sont les angles de l'axe O*x* et des droites A, A′, B, B′ ? Prouver que les quatre droites sont tangentes à un cercle fixe lorsque α varie, et en déduire qu'on peut passer par une transformation géométrique simple des droites A, A′ aux droites B, B′.

1511. 1° Dans un triangle ABC on donne AB = C, AC = b, A = 60°. On appelle AI = x la bissectrice intérieure de l'angle A. Traduire en fonction de b, c, x l'égalité :
aire du triangle ABC = aire du triangle ABI + aire du triangle AIC.
De la relation trouvée déduire l'expression de x en fonction de b, c.

2° Sur les côtés d'un angle de 60°, on porte respectivement, à partir du sommet S, des longueurs variables SP et SQ liées par la relation

$$\frac{1}{SP} + \frac{1}{SQ} = \frac{\sqrt{3}}{a},$$

a étant une longueur donnée.
Démontrer que la droite PQ coupe la bissectrice intérieure de l'angle en un point fixe I.

3° On appelle P′ et Q′ les inverses de P et Q dans l'inversion de pôle S et de puissance a^2. Démontrer que la somme SP′ + SQ′ reste constante. Démontrer que le cercle SP′Q′ passe par un point fixe autre que S. Dans quelle transformation ponctuelle P′ et Q′ se correspondent-ils ?

4° Trouver le lieu géométrique du milieu du segment P′Q′.

1512. On donne dans un plan P deux points fixes A et A′. On pose AA′ = d.

1° Lieu géométrique des points M du plan tels que l'angle orienté des vecteurs $\overrightarrow{MA'}$ et $\overrightarrow{MA}$ soit constant. Ce lieu est en général un arc de cercle (Σ).

2° Lieu géométrique des points M du plan tels que le rapport $\frac{MA'}{MA}$ soit constant. Ce lieu est en général un cercle (Γ), dont on calculera le rayon en fonction de d et du rapport $\frac{MA'}{MA} = \lambda$.

Montrer que le cercle (Γ) et l'arc (Σ) sont orthogonaux.

3° Par un point M donné du plan passent, en général, un arc de cercle (Σ) et un cercle (Γ).

On fait correspondre au point M le point M′ situé sur (Σ) et tel que $\frac{M'A'}{MA} = \frac{MA'}{MA} = k$, k désignant un nombre positif donné différent de 1. Soit f la transformation ponctuelle ainsi définie.

Connaissant M, déterminer M'. Examiner le cas où M est situé sur la droite AA'.
Vérifier que les points doubles de la transformation f sont les points A et A'.

4° Pour étudier la transformation f on propose d'effectuer l'inversion de pôle A et de puissance $p = AA'^2$.

Montrer que les cercles (Γ) et (Γ') qui passent respectivement par M et M' ont pour inverses deux cercles (γ) et (γ') de centre A'. Calculer les rayons des cercles (Γ) et (Γ') en fonction de d, de $\frac{MA'}{MA} = \lambda$ et de k. En déduire que le rapport des rayons des cercles (γ) et (γ') est constant et égal à k.

Placer les inverses m et m' des points M et M' et dire quelle est la transformation simple qui les fait correspondre.

Lieu géométrique du point M' lorsque M décrit un cercle donné (C) du plan P.

1513. Dans le plan rapporté aux axes orthonormés $x'Ox$, $y'Oy$, on donne les droites (D), (D'), d'équations respectives $x = a$, $x = -a$, a désignant un nombre positif donné.

On marque sur (D) un point P d'ordonnée h et sur (D') un point P' d'ordonnée h'; on désigne par A, A' les points où (D), (D') coupent respectivement l'axe $x'Ox$ et par M le point d'intersection des droites AP' et A'P.

1° Trouver en fonction de a, h, h', les coordonnées du point M et former l'équation de la droite PP'.

2° a restant donné, on suppose que h et h' varient de manière que $h' = 2h$. Dire comment varie la droite PP' et trouver le lieu géométrique du point M.

3° La parallèle à Oy menée par M coupe $x'Ox$ en H et PP' en Q; indiquer une propriété remarquable des points H, M, Q.

a restant donné, on suppose que h et h' varient de manière que $hh' = 4a^2$. Trouver le lieu du point Q.

1514. Soient deux axes orthonormés $x'Ox$, $y'Oy$; sur $x'Ox$ deux points fixes B et C ayant pour abscisses respectives $-a$ et $+a$. Un point M du plan peut être caractérisé :

— soit par ses coordonnées cartésiennes x et y;

— soit par les directions des droites BM et CM, directions définies à $k\pi$ près par

$$B = \overline{\text{angle}}\,(BO;\ BM) \qquad \text{et} \qquad C = \overline{\text{angle}}\,(CO;\ CM).$$

Les angles B et C s'appellent les coordonnées biangulaires.

1° Une relation imposée aux angles B et C définit une courbe que décrit le point M.

Dire quelles sont les courbes définies par les relations $B = C$, $B + C = \frac{\pi}{3}$ (préciser par une figure).

2° Courbe définie par la relation $B = 2C$? (On établira une relation entre les distances du point M au point B et à l'axe $y'Oy$; il y a plusieurs cas de figure).

3° Courbe définie par la relation $\text{tg } B \cdot \text{tg } C = 1$.

En déduire la courbe définie par $\text{tg } B \cdot \text{tg } C = k^2$, k étant une constante positive, soit inférieure à 1, soit supérieure à 1.

4° Lorsque M décrit une droite D coupant $x'Ox$ au point P d'abscisse p, et telle que $\overline{\text{angle}}\,(Ox;\ D) = \theta$, montrer que B et C sont liés par une relation de la forme

$$\lambda \cdot \text{cotg } B + \mu \cdot \text{cotg } C = 2a \text{ cotg } \theta,$$

λ et μ étant des constantes que l'on calculera (fonctions de a et p).

Réciproquement, si B et C sont liés par une relation de cette forme, par exemple $3.\text{cotg } B - 5.\text{cotg } C = 4$, prouver que M décrit une droite. Construire cette droite. Quelle est sa pente?

Quelle serait, en coordonnées biangulaires, l'équation d'une droite passant par O? d'une droite parallèle à Ox? d'une droite parallèle à Oy?

5° Plus généralement, connaissant les coordonnées cartésiennes x et y d'un point

M, calculer cotg B et cotg C et inversement. A l'aide des résultats obtenus, retrouver les résultats des paragraphes précédents?

Quelle est la courbe définie par $B - C = \frac{\pi}{2}$.

1515. On donne un point P à la distance d du centre O d'un cercle de rayon R, $d > R$, et l'on prend sur ce cercle un point M tel que : angle (POM) $= \alpha$. PM coupe le cercle en un point M' tel que angle (POM') $= \beta$.

1° Calculer $\cos \beta$.

2° Le cercle circonscrit au triangle OMM' coupe OP en Q. Démontrer que Q reste fixe quand α varie.

3° Evaluer QM, QM' et leur rapport.

1516. 1° Dans le plan rapporté aux axes orthonormés $x'Ox$, $y'Oy$, on définit une transformation f : $\quad f: \; m\,(x;\,y) \longrightarrow M\,(X;\,Y)$

par les formules
$$X = 0{,}6.x - 1{,}2.y + 0{,}4$$
$$Y = 1{,}2.x + 0{,}6.y - 1{,}2.$$

Calculer x et y en fonction de X et Y.

f admet-elle un point double? Le déterminer.

2° Le point m décrit une droite d d'équation $y = ax + b$. Quelle est l'image $f(d)$ de la droite d? Donner son équation.

$f(d)$ est une droite D. A quelle condition D est-elle parallèle à Oy? Dans le cas contraire, déterminer sa pente a' en fonction de a.

3° Montrer que $\varphi = \overline{\text{angle}}\,(d;\,D)$ est constant. Déterminer $\operatorname{tg} \varphi$, puis l'angle φ à un centigrade près.

4° On donne la droite d d'équation $y = ax + 1$. Comment varient les droites d et D lorsque a varie. Déterminer le lieu du point P d'intersection de d et D.

1517. On considère un cercle Γ de centre O et de rayon R, une corde BC et un point A de ce cercle; on mène la tangente en A à Γ rencontrant en T la droite BC; on désigne par A l'angle BAC, par α l'angle de la bissectrice AA' de l'angle BAC et de la hauteur AH du triangle, par I le centre du cercle inscrit dans le triangle BAC et par J le centre du cercle exinscrit dans l'angle A du même triangle ABC (fig. Ex. 1517).

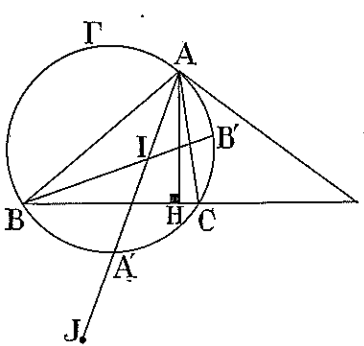


Fig. Ex. 1517.

1° Montrer que, lorsque le point A décrit le cercle Γ, B et C étant fixes, les lieux des milieux des segments AB et AC sont des cercles Γ_1 et Γ_2. Déterminer l'axe radical de Γ_1 et Γ_2, le centre radical de Γ, Γ_1, Γ_2, et évaluer, en fonction de l'angle A, l'angle des deux cercles Γ_1 et Γ_2.

2° Montrer que, lorsque le point A décrit le cercle Γ, B et C restant fixes, le lieu de Γ et de J se compose de deux cercles dont la somme des carrés des rayons est égale à $4\,R^2$.

3° Calculer, en fonction de A et de α, les angles des triangles ABC, CAT et BAT; calculer, en fonction de R, A et α, les côtés des mêmes triangles ABC, CAT et BAT, ainsi que la différence des rayons des cercles circonscrits aux triangles BAT et CAT.

1518. Soient deux axes orthonormés $x'Ox$, $y'Oy$. On considère sur $x'Ox$ un point A tel que $\overline{OA} = a$, $(a < 0)$, et sur $y'Oy$ un point B tel que $\overline{OB} = b$, $(b < 0)$. Soient (A) le cercle de centre A et passant par O, et (B) le cercle de centre B et passant par O. Le second point d'intersection de ces cercles (A) et (B) sera désigné par S.

On fait pivoter autour de O un angle droit, ayant son sommet en O et dont un côté rencontre le cercle (A) en C, tandis que l'autre côté rencontre le cercle (B) en D. On pose $\theta = \overline{\text{angle}}\ (Ox;\ \overrightarrow{OC})$.

1° Calculer, en fonction de a, b et θ, les longueurs OC, OD, CD. Montrer que les triangles AOB et COD sont semblables.

2° Montrer que le cercle circonscrit au triangle AOB passe par le point S et par le milieu M de CD.

3° On fait une inversion de pôle O, et de puissance p quelconque. Soient C′, D′, S, les inverses de C, D, S. De la considération du quadrilatère OC′S′D′, déduire que la droite CD passe constamment par un point fixe.

4° Exprimer, en fonction de a, b et θ, la tangente trigonométrique de

$$\alpha = \overline{\text{angle}}\ (Ox;\ \overrightarrow{OM}).$$

1519. On donne sur un axe $x'Ox$ deux points fixes A et A′ tels que $\overline{OA} = -\overline{OA'} = a$, $(a > 0)$ et deux points variables M et M′ tels que $\overline{AM} \cdot \overline{AM'} = -b^2$ ($b > 0$ donné). Sur les perpendiculaires en A et A′ à $x'Ox$, on porte dans le même sens les segments

$$AB = A'B' = b.$$

Soit O′ le milieu de BB′.

1° Montrer que le point de rencontre I de BM et B′M′ décrit le cercle (S) de diamètre BB′ et que le cercle de diamètre MM′ est tangent au cercle (S). Les points M et M′ peuvent-ils être confondus ? Construire les couples (M; M′) de milieu donné.

2° Comparer les vecteurs $\overrightarrow{MM'}$ correspondant à deux points I symétriques pour la médiatrice de AA′.

3° On oriente cette médiatrice positivement dans le sens du vecteur $\overrightarrow{OO'}$. Calculer la mesure algébrique du vecteur $\overrightarrow{MM'}$ sur $x'Ox$ en fonction de $\overline{HI}$, H désignant la projection orthogonale de I sur BB′.

Application : Déterminer les points I tels que $\overline{MM'} = 2.X$ ($X \in R$). Nombre de solutions. Discussion suivant la valeur de X.

4° Soient I_1 et I_2 deux points I correspondant respectivement à deux couples $\overline{M_1M_1'} = 2X$ et $\overline{M_2M_2'} = -2X$. Il existe une relation entre $\overline{H_1T_1}$ et $\overline{H_2T_2}$ indépendante de X. En conclure que les projections orthogonales de I_2 et I_2 sur OO′ sont conjugués harmoniques par rapport à O et O′. Soient P et Q respectivement les points de rencontre de I_1I_2 avec Ox et BB′.
Montrer que la division I_1I_2PQ est harmonique.
Trouver une relation entre $\overline{OP}$ et $\overline{O'Q}$.

1520. Soient un triangle équilatéral ABC ($AB = a$) et O le centre de son cercle circonscrit. Le triangle ABC est orienté positivement. Soit A′B′C′ le triangle déduit de ABC par la rotation de centre O et d'angle θ ($O < \theta < 120°$); soit enfin Oz la droite transformée de OA par la rotation rot $\left(O;\ \frac{\theta}{2}\right)$.

1° Montrer que les triangles ABC et A′B′C′ sont symétriques pour Oz. Les droites AC, A′C′ se coupent en D, AB et A′C′ en E, AB et A′B′ en F. Montrer que les triangles ADE et A′EF sont égaux.

2° Evaluer le périmètre et les angles du triangle A′EF. En déduire les expressions de ses côtés en fonction de a et θ.

3° Déterminer θ pour que $FE = \frac{a\sqrt{3}}{3m}$, m étant un nombre positif donné. Discuter.

4° Soit $\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} = t$. Montrer que $y = A'E = \frac{2at}{3t + \sqrt{3}}$.

On désigne par r le rayon du cercle inscrit au triangle A'EF. Calculer r en fonction de y.

1521. Dans un plan rapporté à deux axes orthonormés $x'Ox$, $y'Oy$, on considère le cercle (O) de centre O et de rayon 3, qui coupe Ox en A, Oy en I et Oy' en J, et le point P de Ox d'abscisse $3(\sqrt{3}+2)$.

1° Lieu des centres des cercles passant par P et coupant le cercle O en deux points diamétralement opposés. Equation de ce lieu.

Soit O' le centre du plus petit des cercles de la famille précédente; on l'appellera (O'). Calculer son rayon.

2° On trace le rayon O'A' du cercle (O') tel que l'angle $\overline{\text{angle}}\,(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{O'A'})$ soit égal à $\frac{\pi}{3}$. Un point M décrit le cercle (O) et un point M' le cercle (O') de manière que

$$\overline{\text{angle}}\left(\overrightarrow{O'A'};\overrightarrow{O'M'}\right) = 2\cdot\overline{\text{angle}}\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OM}\right).$$

Montrer que, quelles que soient les positions de M et de M', on peut transformer $\overrightarrow{OM}$ en $\overrightarrow{O'M'}$ par une similitude dont on déterminera le centre, l'angle et le rapport.

3° Lieu du milieu U de MM'.

Démontrer directement que le lieu de U est le lieu des points dont le rapport des puissances par rapport aux deux cercles (O) et (O') est égal à -1. Est-ce là un cas particulier d'un théorème général ?

1522. On considère dans un plan trois axes concourants OX, OY, OZ, sur lesquels on marque respectivement trois points A, B, C.

On pose :

$$\overline{OA} = x, \quad \overline{OB} = y, \quad \overline{OC} = z$$

$$\overline{\text{angle}}\,(OY; OZ) = \alpha, \quad \overline{\text{angle}}\,(OZ; OX) = \beta, \quad \overline{\text{angle}}\,(OX; OY) = \gamma.$$

1° Montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour que les trois points A, B, C soient les projections orthogonales d'un même point M sur les trois axes peut s'exprimer par la relation suivante :

$$x.\sin\alpha + y.\sin\beta + z.\sin\gamma = 0. \qquad (1)$$

2° Montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour que les trois points A, B, C, soient alignés peut s'exprimer par la relation suivante :

$$\frac{\sin\alpha}{x} + \frac{\sin\beta}{y} + \frac{\sin\gamma}{z} = 0. \qquad (2)$$

3° On considère trois points A_1, A_2, A_3, situés sur OX, et trois points B_1, B_2, B_3 situés sur OY. On pose :

$$\overline{OA_1} = x_1 \quad \overline{OA_2} = x_2, \quad \overline{OA_3} = x_3,$$
$$\overline{OB_1} = y_1 \quad \overline{OB_2} = y_2, \quad \overline{OB_3} = y_3.$$

Montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour que les droites A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 soient concourantes peut s'exprimer par la relation suivante :

$$\frac{1}{x_1}\cdot\left(\frac{1}{y_2} - \frac{1}{y_3}\right) + \frac{1}{x_2}\cdot\left(\frac{1}{y_3} - \frac{1}{y_2}\right) + \frac{1}{x_3}\cdot\left(\frac{1}{y_1} - \frac{1}{y_2}\right) = 0. \qquad (3)$$

4° On désigne par I le point d'intersection des droites A_1B_1 et A_2B_2.

On demande le lieu géométrique du point I lorsque x_1, x_2, y_1, y_2 sont liés par l'une ou l'autre des relations suivantes :

a) $$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{y_1} = \frac{1}{x_2} + \frac{1}{y_2}.$$

b) $$\left(1 - \frac{1}{x_1}\right)\left(1 - \frac{1}{y_2}\right) = \left(1 - \frac{1}{x_2}\right)\left(1 - \frac{1}{y_1}\right).$$

Tables pour la conversion des degrés en grades

Degrés	Grades	Degrés	Grades
1	1,11 111	46	51,11 111
2	2,22 222	47	52,22 222
3	3,33 333	48	53,33 333
4	4,44 444	49	54,44 444
5	5,55 556	50	55,55 556
6	6,66 667	51	56,66 667
7	7,77 778	52	57,77 778
8	8,88 889	53	58,88 889
9	10,00 000	54	60,00 000
10	11,11 111	55	61,11 111
11	12,22 222	56	62,22 222
12	13,33 333	57	63,33 333
13	14,44 444	58	64,44 444
14	15,55 556	59	65,55 556
15	16,66 667	60	66,66 667
16	17,77 778	61	67,77 778
17	18,88 889	62	68,88 889
18	20,00 000	63	70,00 000
19	21,11 111	64	71,11 111
20	22,22 222	65	72,22 222
21	23,33 333	66	73,33 333
22	24,44 444	67	74,44 444
23	25,55 556	68	75,55 556
24	26,66 667	69	76,66 667
25	27,77 778	70	77,77 778
26	28,88 889	71	78,88 889
27	30,00 000	72	80,00 000
28	31,11 111	73	81,11 111
29	32,22 222	74	82,22 222
30	33,33 333	75	83,33 333
31	34,44 444	76	84,44 444
32	35,55 556	77	85,55 556
33	36,66 667	78	86,66 667
34	37,77 778	79	87,77 778
35	38,88 889	80	88,88 889
36	40,00 000	81	90,00 000
37	41,11 111	82	91,11 111
38	42,22 222	83	92,22 222
39	43,33 333	84	93,33 333
40	44,44 444	85	94,44 444
41	45,55 556	86	95,55 556
42	46,66 667	87	96,66 667
43	47,77 778	88	97,77 778
44	48,88 889	89	98,88 889
45	50,00 000	90	100,00 000

Minutes	Grades	Minutes	Grades	Minutes	Grades
1	0,01 852	21	0,38 889	41	0,75 926
2	0,03 704	22	0,40 741	42	0,77 778
3	0,05 556	23	0,42 593	43	0,79 630
4	0,07 407	24	0,44 444	44	0,81 481
5	0,09 259	25	0,46 296	45	0,83 333
6	0,11 111	26	0,48 148	46	0,85 185
7	0,12 963	27	0,50 000	47	0,87 037
8	0,14 815	28	0,51 852	48	0,88 889
9	0,16 667	29	0,53 704	49	0,90 741
10	0,18 519	30	0,55 556	50	0,92 593
11	0,20 370	31	0,57 407	51	0,94 444
12	0,22 222	32	0,59 259	52	0,96 296
13	0,24 074	33	0,61 111	53	0,98 148
14	0,25 926	34	0,62 963	54	1,00 000
15	0,27 778	35	0,64 815	55	1,01 852
16	0,29 630	36	0,66 667	56	1,03 704
17	0,31 481	37	0,68 519	57	1,05 556
18	0,33 333	38	0,70 370	58	1,07 407
19	0,35 185	39	0,72 222	59	1,09 259
20	0,37 037	40	0,74 074	60	1,11 111

Secondes	Grades	Secondes	Grades	Secondes	Grades
1	0,00 031	21	0,00 648	41	0,01 265
2	0,00 062	22	0,00 679	42	0,01 296
3	0,00 093	23	0,00 710	43	0,01 327
4	0,00 123	24	0,00 741	44	0,01 358
5	0,00 154	25	0,00 772	45	0,01 389
6	0,00 185	26	0,00 802	46	0,01 420
7	0,00 216	27	0,00 833	47	0,01 451
8	0,00 247	28	0,00 864	48	0,01 481
9	0,00 278	29	0,00 895	49	0,01 512
10	0,00 309	30	0,00 926	50	0,01 543
11	0,00 340	31	0,00 957	51	0,01 574
12	0,00 370	32	0,00 988	52	0,01 605
13	0,00 401	33	0,01 019	53	0,01 636
14	0,00 432	34	0,01 049	54	0,01 667
15	0,00 463	35	0,01 080	55	0,01 698
16	0,00 494	36	0,01 111	56	0,01 728
17	0,00 525	37	0,01 142	57	0,01 759
18	0,00 556	38	0,01 173	58	0,01 790
19	0,00 586	39	0,01 204	59	0,01 821
20	0,00 617	40	0,01 235	60	0,01 852

Tables pour la conversion des grades en degrés

Grades	Degrés Minutes	Grades	Degrés Minutes
1	0°54'	**51**	45°54'
2	1°48'	**52**	46°48'
3	2°42'	**53**	47°42'
4	3°36'	**54**	48°36'
5	4°30'	**55**	49°30'
6	5°24'	**56**	50°24'
7	6°18'	**57**	51°18'
8	7°12'	**58**	52°12'
9	8° 6'	**59**	53° 6'
10	9° 0'	**60**	54° 0'
11	9°54'	**61**	54°54'
12	10°48'	**62**	55°48'
13	11°42'	**63**	56°42'
14	12°36'	**64**	57°36'
15	13°30'	**65**	58°30'
16	14°24'	**66**	59°24'
17	15°18'	**67**	60°18'
18	16°12'	**68**	61°12'
19	17° 6'	**69**	62° 6'
20	18° 0'	**70**	63° 0'
21	18°54'	**71**	63°54'
22	19°48'	**72**	64°48'
23	20°42'	**73**	65°42'
24	21°36'	**74**	66°36'
25	22°30'	**75**	67°30'
26	23°24'	**76**	68°24'
27	24°18'	**77**	69°18'
28	25°12'	**78**	70°12'
29	26° 6'	**79**	71° 6'
30	27° 0'	**80**	72° 0'
31	27°54'	**81**	72°54'
32	28°48'	**82**	73°48'
33	29°42'	**83**	74°42'
34	30°36'	**84**	75°36'
35	31°30'	**85**	76°30'
36	32°24'	**86**	77°24'
37	33°18'	**87**	78°18'
38	34°12'	**88**	79°12'
39	35° 6'	**89**	80° 6'
40	36° 0'	**90**	81° 0'
41	36°54'	**91**	81°54'
42	37°48'	**92**	82°48'
43	38°42'	**93**	83°42'
44	39°36'	**94**	84°36'
45	40°30'	**95**	85°30'
46	41°24'	**96**	86°24'
47	42°18'	**97**	87°18'
48	43°12'	**98**	88°12'
49	44° 6'	**99**	89° 6'
50	45° 0'	**100**	90° 0'

Centig.	Minutes Secondes	Centig.	Minutes Secondes
1	0'32''4	**51**	27'32''4
2	1' 4''8	**52**	28' 4''8
3	1'37''2	**53**	28'37''2
4	2' 9''6	**54**	29' 9''6
5	2'42''0	**55**	29'42''0
6	3'14''4	**56**	30'14''4
7	3'46''8	**57**	30'46''8
8	4'19''2	**58**	31'19''2
9	4'51''6	**59**	31'51''6
10	5'24''0	**60**	32'24''0
11	5'56''4	**61**	32'56''4
12	6'28''8	**62**	33'28''8
13	7' 1''2	**63**	34' 1''2
14	7'33''6	**64**	34'33''6
15	8' 6''0	**65**	35' 6''0
16	8'38''4	**66**	35'38''4
17	9'10''8	**67**	36'10''8
18	9'43''2	**68**	36'43''2
19	10'15''6	**69**	37'15''6
20	10'48''0	**70**	37'48''0
21	11'20''4	**71**	38'20''4
22	11'52''8	**72**	38'52''8
23	12'25''2	**73**	39'25''2
24	12'57''6	**74**	39'57''6
25	13'30''0	**75**	40'30''0
26	14' 2''4	**76**	41' 2''4
27	14'34''8	**77**	41'34''8
28	15' 7''2	**78**	42' 7''2
29	15'39''6	**79**	42'39''6
30	16'12''0	**80**	43'12''0
31	16'44''4	**81**	43'44''4
32	17'16''8	**82**	44'16''8
33	17'49''2	**83**	44'49''2
34	18'21''6	**84**	45'21''6
35	18'54''0	**85**	45'54''0
36	19'26''4	**86**	46'26''4
37	19'58''8	**87**	46'58''8
38	20'31''2	**88**	47'31''2
39	21' 3''6	**89**	48' 3''6
40	21'36''0	**90**	48'36''0
41	22' 8''4	**91**	49' 8''4
42	22'40''8	**92**	49'40''8
43	23'13''2	**93**	50'13''2
44	23'45''6	**94**	50'45''6
45	24'18''0	**95**	51'18''0
46	24'50''4	**96**	51'50''4
47	25'22''8	**97**	52'22''8
48	25'55''2	**98**	52'55''2
49	26'27''6	**99**	53'27''6
50	27' 0''0	**100**	54' 0''0

Milli-grades	Secondes
1	3''24
2	6''48
3	9''72
4	12''96
5	16''20
6	19''44
7	22''68
8	25''92
9	29''16
10	32'' 4

Conversion de radians en degrés.

1 radian = 57° 295 779 5
= 3437′ 746 77
= 206 264″ 806

Conversion de degrés en radians.

1° = 0,017 453 293 radian
1′ = 0,000 290 888 radian
1″ = 0,000 004 848 radian.

10°	0,174 533	**10′**	0,002 909	**10″**	0,000 048
20°	0,349 066	**20′**	0,005 818	**20″**	0,000 097
30°	0,523 599	**30′**	0,008 727	**30″**	0,000 145
40°	0,698 132	**40′**	0,011 636	**40″**	0,000 194
50°	0,872 665	**50′**	0,014 544	**50″**	0,000 242
60°	1,047 198	**60′**	0,017 453	**60″**	0,000 291
70°	1,221 731	**70′**	0,020 362	**70″**	0,000 339
80°	1,396 264	**80′**	0,023 271	**80″**	0,000 388
90°	1,570 797	**90′**	0,026 180	**90″**	0,000 436

Nombres usuels.

$\sqrt{2}$ = 1,414 214

$\sqrt{3}$ = 1,732 051

$\sqrt{5}$ = 2,236 068

$\sqrt{10}$ = 3,162 278

π = 3,141 592 7

$\frac{1}{\pi}$ = 0,318 309 8

$\frac{\pi}{2}$ = 1,570 796 3

π^2 = 9,869 604 4

$\sqrt{\pi}$ = 1,772 453 9

$\frac{1}{\sqrt{\pi}}$ = 0,564 189 6

$\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ = 1,253 314 1

Valeurs des fonctions circulaires
Arcs en degrés

↓	Sin	D	D	Cos	
0	0,000			1,000	90
		17	0		
1	0,017			1,000	89
		18	1		
2	0,035			0,999	88
		17	0		
3	0,052			0,999	87
		18	1		
4	0,070			0,998	86
		17	2		
5	0,087			0,996	85
		18	1		
6	0,105			0,995	84
		17	2		
7	0,122			0,993	83
		17	3		
8	0,139			0,990	82
		17	2		
9	0,156			0,988	81
		18	3		
10	0,174			0,985	80
		17	3		
11	0,191			0,982	79
		17	4		
12	0,208			0,978	78
		17	4		
13	0,225			0,974	77
		17	4		
14	0,242			0,970	76
		17	4		
15	0,259			0,966	75
		17	5		
16	0,276			0,961	74
		16	5		
17	0,292			0,956	73
		17	5		
18	0,309			0,951	72
		17	5		
19	0,326			0,946	71
		16	6		
20	0,342			0,940	70
		16	6		
21	0,358			0,934	69
		17	7		
22	0,375			0,927	68
		16	6		
23	0,391			0,921	67
		16	7		
24	0,407			0,914	66
		16	8		
25	0,423			0,906	65
		15	7		
26	0,438			0,899	64
		16	8		
27	0,454			0,891	63
		15	8		
28	0,469			0,883	62
		16	8		
29	0,485			0,875	61
		15	9		
30	0,500			0,866	60
		15	9		
31	0,515			0,857	59
		15	9		
32	0,530			0,848	58
		15	9		
33	0,545			0,839	57
		14	10		
34	0,559			0,829	56
		15	10		
35	0,574			0,819	55
		14	10		
36	0,588			0,809	54
		14	10		
37	0,602			0,799	53
		14	11		
38	0,616			0,788	52
		13	11		
39	0,629			0,777	51
		14	11		
40	0,643			0,766	50
		13	11		
41	0,656			0,755	49
		13	12		
42	0,669			0,743	48
		13	12		
43	0,682			0,731	47
		13	12		
44	0,695			0,719	46
		12	12		
45	0,707			0,707	45
	cos	D	D	sin	↑

↓	Tg	D	D	Cotg	
0	0,000			infini	90
		17			
1	0,017			57,29	89
		18			
2	0,035			28,64	88
		17			
3	0,052			19,08	87
		18			
4	0,070			14,30	86
		17			
5	0,087			11,43	85
		18			
6	0,105			9,514	84
		18			
7	0,123			8,144	83
		18			
8	0,141			7,115	82
		17			
9	0,158			6,314	81
		18			
10	0,176			5,671	80
		18	526		
11	0,194			5,145	79
		19	440		
12	0,213			4,705	78
		18	374		
13	0,231			4,331	77
		18	320		
14	0,249			4,011	76
		19	279		
15	0,268			3,732	75
		19	245		
16	0.287			3.487	74
		19	216		
17	0,306			3,271	73
		19	193		
18	0,325			3,078	72
		19	174		
19	0,344			2,904	71
		20	167		
20	0,364			2,747	70
		20	142		
21	0,384			2,605	69
		20	130		
22	0,404			2,475	68
		20	119		
23	0,424			2,356	67
		21	110		
24	0,445			2,246	66
		21	101		
25	0,466			2,145	65
		22	95		
26	0,488			2,050	64
		22	87		
27	0,510			1,963	63
		22	82		
28	0,532			1,881	62
		22	77		
29	0,554			1,804	61
		23	72		
30	0,577			1,732	60
		24	68		
31	0,601			1,664	59
		24	64		
32	0,625			1,600	58
		24	60		
33	0,649			1,540	57
		26	57		
34	0,675			1,483	56
		25	55		
35	0,700			1,428	55
		27	52		
36	0,727			1,376	54
		27	49		
37	0,754			1,327	53
		27	47		
38	0,781			1,280	52
		29	45		
39	0,810			1,235	51
		29	43		
40	0,839			1,192	50
		30	42		
41	0,869			1,150	49
		31	39		
42	0,900			1,111	48
		33	39		
43	0,933			1,072	47
		33	36		
44	0,966			1,036	46
		34	36		
45	1,000			1,000	45
	Cotg	D	D	Tg	↑

Valeurs des fonctions circulaires
Arcs en grades

↓	Sin	D	D	Cos	
0	0,000			1,000	100
		16	0		
1	0,016			1,000	99
		15	0		
2	0,031			1,000	98
		16	1		
3	0,047			0,999	97
		16	1		
4	0,063			0,998	96
		15	1		
5	0,078			0,997	95
		16	1		
6	0,094			0,996	94
		16	2		
7	0,110			0,994	93
		15	2		
8	0,125			0,992	92
		16	2		
9	0,141			0,990	91
		15	2		
10	0,156			0,988	90
		16	3		
11	0,172			0,985	89
		15	3		
12	0,187			0,982	88
		16	3		
13	0,203			0,979	87
		15	3		
14	0,218			0,976	86
		15	4		
15	0,233			0,972	85
		16	3		
16	0,249			0,969	84
		15	4		
17	0,264			0,965	83
		15	5		
18	0,279			0,960	82
		15	4		
19	0,294			0,956	81
		15	5		
20	0,309			0,951	80
		15	5		
21	0,324			0,946	79
		15	5		
22	0,339			0,941	78
		14	6		
23	0,353			0,935	77
		15	5		
24	0,368			0,930	76
		15	6		
25	0,383			0,924	75
		14	6		
26	0,397			0,918	74
		15	7		
27	0,412			0,911	73
		14	6		
28	0,426			0,905	72
		14	7		
29	0,440			0,898	71
		14	7		
30	0,454			0,891	70
		14	7		
31	0,468			0,884	69
		14	8		
32	0,482			0,876	68
		13	7		
33	0,495			0,869	67
		14	8		
34	0,509			0,861	66
		13	8		
35	0,522			0,853	65
		14	9		
36	0,536			0,844	64
		13	8		
37	0,549			0,836	63
		13	9		
38	0,562			0,827	62
		13	9		
39	0,575			0,818	61
		13	9		
40	0,588			0,809	60
		12	9		
41	0,600			0,800	59
		13	10		
42	0,613			0,790	58
		12	10		
43	0,625			0,780	57
		12	9		
44	0,637			0,771	56
		12	11		
45	0,649			0,760	55
		12	10		
46	0,661			0,750	54
		12	10		
47	0,673			0,740	53
		12	11		
48	0,685			0,729	52
		11	11		
49	0,696			0,718	51
		11	11		
50	0,707			0,707	50
	Cos	D	D	Sin	↑

↓	Tg	D	D	Cotg	
0	0,000			infini	100
		16			
1	0,016			63,66	99
		15			
2	0,031			31,82	98
		16			
3	0,047			21,20	97
		16			
4	0,063			15,89	96
		16			
5	0,079			12,71	95
		16			
6	0,095			10,58	94
		15			
7	0,110			9,058	93
		16			
8	0,126			7,916	92
		16			
9	0,142			7,026	91
		16			
10	0,158			6,314	90
		17	584		
11	0,175			5,730	89
		16	488		
12	0,191			5,242	88
		16	413		
13	0,207			4,829	87
		17	355		
14	0,224			4,474	86
		16	309		
15	0,240			4,165	85
		17	770		
16	0,257			3,895	84
		17	240		
17	0,274			3,655	83
		17	213		
18	0,291			3,442	82
		17	191		
19	0,308			3,251	81
		17	173		
20	0,325			3,078	80
		17	157		
21	0,342			2,921	79
		18	143		
22	0,360			2,778	78
		18	132		
23	0,378			2,646	77
		18	120		
24	0,396			2,526	76
		18	112		
25	0,414			2,414	75
		19	103		
26	0,433			2,311	74
		19	96		
27	0,452			2,215	73
		19	90		
28	0,471			2,125	72
		19	84		
29	0,490			2,041	71
		20	78		
30	0,510			1,963	70
		19	74		
31	0,529			1,889	69
		21	70		
32	0,550			1,819	68
		20	66		
33	0,570			1,753	67
		21	62		
34	0,591			1,691	66
		22	59		
35	0,613			1,632	65
		22	56		
36	0,635			1,576	64
		22	54		
37	0,657			1,522	63
		23	51		
38	0,680			1,471	62
		23	48		
39	0,703			1,423	61
		24	47		
40	0,727			1,376	60
		24	44		
41	0,751			1,332	59
		25	43		
42	0,776			1,289	58
		25	41		
43	0,801			1,248	57
		26	39		
44	0,827			1,209	56
		27	38		
45	0,854			1,171	55
		28	37		
46	0,882			1,134	54
		28	35		
47	0,910			1,099	53
		29	34		
48	0,939			1,065	52
		30	33		
49	0,969			1,032	51
		31	32		
50	1,000			1,000	50
	Cotg	D	D	Tg	↑

TABLE DES MATIÈRES

Imprimé en France
TYPOGRAPHIE FIRMIN-DIDOT ET Cie. — MESNIL (EURE). — 1921
Dépôt légal : 1er trimestre 1964. N° d'édit. 3126

